

# hydrodynamique

BTS bâtiment (2000)

hydrostatique- gaz parfaits

siphon

---

## I hydrostatique- gaz parfaits : 6 points

Un local utilisé lors de travaux sous-marins est constitué d'un parallélépipède rectangle de hauteur  $H = 3,0$  m et de section horizontale  $S = 15$  m<sup>2</sup>. Sa partie inférieure est munie d'un orifice lui permettant de communiquer avec l'extérieur.

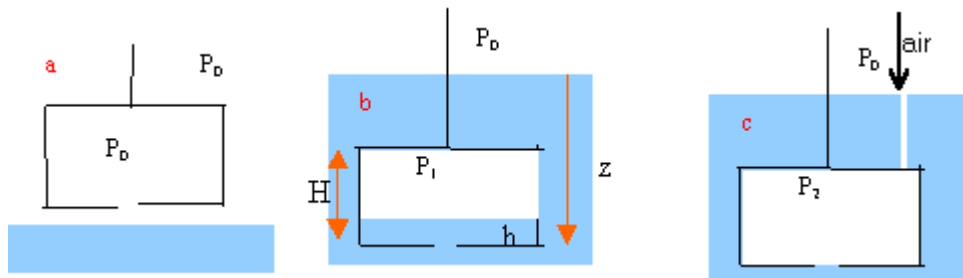
L'air est considéré comme un gaz parfait, sa température garde la même valeur  $\theta = 27^\circ\text{C}$  constante dans tous les cas.

La pression de l'atmosphère au-dessus de l'eau est  $p_0 = 1,0 \cdot 10^5$  Pa.

On rappelle  $g = 9,81$  N. kg<sup>-1</sup> ;  $R = 8,31$  SI ;

masse volumique de l'eau  $\rho = 1,0 \cdot 10^3$  kg.m<sup>-3</sup>

masse molaire moyenne de l'air: 29 g. mol<sup>-1</sup>.



1. Le local contenant l'air à la pression  $p_0$  (schéma a) est descendu sous l'eau jusqu'à ce que l'orifice atteigne la profondeur  $z$  (schéma b). La hauteur d'eau dans le local est alors  $h=1,0$  m. Calculer la pression  $p_1$  de l'air dans le local et la profondeur  $z$ .
2. L'orifice du local étant à la profondeur  $z = 6,1$  m, on introduit dans le local, grâce à un compresseur, de l'air prélevé dans l'atmosphère extérieure jusqu'à ce que toute l'eau soit chassée du local (schéma c). Calculer la pression  $p_2$ .
3. Calculer la quantité de matière (exprimée en nombre de moles) d'air contenue dans le local dans les 3 cas (a,b,c). En déduire la masse d'air prélevée dans l'atmosphère par le compresseur.

---

corrigé

---

équation des gaz parfaits

$$PV = nRT$$

P: pression en Pa

V volume en m<sup>3</sup>.

n : quantité de matière (mol)

T température en kelvin

R= 8,31 SI = constante

$$n = PV / (RT)$$

$$V=3*15 = 45 \text{ m}^3 ; T= 273+27= 300 \text{ K}$$

$$n = 10^5 * 45 / (8,31 * 300) = \underline{1805 \text{ mol}}.$$

---

schéma b :

température, quantité de matière restent inchangés.

$$\text{nouveau volume : } 2*15 = 30 \text{ m}^3$$

$$P_1 = 1805 * 8,31 * 300 / 30 = \underline{1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}}.$$

$$P_1 - P_0 = \rho g (z-h) .$$

$\rho$  masse volumique du liquide

z-h (mètre) : différence de niveau entre un point à la surface du liquide dans le caisson et la surface libre du liquide à l'extérieur.

$$z-h = (P_1 - P_0) / (\rho g)$$

$$z-h = 0,5 \cdot 10^5 / (10^3 * 9,8) = 5,1 \text{ m d'où } z = 5,1 + 1 = \underline{6,1 \text{ m}}.$$

---

$$P_2 - P_0 = \rho g z .$$

$$P_2 = P_0 + \rho g z$$

$$P_2 = 10^5 + 10^3 * 9,8 * 6,1 = \underline{1,597 \cdot 10^5 \text{ Pa}}.$$

la quantité de matière d'air a augmenté.

$$n_2 = P_2 V / (RT)$$

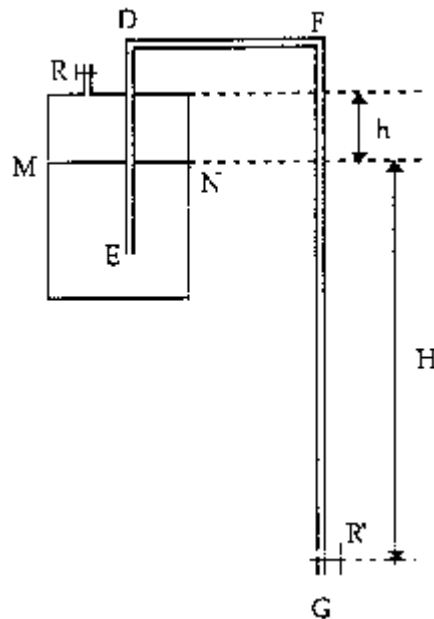
$$n_2 = 1,597 \cdot 10^5 \cdot 45 / (8,31 \cdot 300) = 2884 \text{ mol d'air.}$$

$$2884 - 1805 = 1079 \text{ mol d'air}$$

$$\text{masse d'air : } 1079 \cdot 29 = \underline{31,29 \text{ kg}} .$$

---

## II *siphon* 7 points



Un vase cylindrique de section  $S$  est fermé à sa partie supérieure par un couvercle plan muni d'un robinet  $R$  et laissant passer la branche  $ED$  d'un siphon  $EDFG$ . Ce vase renferme de l'eau dont le niveau  $MN$  est à une distance  $h$  du couvercle et à une hauteur  $H$  au dessus du robinet  $R'$  situé à l'extrémité du siphon.

Le siphon étant rempli d'eau, le robinet  $R'$  étant fermé, on ouvre un instant le robinet  $R$  et on le referme. La pression au dessus du liquide est alors égale à la pression atmosphérique, notée  $p_{\text{atm}}$ .

On admettra que la section du siphon est négligeable devant celle du vase.

On ouvre le robinet  $R'$  et on laisse l'eau s'écouler.

1. L'eau peut cesser de couler avant que le récipient soit vide. Expliquer pourquoi en utilisant le théorème de Bernoulli.
2. Soit  $x$  l'abaissement du niveau  $MN$  à un instant donné et  $p$  la pression de l'air dans la partie supérieure du vase. On suppose la température constante pendant l'écoulement et on considère l'air comme un gaz parfait. Exprimer la pression  $p$  en fonction de  $x$ ,  $h$  et  $p_{\text{atm}}$ .

3. Exprimer lorsque l'eau s'arrête de couler (le robinet R' étant toujours ouvert) la pression  $p$  en fonction de  $x$ ,  $H$ ,  $\rho$ , et  $p_{\text{atm}}$ . Pour cela on appliquera la relation fondamentale de l'hydrostatique au liquide contenu dans le siphon.

*Données* :  $S = 100 \text{ cm}^2$

$h = 0,10 \text{ m}$ ,

$H = 2,0 \text{ m}$ ,

accélération de la pesanteur  $g = 10 \text{ m. s}^{-2}$

pression atmosphérique  $p_{\text{atm}} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .

masse volumique de l'eau  $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ .

---

corrigé

---

au départ ( R fermé et R' fermé), le volume d'air enprisonné est  $Sh$ , sa pression est  $p_{\text{atm}}$  et sa température est  $T$ .

l'équation des gaz parfait s'écrit :  $p_{\text{atm}} Sh = nRT$  (1)

R fermé et R' ouvert, le niveau du liquide dans le vase cylindrique descend de  $x$  : le volume de l'air devient alors  $S(h+x)$ , la pression  $p$ , la température ainsi que la quantité de matière d'air n'ont pas changé.

l'équation des gaz parfaits s'écrit :  $p S(h+x) = nRT$  (2).

les deux relations ci dessus donnent :

$$p_{\text{atm}} Sh = p S(h+x)$$

$$p = p_{\text{atm}} h / (h+x).$$

$$p = 10^5 * 0,1 / (0,1+x) = 10^4 / (0,1+x).$$

---

th de Bernoulli

$$p + \rho gz + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante}.$$

$p$  : pression en pascal

$\rho$  masse volumique du fluide (eau)  $\text{kg/m}^3$ .

$z$  altitude en mètre

$v$  : vitesse d'écoulement en  $\text{m/s}$ .

On choisi l'altitude du point G comme origine des altitudes.

On applique le théorème de Bernoulli entre un point situé à la surface du liquide M et le point G, à la sortie du robinet R'.

la vitesse d'écoulement du liquide en M est voisine de zéro si la section du siphon est petite devant la section S du vase.

$$\text{en M : } p + \rho g (H-x) = \text{constante}$$

$$\text{en G : } p_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$$

$$p + \rho g (H-x) = p_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho v^2$$

$$\text{d'où } \frac{1}{2} \rho v^2 = p - p_{\text{atm}} + \rho g (H-x) = p - 10^5 + 10^4(2-x)$$

$$\text{avec } p = 10^4 / (0,1+x)$$

le liquide ne s'écoule plus lorsque le second membre est nul. ( $v=0$ ) :

$$10^4 / (0,1+x) - 10^5 + 10^4(2-x) = 0$$

*réduire au même dénominateur :*

$$10^4 - 10^5(0,1+x) + 10^4(2-x) (0,1+x) = 0$$

$$\text{effectuer : } -10^5x + 0,2 \cdot 10^4 - 10^4x^2 + 1,9 \cdot 10^4x = 0$$

$$\text{diviser par } 10^4 : -x^2 - 8,1x + 0,2 = 0$$

$$x^2 + 8,1x - 0,2 = 0$$

$$\text{résoudre : } \Delta = 8,1^2 + 4 \cdot 0,2 = 66,41$$

$$x_1 = (-8,1 + 8,149) / 2 = \underline{0,0245 \text{ m.}}$$

la pression de l'air dans le récipient cylindrique fermé est alors :  $p = 10^4 / 0,1245 = \underline{80\,321 \text{ Pa.}}$