



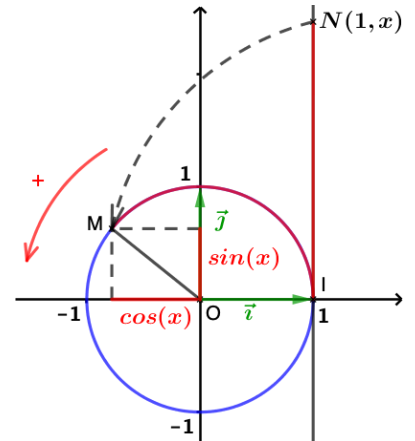
## Chapitre 5 Fonctions trigonométriques

### I. Rappels

Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et orienté dans le sens direct, on considère un cercle trigonométrique de centre O. Considérons la droite  $(d)$  d'équation  $x = 1$ . Pour tout nombre réel  $x$ , considérons le point  $N(1, x)$  de la droite  $(d)$ . À ce point, en enroulant la droite  $(d)$  sur le cercle trigonométrique, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique. Autrement dit, Si I désigne le point de coordonnées  $(1; 0)$ , la longueur de l'arc orienté  $IM^{\frown}$  égale  $x$  : on peut éventuellement faire plusieurs tours du cercle trigonométrique dans un sens ou dans l'autre, si bien que deux valeurs  $x$  et  $x'$  distinctes correspondent à un même point M sur le cercle trigonométrique. Il suffit pour cela qu'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que

$$x - x' = 2k\pi$$

$2\pi$  étant la longueur (le périmètre) du cercle trigonométrique.



#### Définitions

- Le **cosinus** du nombre réel  $x$  est l'abscisse de M et on note  $\cos x$
- Le **sinus** du nombre réel  $x$  est l'ordonnée de M et on note  $\sin x$

De la définition de cosinus et sinus, on tire tout de suite les propriétés suivantes.

#### Propriété 1

Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

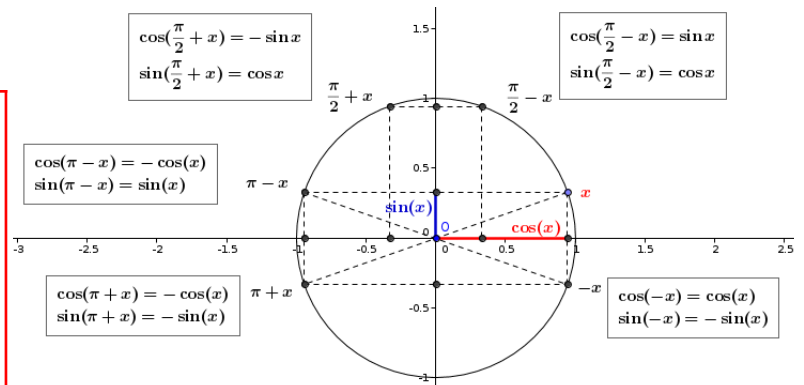
- $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  (Pythagore)

Et par symétrie

#### Propriété 2

Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos(-x) = \cos x \quad \sin(-x) = -\sin x \quad \cos(\pi + x) = -\cos x \quad \sin(\pi + x) = -\sin x$$



### Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus

| $x$      | 0 | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |    |
|----------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|----|
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               | -1 |
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               | 0  |

Les formules suivantes peuvent aussi être obtenues par construction en exprimant les coordonnées du point M correspondant à  $x = a + b$  de 2 manières différentes.

#### Propriété 3

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels quelconques.

$$\begin{aligned} \cos(a - b) &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \\ \cos(a + b) &= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \\ \sin(a - b) &= \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b \\ \sin(a + b) &= \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b \end{aligned}$$

### Démonstration

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels. Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé.

On note  $A$  le point tel que  $OA = 1$  et tel que l'angle  $(\vec{i}, \vec{OA}) = a$

On note  $B$  le point tel que  $OB = 1$  et tel que l'angle  $(\vec{i}, \vec{OB}) = a + b$

On note  $A'$  le point tel que  $OA' = 1$  et tel que l'angle  $(\vec{i}, \vec{OA'}) = a + \frac{\pi}{2}$

Ainsi,

$$\vec{OA} = \cos a \vec{i} + \sin a \vec{j}$$

$$\vec{OB} = \cos(a+b) \vec{i} + \sin(a+b) \vec{j}$$

$$\vec{OA'} = \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \vec{i} + \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \vec{j} = -\sin a \vec{i} + \cos a \vec{j}$$

Or, dans le repère orthonormé  $(O, \vec{OA}, \vec{OA'})$ ,

$$\vec{OB} = \cos b \vec{OA} + \sin b \vec{OA'}$$

Donc

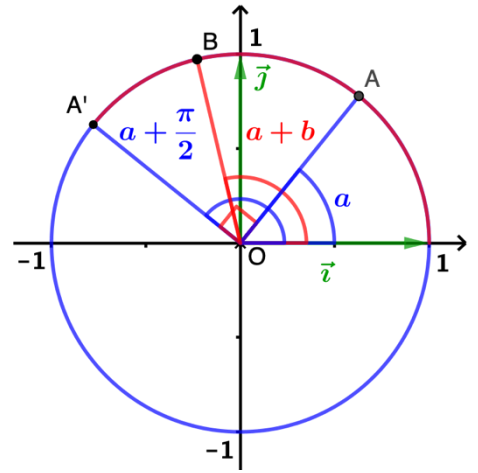
$$\vec{OB} = \cos b (\cos a \vec{i} + \sin a \vec{j}) + \sin b (-\sin a \vec{i} + \cos a \vec{j})$$

$$\vec{OB} = (\cos b \cos a - \sin b \sin a) \vec{i} + (\cos b \sin a + \sin b \cos a) \vec{j}$$

Par unicité des coordonnées dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on obtient bien

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

On obtient facilement les autres formules en remplaçant  $b$  par  $-b$  dans ces 2 dernières formules.



### Remarque

Ces dernières formules permettent de trouver les formules d'addition et de soustraction de deux cosinus ou de deux sinus. En effet, si l'on soustrait membre à membre les deux premières formules, on obtient

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \sin b$$

Posons alors  $x = a+b$  et  $y = a-b$

En additionnant membre à membre, on remarque que

$$x + y = 2a \Leftrightarrow a = \frac{x+y}{2}$$

De la même façon, en soustrayant membre à membre, on obtient

$$x - y = 2b \Leftrightarrow b = \frac{x-y}{2}$$

L'égalité ci-dessus s'écrit alors

$$\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

De la même manière, on trouve les formules suivantes :

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

La première formule nous servira pour calculer la dérivée de cosinus.

## II. Propriétés des fonctions cosinus et sinus

### 1. Périodicité

#### Propriétés

Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{Z}$ ,

- $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$
- $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$

### Démonstration

Aux points de la droite  $(d)$  d'ordonnées  $x$  et  $x + 2k\pi$ , on fait correspondre le même point  $M$  du cercle trigonométrique.

### Remarque

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période  $2\pi$  ou encore  $2\pi$  — *périodiques*.

## Conséquence

Pour tracer la courbe représentative de la fonction cosinus ou de la fonction sinus, **il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur  $2\pi$**  et de la compléter par translation.

## Méthode

Résoudre une équation trigonométrique

 Vidéo <https://youtu.be/PcgvyxU5FCc>

Résoudre dans  $R$  l'équation  $x = \frac{1}{2}$

## Solution

On pose  $X = \cos \cos x$

$$x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow X^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left( X = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \vee \left( X = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

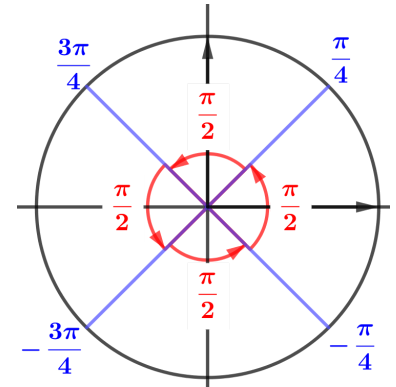
Module

$$\Leftrightarrow \left( \cos \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \vee \left( \cos \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left( x = \frac{\pi}{4}[2\pi] \right) \vee \left( x = -\frac{\pi}{4}[2\pi] \right) \vee \left( x = \frac{3\pi}{4}[2\pi] \right) \vee \left( x = -\frac{3\pi}{4}[2\pi] \right)$$

$$\Leftrightarrow \left( x = \frac{\pi}{4} \left[ \frac{\pi}{2} \right] \right)$$

$$S = \{k \in \mathbb{Z}\}$$



## 2. Parité

### Propriété

Soit  $x \in R$ ,

$$\cos(-x) = \cos x \quad \sin(-x) = -\sin x$$



## Remarque

On dit que la fonction **cosinus** est **paire** et que la fonction **sinus** est **impaire**.

### Définitions

Une fonction  $f$  est **paire** lorsque pour tout réel  $x$  de son ensemble de définition  $D$ ,  $-x$  appartient à  $D$  ( $D$  est symétrique par rapport à 0) et

$$\forall x \in D, f(-x) = f(x)$$

Une fonction  $f$  est **impaire** lorsque son ensemble de définition  $D$  est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$$

## Conséquences

- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction **cosinus** est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.
- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction **sinus** est **symétrique par rapport à l'origine**.

## Méthode

Étudier la parité d'une fonction trigonométrique

 Vidéo [https://youtu.be/hrbgxnCZW\\_I](https://youtu.be/hrbgxnCZW_I)

Démontrer que la fonction  $f$  définie sur  $R$  par  $f(x) = \sin \sin x - \sin \sin (2x)$  est impaire.

## Solution

$R$  est symétrique par rapport à 0.

$$x \in R \Rightarrow -x \in R$$

$$\forall x \in R, f(-x) = \sin \sin (-x) - \sin \sin (-2x) = -\sin \sin x + \sin \sin (2x) = -f(x)$$

La fonction  $f$  est donc impaire. Sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.

## III. Dérivabilité et variations

### 1. Quelques limites

Les fonctions cosinus et sinus n'admettent **pas de limite en  $+\infty$  et en  $-\infty$** . La fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par

$$f(x) = \frac{\sin \sin x}{x}$$

n'est pas définie en 0 mais admet quand même une limite finie en 0 et égale à 1.

### Preuve

Démontrons d'abord l'inégalité

$$\forall x \in ]0; \frac{\pi}{2}[ , \cos \cos x \leq \frac{\sin \sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos \cos x}$$

Soit  $x \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ . Plaçons nous sur le cercle trigonométrique.

Soit le point M d'affixe  $e^{ix}$ . Soit  $A_1$  l'aire du triangle OMS.

$$A_1 = \frac{OS \times SM}{2} = \frac{\cos \cos x \sin \sin x}{2}$$

Soit  $A_2$  l'aire du secteur angulaire  $AOM$ .

$$A_2 = \frac{x}{2\pi} \times \pi \times \text{Aire du disque trigonométrique} = \frac{x}{2}$$

Soit  $A_3$  l'aire du triangle OAT.

$$A_3 = \frac{OA \times AT}{2} = \frac{1}{2} AT = \frac{1}{2} \frac{AT}{MS} \times MS = \frac{1}{2} \frac{OA}{OS} \times MS = \frac{1}{2} \frac{\sin \sin x}{\cos \cos x}$$

D'après le théorème de Thalès appliqué aux triangles OMS et OTA.

### Remarque

$$AT = \frac{\sin \sin x}{\cos \cos x} = \tan \tan x$$

On remarque alors que, en utilisant le fait que  $\cos \cos x > 0$ ,  $\sin \sin x > 0$  et  $x > 0$ ,

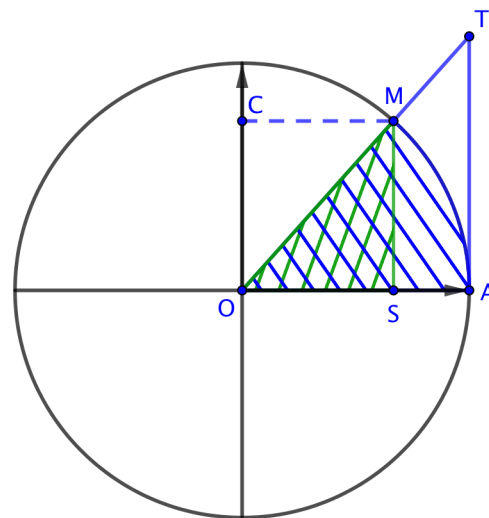
$$A_1 \leq A_2 \leq A_3 \Leftrightarrow \cos \cos x \sin \sin x \leq x \leq \frac{\sin \sin x}{\cos \cos x} \Leftrightarrow \cos \cos x \leq \frac{x}{\sin \sin x} \leq \frac{1}{\cos \cos x}$$

$$\text{Or, } \frac{1}{\cos \cos x} = \cos \cos x = 1$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes,  $\frac{\sin \sin x}{x} = 1$

La fonction  $f$  étant paire, on en déduit que

$$\frac{\sin \sin x}{x} = \frac{\sin \sin x}{x} = \frac{\sin \sin x}{x} = 1$$



## 2. Dérivabilité

### Théorème

les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos'(x) = -\sin(x) \text{ et } \sin'(x) = \cos(x)$$

Si de plus, la fonction  $u$  est dérivable sur  $I \subset \mathbb{R}$  alors les fonctions  $f = \cos(u)$  et  $g = \sin(u)$  sont dérivables sur  $I$  et on a  $\forall x \in I, f'(x) = -u'(x) \sin(u(x))$  et  $\forall x \in I, g'(x) = u'(x) \cos(u(x))$

### Démonstration

Soit  $x$  un nombre réel et  $h$  un nombre réel non nul. On utilise la formule démontrée à la fin du paragraphe I.

$$\frac{\cos \cos(x+h) - \cos \cos x}{h} = \frac{-2 \sin \sin \left( \frac{x+h+x}{2} \right) \sin \sin \left( \frac{x+h-x}{2} \right)}{h} = -\sin \sin \left( x + \frac{h}{2} \right) \frac{\sin \sin \left( \frac{h}{2} \right)}{\frac{h}{2}}$$

$$\text{Posons } H = \frac{h}{2}$$

$$\left( \frac{\cos \cos(x+h) - \cos \cos x}{h} \right) = \left( -\sin \sin \left( x + H \right) \frac{\sin \sin(H)}{H} \right) = -\sin \sin x$$

Par produit des limites.

Soit  $x$  un nombre réel,  $\sin \sin x = \cos \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$

Donc, par composition des dérivées,  $x' = \sin \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)' = \cos \cos x$

Les formules des dérivées de  $f$  et  $g$  découlent directement de la formule de la dérivée d'une fonction composée.

## 2. Variations

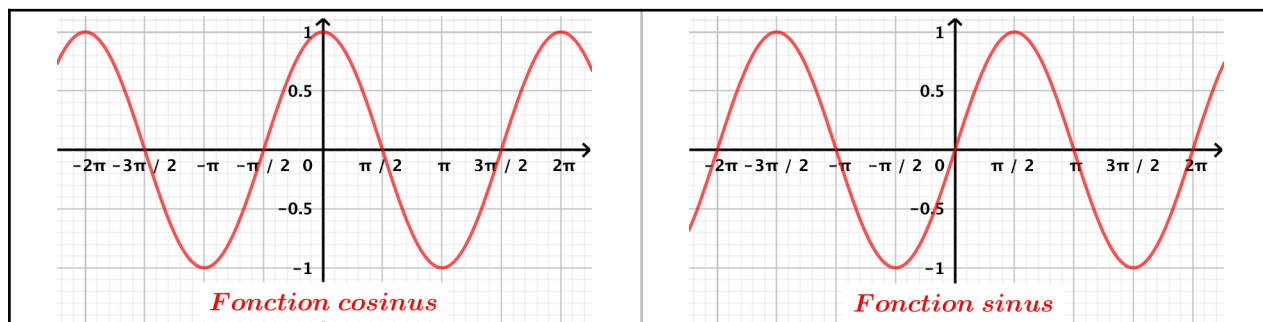
|            |   |       |        |
|------------|---|-------|--------|
| $x$        | 0 | $\pi$ | $2\pi$ |
| $-\sin(x)$ | 0 | 0     | 0      |
| $\cos$     | 1 | -1    | 1      |

|           |   |                 |                  |        |
|-----------|---|-----------------|------------------|--------|
| $x$       | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| $\cos(x)$ | + | 0               | -                | +      |
| $\sin$    | 0 | 1               | -1               | 0      |

### Remarque

On aurait pu tracer le tableau de variations des fonctions cosinus et sinus uniquement sur l'intervalle  $[0; \pi]$  car, du fait de la parité de ces fonctions, on aurait retrouvé un intervalle de longueur  $2\pi$  par symétrie.

## 3. Représentations graphiques



### Méthode

Étudier une fonction trigonométrique

Vidéos dans la playlist

[https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCappSbh79E9sYg99vU5b\\_nBy](https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCappSbh79E9sYg99vU5b_nBy)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \cos \cos(2x) - \frac{1}{2}$$

1. Étudier la parité de  $f$ .
2. Démontrer que la fonction  $f$  est périodique de période  $\pi$ .
3. Étudier les variations de  $f$ . Représenter graphiquement la fonction  $f$ .

### Solution

1.  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \cos \cos(-2x) - \frac{1}{2} = \cos \cos(2x) - \frac{1}{2} = f(x)$$

La fonction  $f$  est donc paire. Dans un repère orthogonal, sa représentation graphique est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

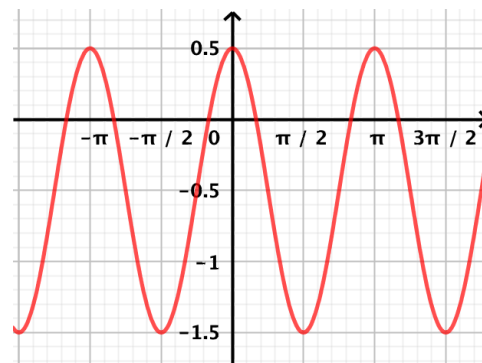
2.  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x + \pi \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + \pi) = \cos \cos(2(x + \pi)) - \frac{1}{2} = \cos \cos(2x + 2\pi) - \frac{1}{2} = \cos \cos(2x) - \frac{1}{2} = f(x)$$

On en déduit que la fonction  $f$  est  $\pi$ -périodique.

3.  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2 \sin \sin(2x)$

|         |               |                 |               |
|---------|---------------|-----------------|---------------|
| $x$     | 0             | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$         |
| $f'(x)$ | 0             | 0               | 0             |
| $f$     | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{3}{2}$  | $\frac{1}{2}$ |



On obtient le graphique par des translations de vecteur  $(\pi, 0)$  et par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.