

Correction Concours EIA 1999 ATS et TSI

Partie I : Modèle simplifié de la suspension automobile

A l'équilibre $\frac{T}{4} + \frac{P}{4} = 0$ au point de fixation du châssis sur chaque suspension avec $T = -k(L_e - L_0)u_z$, tension du ressort et $\frac{P}{4} = -\frac{Mg}{4}u_z$; d'où :

2.1 En appliquant le principe fondamental de la dynamique (Théorème de la résultante cinétique) au châssis, il vient : $\frac{M}{4}\gamma = T + \frac{P}{4} + F_{frot}$ où γ est l'accélération du châssis et $F_{frot} = -aV$ la force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse V du châssis.

En projetant l'équation suivant u_z : $\frac{M}{4}\ddot{z} = -k(L - L_0) - \frac{M}{4}g - a\dot{z}$,

En remplaçant $\frac{M}{4}g = k(L_0 - L_e)$ il vient : $\frac{M}{4}\ddot{z} = -k(L - L_e) - a\dot{z} = -k(z - z_0) - a\dot{z}$.

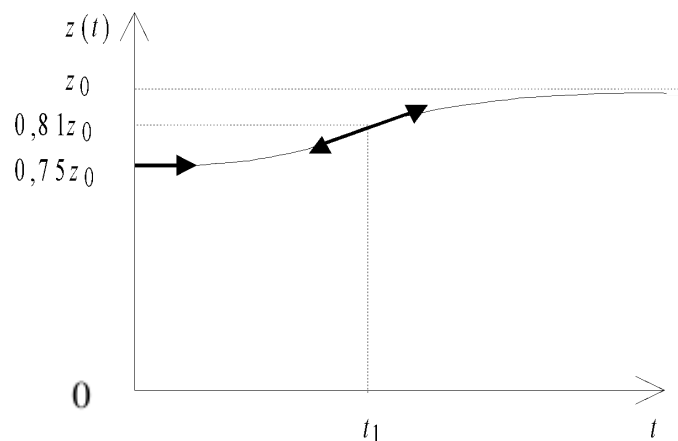
2.2 Le retour à la position d'équilibre doit s'effectuer le plus rapidement possible sans osciller : le régime de fonctionnement doit être critique, ce qui est obtenu quand le discriminant Δ de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est nul : $\Delta = \alpha^2 - 4\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2\sqrt{\beta}$.

2.3 La racine double de l'équation caractéristique est : $r = -\frac{\alpha}{2} = -2\sqrt{\frac{k}{M}} = -\omega_0$ où ω_0 est appelée pulsation propre du système.

La solution $z(t)$ est alors de la forme : $z(t) = (At + B)\exp(-\omega_0 t) + z_0$ avec pour conditions initiales : $z(0) = z_0 - h$ et $\dot{z}(0) = 0$. On trouve sans difficulté :

$$z(t) = z_0 - h(1 + \omega_0 t)\exp(-\omega_0 t)$$

2.4 $z(t) = z_0 - h(1 + \omega_0 t)\exp(-\omega_0 t) \Rightarrow \dot{z}(t) = h\omega_0^2(1 - \omega_0 t)\exp(-\omega_0 t)$; la courbe possède donc un point d'inflexion pour $t_1 = 1/\omega_0$ et $z(t_1) = z_0 - \frac{2}{e}h$.



3.1 En charge : $\ddot{x} + \frac{4a}{M+4m}\dot{x} + \frac{4k}{M+4m}x = \frac{4k}{M+4m}z'_0$.

3.2 Le discriminant de l'équation caractéristique associée devient :

$$\Delta' = \alpha'^2 - 4\beta' = \left(\frac{4a}{M+4m}\right)^2 - 4\frac{4k}{M+4m} = \frac{16a^2 - 16kM - 64km}{(M+4m)^2} = -\frac{64km}{(M+4m)^2} < 0$$

ce qui indique un caractère complexe pour les solutions de celles-ci, et donc une solution pseudo-périodique, c'est-à-dire une oscillation sinusoïdale amortie exponentiellement.

3.3 Les racines de l'équation caractéristique sont : $r = -\frac{\alpha'}{2} \pm j \frac{\sqrt{-\Delta'}}{2} = -\frac{\alpha'}{2} \pm j\omega$

avec $\omega = 4 \frac{\sqrt{km}}{M+4m}$. D'où la pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.



3.4 $T = \frac{\pi}{3} s \Rightarrow k = \frac{9 (M+4m)^2}{4m} = 44100 \text{ N.m}^{-1}$ et $a = \sqrt{kM} = 6600 \text{ kg.s}^{-1}$.

Partie II : Etude de la réponse harmonique

La distance entre deux bosses s'obtient en écrivant : $\gamma\lambda = 2\pi$.



Le temps mis entre deux bosses est : $T = \frac{\lambda}{V} = \frac{2\pi}{\omega}$.



La relation fondamentale de la dynamique en projection sur $\vec{u}_z$ donne :

$$\frac{M+4m}{4} \ddot{x} = -a(\dot{x} - \dot{e}) - k(L - L_0) - \frac{M+4m}{4} g = -a(\dot{x} - \dot{e}) - k(s - e) + kz'_0$$

On obtient : $\ddot{x} + \frac{4a}{M+4m} \dot{x} + \frac{4k}{M+4m} s = \frac{4a}{M+4m} \dot{e} + \frac{4k}{M+4m} e + \frac{4k}{M+4m} z'_0$.

En remplaçant $a = \sqrt{kM}$:



Remarque : On aurait pu aussi se placer dans le référentiel de la roue non galiléen et rajouter une force d'inertie.

2.1 Le régime forcé permanent est le régime des oscillations sinusoïdales de pulsation ω imposé au système une fois le régime transitoire disparu. Il correspond à la solution particulière de l'équation différentielle ; il est de forme sinusoïdale et de pulsation ω .

2.2 En posant $\underline{e} = e_m e^{j\omega t}$ et $\underline{s} = \underline{S} e^{j\omega t}$, l'équation différentielle vérifiée par $\underline{s}$ est :

$$-\omega^2 \underline{s} + \alpha' \underline{s} + \beta' \underline{s} = \alpha' \underline{e} + \beta' \underline{e}$$

En effet, il ne faut oublier de translater le repère à la position d'équilibre s_0 ce qui revient à supprimer le terme constant δ du second membre.

Dans ces conditions, $s(t)$ n'est pas égale à $\Re(\underline{s}(t))$ mais à $\Re(\underline{s}(t)) + s_0$.

L'amplitude complexe vérifie donc l'équation complexe :

$$-\omega^2 \underline{s} + j\omega\alpha' \underline{s} + \beta' \underline{s} = j\omega\alpha' e_m + \beta' e_m \quad \Rightarrow \quad \underline{S} = e_m \frac{\beta' + j\omega\alpha'}{\beta' - \omega^2 + j\omega\alpha'}$$

En posant : $\omega_0' = \sqrt{\beta'} = \sqrt{\frac{4k}{M+4m}}$ et $Q = \sqrt{\frac{M+4m}{4M}}$ (facteur de qualité),



2.3

$$S = |\underline{S}| = e_m \sqrt{\frac{1 + \frac{\Omega^2}{Q^2}}{(1 - \Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{Q^2}}}. \text{ Si } \Omega = 1 \text{ alors } S = e_m \sqrt{1 + Q^2}.$$

$$\left(\frac{S}{e_m}\right)^2 = \frac{1 + \frac{u}{Q^2}}{(1-u)^2 + \frac{u}{Q^2}}$$

2.4 On pose $u = \Omega^2$ et on dérive par rapport à u .

La dérivé s'annule si on a : $\frac{1}{2Q^2}u^2 + u - 1 = 0$. Cette équation n'a qu'une seul racine

positive qui est : $u_m = Q^2 \left(\sqrt{1 + \frac{2}{Q^2}} - 1 \right)$.

La pulsation réduite de résonance est donc :



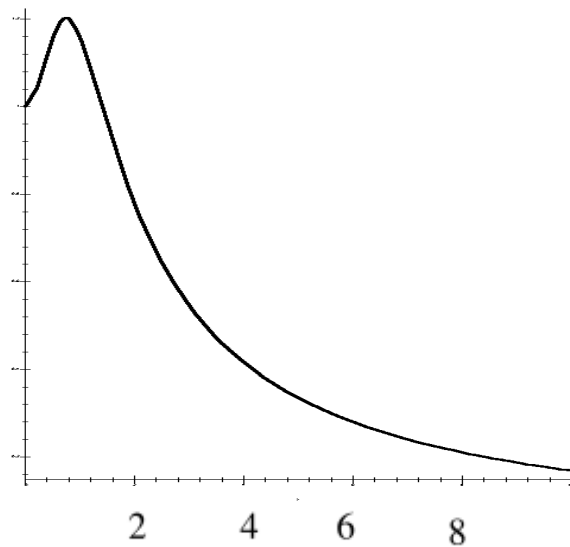
$$\left(\frac{S_m}{e_m}\right)^2 = \frac{1 + \frac{u_m}{Q^2}}{(1-u_m)^2 + \frac{u_m}{Q^2}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2Q^2}u_m^2 + u_m - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u_m}{Q^2} = \frac{2 - 2u_m}{u_m} \quad \text{donc}$$

$$\left(\frac{S_m}{e_m}\right)^2 = \frac{\frac{2 - u_m}{u_m}}{1 - 2u_m + u_m^2 + \frac{2 - u_m}{u_m}} = \frac{2 - u_m}{(2 - u_m)(1 - u_m^2)} = \frac{1}{1 - \Omega_m^4}$$



2.5 Application numérique : $Q = 0,59$, $\Omega_m = 0,75$, $\frac{S_m}{e_m} = 1,2$

Faible acuité de résonance à cause de la petite valeur de Q.



2.6

1

2.7 Pour avoir résonance il faut que $\lambda = \lambda_m = V.T_m = V \frac{2\pi}{\omega_m}$.

La pulsation propre du système est : $\omega'_0 = 2\sqrt{\frac{k}{M+4m}} = \sqrt{\frac{0}{}} = 11,2 \text{ rad.s}^{-1}$.

La pulsation de résonance est : $\omega_m = 0,75\omega'_0 = 8,4 \text{ rad.s}^{-1}$.

D'où :

Si on espace les déformations, l'amplitude des oscillations du châssis diminuent puisque l'on se trouve à la résonance, et tendent vers 0.

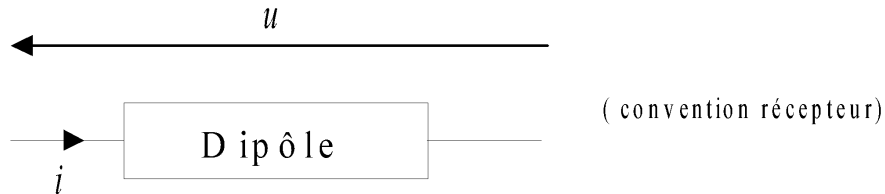
Par contre pour un espace fixé de 18,7 m, il faudrait augmenter la vitesse d'un

rapport $\sqrt{2}$ (127 km/h) pour avoir $\frac{S}{e_m} < 1$.

De même, si $\lambda < \lambda_m$, $\omega > \omega_m$: les oscillations sont mieux absorbées pour les petites déformations rapprochées.

Partie III : Analogie électrique

1.1



Résistance : $u = Ri$; inductance : $u = L \frac{di}{dt}$; condensateur parfait : $i = C \frac{du}{dt}$.

1.2 En posant $\underline{i} = \underline{I}e^{j\omega t}$ et $\underline{u} = \underline{U}e^{j\omega t}$, les relations entre amplitudes complexes devienne : $\underline{U} = R\underline{I}$, $\underline{U} = jL\omega\underline{I}$, $\underline{I} = jC\omega\underline{U}$.

2.1 L'impédance équivalente du circuit est $Z = Z_C + (Z_L // Z_R)$ qui donne :

$$Z = Z_C + \frac{Z_L \cdot Z_R}{Z_L + Z_R} = \frac{1}{jC\omega} + \frac{jRL\omega}{R + jL\omega} = \frac{R - RCL\omega^2 + jL\omega}{jC\omega(R + jL\omega)}$$

2.2 En utilisant la formule du pont diviseur il vient :

$$\frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_C} = \frac{Z_C}{Z} = \frac{R + jL\omega}{R - RCL\omega^2 + jL\omega} = \frac{1 + j\frac{\omega}{R/L}}{1 - LC\omega^2 + j\frac{\omega}{R/L}}$$

En posant : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ et $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ il vient :



3.1 La puissance dissipée par effet Joule dans la résistance est en moyenne :

$$P_J = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} R i_1^2 dt = \frac{1}{2} R I_1^2 = \frac{1}{2} \frac{U^2}{R} = \frac{1}{2R} \frac{L^2 \omega^2}{1 + \frac{L^2 \omega^2}{R^2}} I^2 = \frac{1}{2R} \frac{L^2 \omega^2}{1 + \frac{L^2 \omega^2}{R^2}} \frac{L^2 \omega^2 \left(1 + \frac{L^2 \omega^2}{R^2}\right)}{\left(1 - LC\omega^2\right)^2 + \frac{L^2 \omega^2}{R^2}} U_e^2$$

$$P_J = \frac{1}{2R} \frac{L^2 C^2 \omega^4}{\left(1 - LC\omega^2\right)^2 + \frac{L^2 \omega^2}{R^2}} U_e^2$$

3.2 La puissance dissipée par frottement visqueux dans l'amortisseur est en

moyenne :
$$P_f = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \left| \vec{F} \cdot (\vec{s} - \vec{e}) \vec{u}_z \right| dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} a (\vec{s} - \vec{e})^2 dt$$

avec
$$\vec{s} = e \frac{\beta' + j\alpha'\omega}{\beta' - \omega^2 + j\alpha'\omega}$$
 et

donc :
$$\vec{s} = e \frac{\beta' + j\alpha'\omega}{\beta' - \omega^2 + j\alpha'\omega}$$
 ce qui donne :
$$\vec{s} - \vec{e} = e \frac{\omega^2}{\beta' - \omega^2 + j\alpha'\omega}$$

On en déduit :

$$P_f = \frac{1}{2} a V_e^2 \frac{\omega^4}{\left(\beta' - \omega^2\right)^2 + \alpha'^2 \omega^2}$$

$$P_f = \frac{1}{2} a \frac{\left(\frac{m + M/4}{k}\right)^2 \omega^4}{\left(1 - \frac{m + M/4}{k} \omega^2\right)^2 + \frac{a^2}{k^2} \omega^2} V_e^2$$

3.3 La comparaison des deux expressions des puissances moyennes dissipées par le système mécanique de suspension et le circuit électrique permet d'identifier les équivalences électromécaniques suivantes :

$$a \equiv \frac{1}{R} \quad k \equiv \frac{1}{L} \quad m + M/4 \equiv C$$