

Вектори у просторі

1. Координати вектора. Довжина вектора

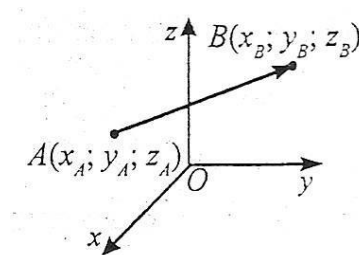
1. Координати вектора

Координати вектора $\overrightarrow{AB}$, що має початок в точці A і кінець в точці B, дорівнюють різниці відповідних координат точок B і A.

Координати вектора у просторі

Якщо початком вектора є точка $A(x_A; y_A; z_A)$, а кінцем – точка $B(x_B; y_B; z_B)$, то

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$



2. Довжина вектора

Довжина вектора (абсолютна величина, або модуль) – довжина відрізка, що зображує вектор.

Позначення: $|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|$.

Довжина вектора у просторі

Якщо є вектор $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, де $|\vec{a}|$ – модуль вектора, a_1, a_2, a_3 – його координати.

Одиничним називається вектор $\vec{a}$, у якого $|\vec{a}| = 1$.

Нульовим називається вектор $\vec{0}$, у якого початок і кінець збігаються. Нульовий вектор не має визначеного напрямку, а його модуль дорівнює нулю.

Задача 1. Знайдіть координати і довжини векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо $A(2; -3; -1)$, $B(-4; -8; 5)$, $C(3; 1; -2)$.

Розв'язання

$$\overrightarrow{AB}(-4 - 2; -8 - (-3); 5 - (-1)) = \overrightarrow{AB}(-6; -5; 6);$$

$$\overrightarrow{AC}(3 - 2; 1 - (-3); -2 - (-1)) = \overrightarrow{AC}(1; 4; -1);$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{97};$$

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-1)^2} = 3\sqrt{2}.$$

Відповідь: $\overrightarrow{AB}(-6; -5; 6)$, $\overrightarrow{AC}(1; 4; -1)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{97}$, $|\overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{2}$.

Рівність векторів у просторі

$$\text{Якщо } \vec{a}(a_1; a_2; a_3) = \vec{b}(b_1; b_2; b_3), \text{ то } \begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2, \\ a_3 = b_3. \end{cases}$$

$$\text{Якщо } \begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2, \\ a_3 = b_3 \end{cases}, \text{ то } \vec{a}(a_1; a_2; a_3) = \vec{b}(b_1; b_2; b_3).$$

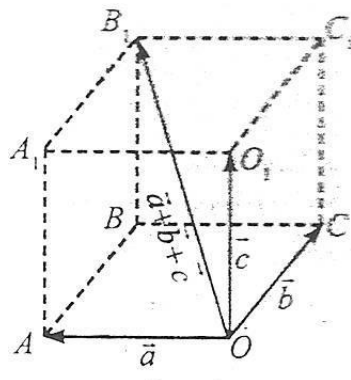
Протилежні вектори у просторі

$$\text{Якщо маємо } \vec{a}(a_1; a_2; a_3), \vec{b}(b_1; b_2; b_3) \text{ і } \vec{a} = -\vec{b}, \text{ то } \begin{cases} a_1 = -b_1, \\ a_2 = -b_2, \\ a_3 = -b_3. \end{cases}$$

$$\text{Якщо маємо } \vec{a}(a_1; a_2; a_3), \vec{b}(b_1; b_2; b_3) \text{ і } \begin{cases} a_1 = -b_1, \\ a_2 = -b_2, \\ a_3 = -b_3 \end{cases}, \text{ то } \vec{a} = -\vec{b}.$$

2. Дії з векторами у просторі

Для трьох векторів (OA , OC і OB), які не лежать в одній площині й мають спільний початком (O), їхня сума зображується діагоналлю паралелепіпеда (OB_1), побудованого на цих векторах, причому початок вектора-суми збігається з початком цих векторів.



Координати вектора-суми векторів дорівнюють сумі відповідних координат даних векторів.

Сума векторів у просторі

$$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) + \vec{b}(b_1; b_2; b_3) = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

Різниця векторів у просторі

$$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) - \vec{b}(b_1; b_2; b_3) = \vec{c}(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$$

Множення вектора на число у просторі

$$\lambda \cdot \vec{a}(a_1; a_2; a_3) = \vec{c}(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$$

Задача 2. Задано вектори $\vec{a}(3; -2; -1)$, $\vec{b}(1; 1; 2)$, $\vec{c}(-3; 2; 4)$.

Знайдіть координати векторів $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{r} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

Розв'язання

$$\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} = \overline{(3 + 1; -2 + 1; -1 + 2)} = \overline{(1; -1; 1)};$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \overline{(3-1; -2-1; -1-2)} = \overline{(2; -3; -3)};$$

$$\vec{r} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} = 2\overline{(3; -2; -1)} + 3\overline{(1; 1; 2)} - \overline{(-3; 2; 4)} = \\ = \overline{(2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 - (-3); 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 - 2; 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 - 4)} = \overline{(12; -3; 0)}$$

Відповідь: $\vec{p} = \overline{(1; -1; 1)}$; $\vec{q} = \overline{(2; -3; -3)}$; $\vec{r} = \overline{(12; -3; 0)}$.

3. Колінеарність векторів у просторі

Якщо є вектори $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ і вони колінеарні, то $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

Якщо є вектори $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, то $\vec{a}$, $\vec{b}$ – колінеарні вектори.

Задача 3. Знайдіть значення m і n , при яких вектори $\vec{a}(3; m; 5)$, $\vec{b}(6; -2; n)$ колінеарні.

Розв'язання

У колінеарних векторів координати пропорційні, звідси $\frac{3}{-6} = \frac{m}{-2} = \frac{5}{n}$. Маємо два рівняння:

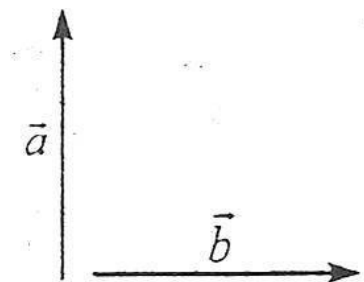
$$1) \frac{3}{-6} = \frac{m}{-2}; m = \frac{3 \cdot (-2)}{-6} = 1;$$

$$2) \frac{3}{-6} = \frac{5}{n}; n = \frac{5 \cdot (-6)}{3} = -10.$$

Відповідь: $m=1$, $n=-10$.

5. Ознака перпендикулярності векторів

Якщо вектори перпендикулярні, то їхній скалярний добуток дорівнює нулю.



І навпаки, якщо скалярний добуток відмінних від нуля векторів дорівнює нулю, то вектори перпендикулярні.

Задача 5. При якому значенні p вектори $\vec{a}(3; p; -1)$ і $\vec{b}(p; -2; 5)$ взаємно перпендикулярні?

Розв'язання

Два ненульові вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot p + p \cdot (-2) + (-1) \cdot 5 = 3p - 2p - 5 = p - 5, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \text{ тоді } p - 5 = 0.$$

Звідси $p=5$.

Відповідь: $p=5$.