

Теорія електричних кіл (осінній семестр)
Практичне заняття №2
Хвильові процеси та характеристики довгих ліній передачі
з урахуванням втрат

Комплексні числа
(лекція 6, 7 ТЕК минулий семестр (весна 2025))

Зазвичай комплексне число представляють у вигляді суми речової та уявної частин:

$$\dot{a} = x + jy,$$
$$\dot{a} = 4 + j18,$$

де $x = \text{Re}\dot{a}$, $y = \text{Im}\dot{a}$, j – **уявна одиниця**, тобто число, що задовольняє рівнянню $j^2 = -1$.

Комплексно сполучене (спряжене) число:

$$\dot{a}^* = x - jy,$$
$$\dot{a}^* = 4 - j18$$

Модуль комплексного числа:

$$|\dot{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\text{Re}\dot{a})^2 + (\text{Im}\dot{a})^2}.$$

$$\dot{a} = 4 + j18, \quad |\dot{a}| = \sqrt{4^2 + 18^2} = \sqrt{16 + 324} = \sqrt{340} = 18,4$$

Форми уявлення комплексного числа:

- алгебраїчна $\dot{a} = x + jy$;
- тригонометрична – якщо речові та уявні числа комплексного числа виразити через модуль $|\dot{a}|$ і аргумент φ ($x = |\dot{a}|\cos\varphi$, $y = |\dot{a}|\sin\varphi$), то отримаємо $\dot{a} = |\dot{a}|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$;

$$\varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = \arctg\left(\frac{18}{4}\right) = \arctg(4,5) = 1,35$$

$$\dot{a} = 4 + j18, \quad \dot{a} = 18,4(\cos(1,35) + j\sin(1,35))$$

– показова $\dot{a} = |\dot{a}|e^{j\varphi}$.

$$\dot{a} = 4 + j18, \quad \dot{a} = 18,4 \cdot e^{j1,35}.$$

Питання 1

Комплексно-сполучене число до $\dot{a} = 3 - j8$ дорівнює:

- 1) $\dot{a}^* = x - y$;
- 2) $\dot{a}^* = y - jx$;
- 3) $\dot{a}^* = x + jy$.

Питання 2

Форма запису числа $\dot{a} = j16 - \pi$:

- 1) тригонометрична;
- 2) алгебраїчна;
- 3) показникова.

Питання 3

Число $\dot{a} = 4 + j3$ в показниковій формі має вигляд:

- 1) $\dot{a} = 5e^{j\arctg\left(\frac{4}{3}\right)}$;
- 2) $\dot{a} = 5e^{j\arctg\left(\frac{3}{4}\right)}$;
- 3) $\dot{a} = \sqrt{7}e^{j\arctg\left(\frac{3}{4}\right)}$;
- 4) $\dot{a} = \sqrt{7}e^{j\arctg\left(\frac{4}{3}\right)}$.

Питання 4

Комплексному числу $\dot{a} = 7 + j1$ в тригонометричній формі відповідає запис:

- 1) $\dot{a} = 5\sqrt{2}\left(\cos\left(\arctg\left(\frac{1}{7}\right)\right) + j\sin\left(\arctg\left(\frac{1}{7}\right)\right)\right)$;
- 2) $\dot{a} = 5\sqrt{2}\left(\cos(\arctg(7)) + j\sin(\arctg(7))\right)$;
- 3) $\dot{a} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\arctg\left(\frac{7}{1}\right)\right) + j\sin\left(\arctg\left(\frac{1}{7}\right)\right)\right)$;

$$4) \quad \dot{a} = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\arctg \left(\frac{1}{7} \right) \right) + j \sin \left(\arctg \left(\frac{1}{7} \right) \right) \right)$$

Задача 1

Дано: комплексне число в алгебраїчній формі $\dot{a} = 1 + j$.

Знайти: задане число в тригонометричній та показовій формах.

Рішення:

Питання 5

Число, яке в алгебраїчній формі дорівнює $\dot{a} = 1 + j$, в тригонометричній та показовій формах має вигляд:

$$1. \quad \dot{a} = \sqrt{2} (\cos \pi + j \sin \pi), \quad \dot{a} = \sqrt{2} \cdot e^{j\pi};$$

$$2. \quad \dot{a} = 1,41 \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad \dot{a} = 1,41 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}};$$

$$3. \quad \dot{a} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \right), \quad \dot{a} = 1,41 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

Модуль комплексного числа:

$$|\dot{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1,41$$

Аргумент комплексного числа:

$$\varphi = \arctg \left(\frac{y}{x} \right) = \arctg \left(\frac{1}{1} \right) = \arctg(1) = \frac{\pi}{4} \text{ радіан або } 45 \text{ градусів.}$$

Тригонометрична форма:

$$\dot{a} = |\dot{a}| (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$$\dot{a} = 1,41 \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1/2	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	0	—	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	$-1/\sqrt{3}$	—	0	—
α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$3\pi/2$	2π

Показова форма:

$$\dot{a} = |\dot{a}| e^{j\varphi}$$

$$\dot{a} = 1,41 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$$

Відповідь: три форми числа – алгебраїчна $\dot{a} = 1 + j$, тригонометрична

$$\dot{a} = 1,41 \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right), \text{ показова } \dot{a} = 1,41 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

Задача 2

Дано: повітряна лінія зв'язку з втратами, яка працює на частоті 1 кГц, погонні параметри становлять: активний опір 15 Ом/км, індуктивність 1,2 мГн/км, провідність витoku 1,5 мкСм/км, ємність 6 нФ/км.

Знайти:

- 1) повний опір і провідність лінії на один км;
- 2) хвильовий опір лінії;
- 3) сталу поширення, коефіцієнт згасання та коефіцієнт фази.

Рішення:

Питання 6

Чому дорівнює повний опір довгої лінії з втратами?

1. $\dot{Z}_1 = r_1 + j \cdot L_1$;
2. $\dot{Z}_1 = r_1 + j \cdot f \cdot L_1$;
3. $\dot{Z}_1 = r_1 + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L_1$.

$$\dot{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1 - \text{повний опір ДЛ, розрахований на одиницю довжини} \quad (\omega = 2\pi f)$$

$$\dot{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1 = 15 + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} = 15 + j7,536 \cdot 1000 \cdot 10^{-3} = 15 + j7,536 \text{ Ом/км}$$

Дано: повітряна лінія зв'язку з втратами, яка працює на частоті 1 кГц, погонні параметри становлять: активний опір 15 Ом/км, індуктивність 1,2 мГн/км, провідність витoku 1,5 мкСм/км, ємність 6 нФ/км.

Знайти:

$\dot{Y}_1 = g_1 + j\omega C_1$ - повна провідність на одиницю довжини

Питання 7

Чому дорівнює повна провідність заданої довгої лінії?

1. $1,5 + j \cdot 37,68$ мкСм/км;
2. $1,5 + j \cdot 3,768$ мкСм/км;
3. $1,5 + j \cdot 37,68$ мСм/км.

$$\begin{aligned}\dot{Y}_1 &= g_1 + j\omega C_1 = g_1 + j2\pi \cdot f \cdot C_1 = 1,5 \cdot 10^{-6} + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1000 \cdot 6 \cdot 10^{-9} = 1,5 \cdot 10^{-6} + j \cdot 37,68 \cdot 10^{-6} = \\ &= (1,5 + j \cdot 37,68) \cdot 10^{-6} = 1,5 + j \cdot 37,68 \text{ мкСм/км}\end{aligned}$$

Питання 8

Як знайти хвильовий опір ДЛ з втратами?

1. $\dot{Z}_0 = \frac{r_1 + j\omega L_1}{g_1 + j\omega C_1}$;
2. $\dot{Z}_0 = \sqrt{\dot{Z}_1 / \dot{Y}_1}$;
3. $\dot{Z}_0 = \sqrt{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Y}_1}$.

$$\dot{Z}_0 = \sqrt{\frac{r_1 + j\omega L_1}{g_1 + j\omega C_1}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Y}_1}}$$

Величина це хвильовий опір лінії з втратами.

$$\dot{Z}_1 = 15 + j7,536 \text{ Ом/км}$$

$$\dot{Y}_1 = 1,5 + j \cdot 37,68 \text{ мкСм/км}$$

Переведемо отримані раніше характеристики в показову форму для зручності розрахунків

$$\dot{Y}_1 = 1,5 + j \cdot 37,68 \text{ мкСм/км}$$

$$|\dot{Y}_1| = \sqrt{(1,5^2 + 37,68^2) \cdot 10^{-12}} = \sqrt{(2,25 + 1419,8) \cdot 10^{-12}} = \sqrt{1422,05 \cdot 10^{-12}} = 37,7 \cdot 10^{-6} = 37,7 \text{ мкСм/км}$$

$$\varphi_{Y_1} = \arctg\left(\frac{37,68 \cdot 10^{-6}}{1,5 \cdot 10^{-6}}\right) = \arctg(25,12) \approx 88^\circ \approx 1,5 \text{ рад}$$

$$\dot{Y}_1 = 37,7 e^{j88^\circ} \text{ мкСм/км}$$

$$\dot{Z}_1 = 15 + j7,536 \text{ Ом/км}$$

Питання 9

Запишіть повний опір довгої лінії з втратами на одиницю довжини для заданого пристрою як комплексне число в показовій формі

1. $\dot{Z}_1 = 16,8 \text{ Ом/км};$

2. $\dot{Z}_1 = 16,8 e^{j27^\circ} \text{ Ом/км};$

3. $\dot{Z}_1 = 16,8 e^{j27^\circ} \text{ кОм}.$

$$|\dot{Z}_1| = \sqrt{15^2 + 7,536^2} = \sqrt{225 + 56,8} = \sqrt{281,8} = 16,8$$

$$\varphi_{Z_1} = \arctg\left(\frac{7,536}{15}\right) = \arctg(0,5024) \approx 27^\circ \approx 0,47 \text{ рад}$$

$$\dot{Z}_1 = 16,8 e^{j27^\circ} \text{ Ом/км}$$

Хвильовий опір лінії з втратами

$$\begin{aligned} \dot{Z}_0 &= \sqrt{\frac{r_1 + j\omega L_1}{g_1 + j\omega C_1}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Y}_1}} = \sqrt{\frac{16,8 e^{j27^\circ}}{37,7 \cdot 10^{-6} e^{j88^\circ}}} = \sqrt{0,446 \cdot 10^6 e^{j27^\circ - j88^\circ}} = \sqrt{446000 e^{-j61^\circ}} = \\ &= \sqrt{446000} \sqrt{e^{-j61^\circ}} = 667,8 e^{-j30,5^\circ} \text{ Ом} \end{aligned}$$

Переведемо отриманий результат в алгебраїчну форму

$$\dot{Z}_0 = 667,8 \cdot \cos(-30,5^\circ) + j667,8 \cdot \sin(-30,5^\circ) = 667,8 \cdot 0,862 + j667,8 \cdot (-0,508) \approx 576 - j339 \text{ Ом}$$

Постійна (стала) поширення ДЛ з втратами

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Y}_1} = \sqrt{(r_1 + j\omega L_1)(g_1 + j\omega C_1)}$$

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Y}_1} = \sqrt{16,8 \cdot e^{j27^\circ} \cdot 37,7 \cdot 10^{-6} \cdot e^{j88^\circ}} = \sqrt{633,36 \cdot 10^{-6} \cdot e^{j27^\circ + j88^\circ}} = 25 \cdot 10^{-3} \sqrt{e^{j115^\circ}} \approx 0,025 \cdot e^{j57,5^\circ}$$

Переведемо в алгебраїчну форму

$$\dot{\gamma} = 0,025 \cdot \cos(57,5^\circ) + j0,025 \cdot \sin(57,5^\circ) = 0,025 \cdot 0,542 + j0,025 \cdot 0,841 \approx 0,014 + j0,02$$

Врахуємо, що стала поширення

$$\dot{\gamma} = \alpha + j\beta,$$

де α - коефіцієнт згасання; β - коефіцієнт фази, як і в лінії без втрат.

Питання 10

Чому дорівнюють коефіцієнт згасання та коефіцієнт фази заданої довгої лінії з втратами?

- 1) коефіцієнт згасання дорівнює 0,02 та коефіцієнт фази 0,014;
- 2) коефіцієнт згасання дорівнює 0,025 та коефіцієнт фази 57,5;
- 3) коефіцієнт згасання дорівнює 0,014 та коефіцієнт фази 0,02.

$$\dot{\gamma} = \alpha + j\beta$$

$$\dot{\gamma} = 0,014 - j0,02$$

Звідси: коефіцієнт згасання $\alpha = 0,014$ Нп/км, коефіцієнт фази $\beta = 0,02$ град/км.

Відповідь: повний опір дорівнює $\dot{Z}_1 = 16,8e^{j27^\circ}$ Ом/км, повна провідність лінії $\dot{Y}_1 = 37,7e^{j88^\circ}$ мкСм/км, хвильовий опір $\dot{Z}_0 = 667,8e^{-j30,5^\circ}$ Ом, постійна (стала) поширення дорівнює $0,025 \cdot e^{j57,5^\circ}$, коефіцієнт згасання $\alpha = 0,014$ Нп/км, коефіцієнт фази $\beta = 0,02$ град/км.

Задача 3

Дано: пристрій з розподіленими параметрами має наступні параметри: погонна індуктивність 2,5 мГн/км, погонна ємність 10 нФ/км, опір 40 Ом/км, втратами через провідність ізоляції можна знехтувати. На пристрій подається сигнал частотою 10^4 рад/с.

Знайти:

- 1) повний опір і провідність лінії на один км;
- 2) хвильовий опір лінії;
- 3) сталу поширення.

Рішення:

- 1) повний опір і провідність лінії на один км;

$$\dot{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1 \quad \dot{Y}_1 = g_1 + j\omega C_1$$

Питання 11

Чому дорівнюють повний опір і провідність лінії на один км?

- 1) $40 + j25$ Ом/км, $j \cdot 10^{-4}$ См/км;
- 2) $j25$ Ом/км, 10^{-4} См/км;

$$3) 40 + j25 \text{ Ом/км}, 1 + j \cdot 10^{-4} \text{ См/км}.$$

$\dot{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1$ - повний опір ДЛ, розрахований на одиницю довжини ($\omega = 2\pi f$)

$$\dot{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1 = 40 + j \cdot 10^4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} = 40 + j25 \text{ Ом/км}$$

$\dot{Y}_1 = g_1 + j\omega C_1$ - повна провідність на одиницю довжини

$$\dot{Y}_1 = g_1 + j\omega C_1 = 0 + j \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 10^{-9} = j \cdot 10^{-4} \text{ См/км}$$

2) хвильовий опір лінії;

Питання 12

Чому дорівнює хвильовий опір заданого пристрою?

$$1. 687 \text{ Ом};$$

$$2. 687e^{-j29^\circ} \text{ Ом};$$

$$3. 687e^{-j58^\circ} \text{ Ом}.$$

Величина $\dot{Z}_0 = \sqrt{\frac{r_1 + j\omega L_1}{g_1 + j\omega C_1}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Y}_1}}$ це хвильовий опір лінії з втратами.

Переведемо отримані раніше характеристики в показову форму для зручності розрахунків

$$\dot{Y}_1 = g_1 + j\omega C_1 = 0 + j \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 10^{-9} = j \cdot 10^{-4} \text{ См/км}$$

$$|\dot{Y}_1| = \sqrt{(0^2 + (10^{-4})^2)} = \sqrt{10^{-8}} = 10^{-4} \text{ См/км}$$

$$\varphi_{Y_1} = \arctg\left(\frac{10^{-4}}{0}\right) = \arctg(\infty) = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ рад}$$

$$\dot{Y}_1 = 10^{-4} e^{j90^\circ} \text{ См/км}$$

$$\dot{Z}_1 = 40 + j25 \text{ Ом/км}$$

$$|\dot{Z}_1| = \sqrt{40^2 + 25^2} = \sqrt{1600 + 625} = \sqrt{2225} = 47,17$$

$$\varphi_{Z_1} = \arctg\left(\frac{25}{40}\right) = \arctg(0,625) \approx 32^\circ \approx 0,559 \text{ рад}$$

$$\dot{Z}_1 = 47,17 e^{j32^\circ} \text{ Ом/км}$$

Хвильовий опір лінії з втратами

$$\begin{aligned} \dot{Z}_0 &= \sqrt{\frac{r_1 + j\omega L_1}{g_1 + j\omega C_1}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Y}_1}} = \sqrt{\frac{47,17 e^{j32^\circ}}{10^{-4} e^{j90^\circ}}} = \sqrt{47,17 \cdot 10^4 e^{j32^\circ - j90^\circ}} = \sqrt{471700 e^{-j58^\circ}} = \\ &= \sqrt{471700} \sqrt{e^{-j58^\circ}} \approx 687 e^{-j29^\circ} \text{ Ом} \end{aligned}$$

3) сталу поширення.

Питання 13

Чому дорівнює стала поширення заданої довгої лінії з втратами?

1. 0,069 ;
2. $0,069 \cdot e^{j61^\circ}$;
3. $3,3 + j0,06$.

Постійна (стала) поширення ДЛ з втратами

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \sqrt{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Y}_1} = \sqrt{(r_1 + j\omega L_1)(g_1 + j\omega C_1)} \\ \dot{\gamma} &= \sqrt{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Y}_1} = \sqrt{47,17 \cdot e^{j32^\circ} \cdot 10^{-4} \cdot e^{j90^\circ}} = \sqrt{47,17 \cdot 10^{-4} \cdot e^{j32^\circ + j90^\circ}} = 6,9 \cdot 10^{-2} \sqrt{e^{j122^\circ}} \approx 0,069 \cdot e^{j61^\circ} \end{aligned}$$

Переведемо в алгебраїчну форму

$$\dot{\gamma} = 0,069 \cos(61^\circ) + j0,069 \cdot \sin(61^\circ) = 0,069 \cdot 0,485 + j0,069 \cdot 0,875 \approx 0,033 + j0,06$$

Відповідь: повний опір дорівнює $\dot{Z}_1 = 40 + j25$ Ом/км, повна провідність лінії $\dot{Y}_1 = 10^{-4} e^{j90^\circ}$ мкСм/км, хвильовий опір $\dot{Z}_0 = 687 e^{-j29^\circ}$ Ом, постійна (стала) поширення дорівнює $0,069 \cdot e^{j61^\circ}$.

Таблиця 1. Основні параметри довгої лінії

Характеристика	Лінія без втрат	Лінія з втратами
Хвильовий опір, Z_0 [Ом]	$Z_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$	$Z_0 = \sqrt{\frac{r_1 + j\omega L_1}{g_1 + j\omega C_1}} = \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}}$
Швидкість хвилі, ϑ [м/с]	$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$	$\vartheta = \frac{\omega}{\beta}$
Параметр поширення	$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ (коефіцієнт фази)	$\gamma = \sqrt{Z_1 \cdot Y_1} = \alpha + j\beta$ постійна (стала) поширення α - коефіцієнт згасання β - коефіцієнт фази
Довжина хвилі, λ [м]	$\lambda = \frac{\vartheta}{f}$	$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$