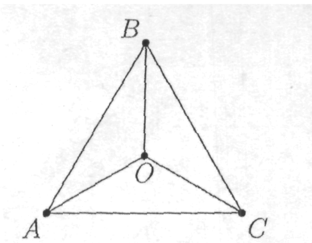
LXII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

9- 12 января 2012 года

8 класс Первый день

1. Найдите все тройки целых чисел (а, Ь, с), таких, что
$a^2Ь + Б^2c + c^2a = 23$, $ab^2 + bc^2 + ca^2 = 25$.
2. В 8"А"и 8"Б"классах некоторой школы вместе учится 50 школьников, более 10 школьников в каждом классе. Подводя итоги учебы за год, директор школы заметил, что среднегодовая оценка по математике у каждого ученика 8"А"одна и та же, причем весьма высокая, В 8"Б"классе также среднегодовая оценка по математике одна та же у всех учащихся этого класса, но заметно ниже, чем в 8"А"классе. Однако, после некоторых вычислений директор обнаружил, что можно перевести несколько школьников из 8"А"класса в 8"Б"класс и столько же школьников из 8"Б"класса в 8"А"класс так, что среднегодовые оценки по математике в этих классах выровняются: средняя оценка учащихся 8"А"класса станет равна средней оценке учащихся 8"Б"класса. (Среднегодовая оценка одного или нескольких школьников определяется как сумма всех их оценок за год, деленная на количество этих оценок, т. е. не обязательно является целой.)
Определите, сколько школьников из одного класса нужно перевести в другой класс, чтобы среднегодовые оценки по математике в этих классах выровнялись.
3. Внутри треугольника *ABC* отмечена точка M, расстояния от которой до сторон *AB* и *BC* равны соответственно 3 и 1.
Найдите расстояние между точками *M* и *C,* если *AB* = 13, *AC* = 12, *BC* = 5.
4. Внутри треугольника *ABC* взята точка *O* и соединена отрезками с его вершинами. Около каждого из отрезков *AB, BC, AC, O A, OB, OC* записали по числу. Оказалось, что для каждой точки *A, B, C* и *O* сумма чисел, которые записаны на отрезках, выходящих из этой точки, одна и та же для любой из этих точек. Известно, что около каких-то трёх отрезков записаны числа 1, 2 и 3. Найдите числа, которые записаны около остальных трёх отрезков.



LXII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

9—12 января 2011 года

9 класс

Первый день

1. Три действительных числа a, b и c удовлетворяют условиям
$a^3 + b^3 + c^3 + 5abc = 2$, $(a + b + c)(ab + bc + ca) = 2$.
Докажите, что одно из этих чисел равно сумме двух других.
2. Положительные попарно различные действительные числа a, b, c таковы, что квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ *и* $(b + 3a)x^2 + (c - b)x + a - c = 0$ имеют по два различных корня, причём сумма всех четырёх корней этих уравнений равна их произведению.
Найдите меньший корень второго из этих уравнений.
3. ВМ, СК, CN - медианы треугольников АВС, СВМ, СКМ соответственно. Р и Q -- точки пересечения стороны АВ с прямыми CN и СК соответственно.
Найдите отношения АР : PQ и AQ : QB.
4. На рёбрах куба нужно расставить двенадцать чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и некоторое действительное число r (по одному числу на каждом ребре, и все эти числа должны быть расставлены), так, чтобы сумма чисел, которые стоят на рёбрах, выходящих из любой вершины куба, была одна и та же для каждой вершины.
При каком наибольшем r это можно сделать?

LXII Белорусская математическая олимпиада школьников
III этап
9—12 января 2012 года 10 класс
Первый день

1. Три действительных числа a, b и c удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}, \quad \frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=-4.$$

Докажите, что одно из этих чисел равно сумме двух других.

2. Различные натуральные числа b и c, большие 1, таковы, что каждое из уравнений $x^2 + bx + c = 0$ и $(b — 1\}x^2 + (2c — b\}x + (c — 36) = 0$ имеет по два различных корня, причём сумма всех четырёх корней этих уравнений равна половине их произведения.
Докажите, что корни первого из этих уравнений являются целыми числами.

3. Пусть M — точка пересечения медиан BB_1 и CC_1 треугольника ABC. Может ли радиус вписанной в треугольник BB_1C окружности быть равен радиусу окружности, вписанной в треугольник BMC_1 ?

4. На каждом ребре треугольной пирамиды записано по одному числу. Докажите, что следующие утверждения а) и б) равносильны:
а) для каждой вершины пирамиды сумма чисел, которые записаны на рёбрах, выходящих из этой вершины, одна и та же для любой вершины;
б) для каждой грани пирамиды сумма чисел, которые записаны на рёбрах этой грани, одна и та же для любой грани.

LXII Белорусская математическая олимпиада школьников
III этап
9- 12 января 2012 года И класс
Первый день

1. Сумма четырех положительных чисел равна 22, сумма всех их попарных произведений равна 105, а произведение этих четырех чисел равно 64. Докажите, что квадратный корень из одного из этих чисел равен сумме квадратных корней из остальных трех чисел.

2. Найдите все действительные числа a, при которых существует функция f, заданная на множестве всех действительных чисел и принимающая действительные значения, такая, что при любом действительном x справедливо равенство

$$f(x) + axf(1-x) = x^2 - 2x.$$

3. Пусть M - точка пересечения медиан AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC. Докажите, что радиус вписанной окружности треугольника ABB_1 равен радиусу вписанной окружности треугольника BMC тогда и только тогда,

когда радиус вписанной окружности треугольника CBB_1 в два раза больше радиуса вписанной окружности треугольника BMC_1.

4. На рёбрах куба нужно расставить двенадцать чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и некоторое действительное число r (по одному числу на каждом ребре, и все эти числа должны быть расставлены), так, чтобы сумма чисел, которые стоят на рёбрах, выходящих из любой вершины куба, была одна и та же для каждой вершины. При каком наименьшем r это можно сделать?

LXII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап *9- 12 января 2012 года*

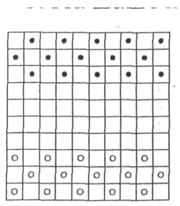
8 класс Второй день

5. Найдите все пары целых неотрицательных чисел a и b, для которых выполняется равенство $2^a - 6^b = 2012$.

6. В остроугольном треугольнике ABC точка M •- середина стороны BC, а точки N и H --основания высот, проведенных к сторонам AB и AC соответственно. Известно, что $\angle NMH = \angle ABC$ и $AC = 8$ см.
Найдите длину отрезка NH.

7. Можно ли натуральные числа от 1 до 99 расставить по кругу так, чтобы
а) сумма любых двух соседних чисел равнялась простому числу;
б) модуль разности любых двух соседних чисел равнялся простому числу ?
(Имейте в виду, что число 1 не является простым.)

8. На шашечной доске 10 x 10 расставлены 15 черных и 15 белых шашек так



как показано на рисунке. За один ход можно передвинуть две шашки одного цвета на незанятые соседние по диагонали клетки (в любом направлении, т. е. разрешается ходить и назад). Бить шашки нельзя.
Можно ли с помощью таких ходов поменять местами все белые шашки со всеми черными ?

LXII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

9- 12 января 2012 года

9 класс Второй день

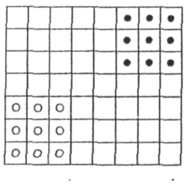
5. Из девяти цифр 1, 2,..., 9 составили несколько чисел так, что каждая цифра была использована ровно один раз и ровно у одного числа. Пусть S — сумма составленных чисел.
Какое наименьшее значение может принимать $|S - 2012|$?

6. В остроугольном треугольнике ABC точка M -- середина стороны BC, а точки N и H - основания высот, проведенных к сторонам AB и AC соответственно. Известно, что $\angle NMH = \angle AHN$ и $NH = 4{,}5$ см.
Найдите длину стороны AC.

7. Можно ли натуральные числа от 1 до 100 расставить по кругу так, чтобы
а) сумма любых двух соседних чисел равнялась простому числу;

б) модуль разности любых двух соседних чисел равнялся простому числу ? (Имейте в виду, что число 1 не является простым.)

8. На доске 7x8 расставлены 9 черных и 9 белых фишек так как показано на рисунке. За один ход можно передвинуть (в любом направлении) две фишки одного цвета на незанятые соседние по стороне клетки.



Можно ли с помошью таких ходов поменять местами все белые фишки со всеми черными ?

LXII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

9 -12 января 2012 года

10 класс Второй день

5. Докажите, что если действительные числа *x, y* и *z* принадлежат отрезку [0; 1], то справедливы неравенства

$$3 \leqslant \frac{3+x-y}{1+x+z} + \frac{3+y-z}{1+x+y} + \frac{3+z-x}{1+y+z} \leqslant \frac{9}{x+y+z}.$$

6. Известно, что пять простых чисел *p,* q, r, s, t, удовлетворяют равенствам

$$s = 1 + p + q + r, \quad t = pq + qr + rp, \quad t - s = 44.$$

Найдите, какие значения может принимать число *t.* (Число называется простым, если оно имеет только два различных делителя — само число и 1. Число 1 не является простым.)

7. В треугольнике *ABC* медианы *AK* и *CN* пересекаются в точке М, *P* -середина отрезка *NB.* Отрезок *BM* пересекает отрезки *KN* и *KP* в точках *T* и *Q* соответственно.

Докажите, что если <*САК* = <*BCN,* то четырехугольник *NTQP* вписанный.

8. Города страны соединены сетью дорог. Известно, что для любых двух городов существует круговой маршрут, проходящий по дорогам страны и связывающий эти два города.

Докажите, что для любых трех городов Л, 5, *С* можно проехать из города *А* в город *С,* по пути посетив *В* и проезжая по каждой дороге и через каждый город не более одного раза.

LXII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

9- 12 января 2012 года

11 класс Второй день

5. Докажите, что если положительные числа а, 6, *с* удовлетворяют неравенству

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqslant 6$, то

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \geqslant 3.$$

6. Найдите все (не обязательно различные) простые числа *p. q, r,* удовлетворяющие равенству

$$p^6 + 24 = q^4 + r^7.$$

7. Пусть продолжение медианы *AK* остроугольного треугольника *ABC* пересекает его описанную окружность в точке *D.* Точку пересечения отрезка *A.D* с прямой, параллельной *BD* и проходящей через *C*, обозначим через P, основание перпендикуляра, опущенного из *C* на *AB,* - через H.
Докажите, что точки *B, K, P* и *H* лежат на одной окружности.

8. Города страны соединены сетью дорог. Известно, что через какой-бы из городов ни запретить проезд, все равно из любого из оставшихся городов можно будет попасть в любой другой из оставшихся (возможно, проезжая черездругие города).
Докажите, что для любых трех городов *A, B, C* можно проехать из города *A* в город *C,* по пути посетив *B* и проезжая по каждой дороге и через каждый город не более одного раза.

LXII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

9 – 12 января 2012 года

Решения

Первый день

8 класс

8.1. Ответ: $(1,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 3,\ 1)$ и $(3,\ 1,\ 2)$.

Заметим, что $(ab^2+bc^2+ca^2)-(a^2b+b^2c+c^2a)=(a-b)(b-c)(c-a)$ (легко убедиться, раскрыв скобки в обеих частях данного равенства). Поэтому согласно условию $(a-b)(b-c)(c-a)=25-23=2$. Тогда, так как произведение трех целых чисел $a-b$, $b-c$ и $c-a$ равно 2, а их сумма, очевидно, равна 0, одно из этих чисел равно 2, а два других числа равны -1. Например, $a-b=-1$, $b-c=-1$, $c-a=2$. Тогда $a=b-1$, а $c=b+1$. Подставив вместо a и c выражения из правых частей этих равенств в первое уравнение из условия задачи, получим $(b-1)^2b+b^2(b+1)+(b+1)^2(b-1)=23 \quad\Leftrightarrow\quad b^3=8 \quad\Leftrightarrow\quad b=2$ и тогда $a=1$, $c=3$. Иными словами, тройка чисел $(1,\ 2,\ 3)$ удовлетворяет условию задачи. Аналогично находим еще два решения: $(2,\ 3,\ 1)$ и $(3,\ 1,\ 2)$.

8.2. Ответ: 12 школьников.

Пусть в 8"А"классе учится n школьников, тогда согласно условию в 8"Б"учится $m=50-n$ школьников. Дале, пусть средняя оценка по математике школьников 8"А"класса равна a, средняя оценка в 8"Б"классе равна b. Если x учащихся из 8"А"класса перевести в 8"Б"класс и столько же школьников из 8"Б"класса перевести в 8"Б"класс, то 8"А"классе будет $n-x$ школьников со средней оценкой a по математике и x школьников со средней оценкой b. Тогда средняя оценка по математике всех школьников этого класса будет равна $\dfrac{(n-x)a+xb}{n}$. Аналогично, средняя оценка по математике всех школьников 8"Б"класса, где учится $50-n$ школьников, станет равна $\dfrac{(m-x)b+xa}{m}$. Приравнивая эти оценки получаем:

$$\frac{(n-x)a+xb}{n}=\frac{(m-x)b+xa}{m} \quad\Leftrightarrow\quad m(n-x)a+mbx=nb(m-x)+nax \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad nma+mx(b-a)=nmb-nx(b-a) \quad\Leftrightarrow\quad (n+m)x(b-a)=nm(b-a),$$

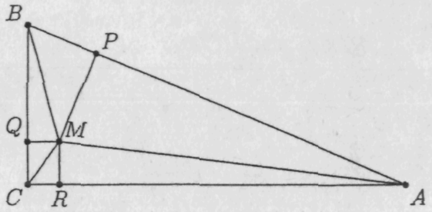
откуда, учитывая, что по условию $b-a\neq 0$, находим $x=\dfrac{nm}{n+m}=\dfrac{n(50-n)}{50}$. Так как число x — целое, то n — четное число. В противном случае, если n — нечетное, то $n(50-n)$ — произведение двух нечетных чисел — не делится на 2 и, значит, не может делиться на 50. Точно так же, n должно быть кратно 5. Иначе, если n не делится на 5, то и $(50-n)$ не делится на 5 и, значит, произведение $n(50-n)$ не делится на 5 и поэтому не может делиться на 50. Таким образом, n делится на 10 и, поскольку по условию $n>10$ и $50-n>10$, то $n=20$ или $n=30$. В обоих случаях получаем $x=12$, т. е. средние оценки по математике 8"А"класса и 8"А"класса можно уровнять, если перевести из одного класса в другой по 12 школьников.

8.3. Ответ $5/3$.

Заметим, что треугольник ABC прямоугольный, поскольку $AB^2=169=25+144=BC^2+AC^2$. Следовательно, $\angle ACB=90^\circ$. Пусть $MP\perp AB$, $MQ\perp BC$, $MR\perp AC$ (см. рис.). Вычислим площади $S(ABC)$, $S(AMB)$, $S(BMC)$, $S(AMC)$ треугольников ABC, AMB, BMC, AMC:

$$S(ABC)=0,5AC\cdot BC=30,\ S(AMB)=0,5MP\cdot AB=0,5\cdot 39,$$

$$S(BMC) = 0,5MQ \cdot BC = 0,5 \cdot 5, \; S(AMC) = 0,5MR \cdot AC = 0,5MR \cdot 12.$$



Поскольку $S(ABC) = S(AMB) + S(BMC) + S(AMC)$, то $MR = 4/3$. Четырехугольник $RMQC$ — прямоугольник, поэтому его диагональ MC может быть найдена по теореме Пифагора:

$$MC = \sqrt{MQ^2 + CQ^2} = \sqrt{MQ^2 + MR^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \frac{5}{3}.$$

8.4. Ответ: 1, 2, 3.

Пусть около отрезков записаны числа a, b, c, d, e, f так, как показано на рис. 1. Докажем вначале, что если два отрезка не имеют общей точки, то около них записаны одинаковые числа. Действительно, рассмотрим какие-либо два не имеющие общей точки отрезка — например, AB и OC. Тогда сумма чисел, которые записаны на отрезках, выходящих из точки B, равна $a+e+b$, а выходящих из точки O — равна $d+e+f$. Так как по условию эти суммы равны, то $a+e+b = d+e+f$, или

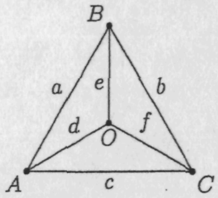


Рис. 1

$$a + b = d + f. \qquad (*)$$

Точно так же, сумма чисел, которые записаны на отрезках, выходящих из точки A, равна $a+d+c$, а выходящих из точки C — равна $b+f+c$. Так как по условию эти суммы равны, то $a+d+c = b+f+c$, или

$$a + d = b + f. \qquad (**)$$

Сложив почленно равенства $(*)$ и $(**)$, получим $2a+b+d = b+d+2f$, или $a = f$, т. е. около отрезков AB и OC записаны одни и те же числа.

Точно так же получаем, что одни и те же числа записаны около отрезков BC и OA и что одни и те же числа записаны около отрезков AC и OB. Пусть около отрезков AB и OC записано по числу a, около отрезков BC и OA — по числу b, и около отрезков AC и OB — по числу c (см. рис. 2). Итак, среди шести чисел, записанных около отрезков, не более трёх различных, а все шесть чисел разбиваются на пары равных. Следовательно, так как по условию нам известно, что среди записанных чисел имеются три различных — это 1, 2 и 3, то отличных от них чисел около отрезков записано быть не может, а значит, остальные записанные числа — это также 1, 2 и 3.

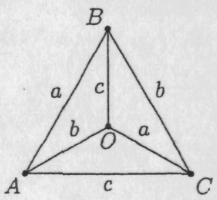


Рис. 2

9 класс

9.1. Достаточно доказать, что $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = 0$. Заметим, что

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) = a^2b + ab^2 + b^2c + dc^2 + c^2a + ca^2 + 3abc.$$

Тогда

$$= (a^2b + ab^2 + b^2c + dc^2 + c^2a + ca^2 + 3abc) - (a^3 + b^3 + c^3 + 5abc) = 2 - 2 = 0.$$

Поэтому какой-то из множителей $(a+b-c)$, $(b+c-a)$, $(c+a-b)$ равен 0, и, значит, $a+b=c$, или $b+c=a$, или $c+a=b$, что и требовалось доказать.

9.2. Ответ: -1.

Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, а x_3 и x_4 — корни уравнения $(3a+b)x^2+(c-b)x+a-c=0$. По теореме Виета получаем соответственно равенства

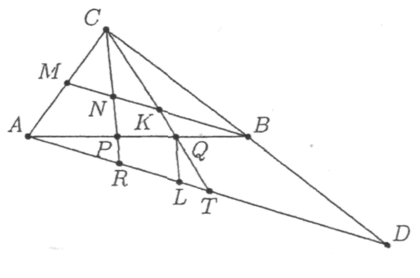
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_3 + x_4 = -\dfrac{c-b}{3a+b}, \\ x_3 \cdot x_4 = \dfrac{a-c}{3a+b}. \end{cases}$$

Поэтому сумма корней этих уравнений равна $-\dfrac{b}{a} - \dfrac{c-b}{3a+b} = \dfrac{-b^2-2ab-ac}{a(3a+b)}$, а их произведение $\dfrac{c}{a} \cdot \dfrac{a-c}{3a+b} = \dfrac{-c^2+ac}{a(3a+b)}$. Так как по условию сумма корней уравнений равна их произведению, то $\dfrac{-b^2-2ab-ac}{a(3a+b)} = \dfrac{-c^2+ac}{a(3a+b)}$, или $b^2-c^2=-2a(b+c)$, т. е. $(b-c)(b+c)=-2a(b+c)$. Так как согласно условию $b+c \neq 0$, то сокращая последнее равенство на $b-c$, получим $b-c=-2a$, или $b=c-2a$. Поэтому второе уравнение принимает вид $(a+c)x^2+2ax+a-c=0$. Его корни, как легко убедиться, — числа -1 и $\dfrac{c-a}{c+a}$, меньший из которых равен -1, поскольку $\dfrac{c-a}{c+a} = \dfrac{(-c-a)+2c}{c+a} = -1 + \dfrac{2c}{c+a} > -1$.

Замечание. Хотя для решения задачи это не нужно, отметим, что числа a, b и c, для которых выполнены все условия задачи, существуют. Для этого достаточно взять $b=c-2a$, $a>0$ и $c>2a$.

9.3. Ответ: $AP:PQ=3:2$, $AQ:QB=2:1$.

Через точку A проведем прямую, параллельную медиане BM до ее пересечения с прямой CB в точке D. Пусть R и T — точки пересечения отрезка AL с прямыми CK и CN соответственно. Пусть также $QL \parallel CR$ (см. рис.).



Так как M — середина AC и $MB \parallel AD$, то BM — средняя линия треугольника ACD. Поэтому B — середина AD и, кроме того. MN, NK, KB — средние линии треугольников ACR, RCT, TCD соответственно. Следовательно, $AR=2NM=2NK=RT$ и $AT=AR+RT=2(MN+NK)=2KB=TD$. Значит, AB и CT — медианы треугольника ACD а Q — точка их пересечения. Следовательно, $AQ:QB=CQ:QT=2:1$ (свойство медиан треугольника). Поскольку $CR \parallel QL$, то по теореме Фалеса $RL:LT=CQ:QT=2:1$. Поэтому, если $LT=x$, то $LR=2x$, а $AR=RT=AL+LT=3x$. Тогда по теореме Фалеса $AP:PQ=AR:RL=3:2$.

9.4. Ответ: наибольшее $r=14$.

Допустим, что числа $1, 2, \ldots, 11$ и r расставлены на рёбрах куба так, как требуется в условии задачи. Через S обозначим сумму чисел на рёбрах, выходящих из произвольной вершины куба (согласно условию эта сумма одна и та же для каждой вершины).

Запишем в каждой вершине куба число, равное сумме чисел, стоящих на выходящих из неё рёбрах. Так как для каждой вершины куба это число равно S, то сумма чисел, записанных во всех восьми вершинах куба, равна $8S$. С другой стороны, как легко видеть, сумма $8S$ — это в точности такая сумма, в которой каждое число, стоящее на ребре, подсчитано дважды: для каждой из вершин ребра, на котором оно стоит. Поэтому

$$8S = 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 11 + r), \quad \text{или} \quad 66 + r = 4S. \qquad (*)$$

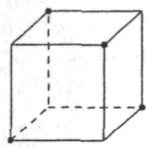


Рис. 1

К этому результату можно прийти и по-другому. Рассмотрим четыре вершины куба, обозначенные на рис. 1 жирными точками. Тогда, сумма чисел на рёбрах, выходящих из этих четырёх вершин, равна, с одной стороны, $4S$, а с другой, как легко видеть, она равна сумме всех чисел, стоящих на рёбрах куба, т. е.

$$4S = 1 + 2 + \ldots + 11 + r, \quad \text{или} \quad 66 + r = 4S.$$

Из равенства $(*)$ находим, что $r = 4S - 66 = 2(2S - 33)$, а так как S — целое, то r — целое чётное число. (*Можно утверждать даже больше:* r — *чётное число, не делящееся нацело на* 4, поскольку $r = 4(S - 17) + 2$, но этот факт нам не понадобится.)

Оценим теперь величину числа r сверху. Пусть число r стоит на ребре XY, а на остальных рёбрах, выходящих из вершин X и Y, стоят числа x_1, x_2, x_3 и x_4. Тогда сумма чисел, которые стоят на рёбрах, выходящих из вершины X, и рёбрах, выходящих из вершины Y, равна, с одной стороны, $2S$, а с другой — она равна $2r + x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, т. е. поскольку в силу второго равенства в $(*)$ $2S = 33 + \dfrac{r}{2}$, имеем равенство

$$33 + \frac{r}{2} = 2r + x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \quad \text{или} \quad \frac{3}{2}r = 33 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4). \qquad (**)$$

Но числа x_1, x_2, x_3 и x_4 — это какие-то попарно различные из чисел $1, 2, \ldots, 11$. Поэтому $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Тогда из второго равенства в $(**)$ получаем неравенство $\dfrac{3}{2}r \leqslant 33 - 10 = 23$, а значит, $r \leqslant 15\dfrac{1}{3}$. Поскольку, как доказано выше, число r чётное, то $r \leqslant 14$.

Остаётся на рёбрах куба расставить числа $1, 2, \ldots, 11$ и 14, так, чтобы выполнялось условие задачи — см. рис. 2, на котором для большего удобства расстановки чисел на рёбрах куба вместо привычной параллельной проекции куба, как на рис. 1, изображена его центральная проекция. Для расстановки чисел $1, 2, \ldots, 11$ и 14, удовлетворяющей условию задачи, необходимо вначале из равенства $(*)$ при $r = 14$ найти, что в этом случае $S = 20$. После этого нужную расстановку несложно получить при помощи простых соображений и небольшого перебора.

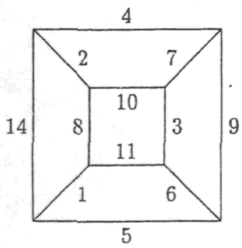


Рис. 2

10 класс

10.1. Достаточно доказать, что $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=0$. Имеем:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad (ab+bc+ca)(a+b+c)=abc \;\Leftrightarrow\quad a^2b+ab^2+b^2c+dc^2+c^2a+ca^2+3abc=abc \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2=-2abc.$$

А также

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=-4 \quad\Leftrightarrow\quad a^3+b^3+c^3=-4abc.$$

Тогда

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=a^2b+ab^2+b^2c+dc^2+c^2a+ca^2-$$
$$-(a^3+b^3+c^3)-2abc=(-2abc)-(-4abc)-2abc=0.$$

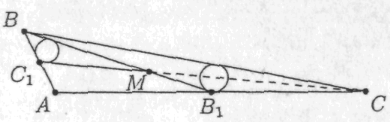
Поэтому какой-то из множителей $(a+b-c)$, $(b+c-a)$, $(c+a-b)$ равен 0, и, значит, $a+b=c$, или $b+c=a$, или $c+a=b$, что и требовалось доказать.

10.2. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+bx+c=0$, а x_3 и x_4 — корни уравнения $(b-1)x^2+(2c-b)x+(c-3b)=0$. По теореме Виета получаем соответственно равенства

$$\begin{cases} x_1+x_2=-b, \\ x_1\cdot x_2=c \end{cases} \quad\text{и}\quad \begin{cases} x_3+x_4=-\dfrac{2c-b}{b-1}, \\ x_3\cdot x_4=\dfrac{c-3b}{b-1}. \end{cases}$$

Поэтому сумма корней этих уравнений равна $-b-\dfrac{2c-b}{b-1}=\dfrac{-b^2+2b-2c}{b-1}$, а их произведение $c\cdot\dfrac{c-3b}{b-1}=\dfrac{c^2-3bc}{b-1}$. Так как по условию сумма корней уравнений равна половине их произведения, то $\dfrac{-b^2+2b-2c}{b-1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{c^2-3bc}{b-1}$, или $c^2-3bc+2b^2=4(b-c)$, т. е. $(c-b)(c-2b)=4(b-c)$. Так как согласно условию $b-c\neq 0$, то сокращая последнее равенство на $b-c$, получим $c-2b=-4$, или $c=2b-4$. Поэтому первое уравнение принимает вид $x^2+bx+2b-4=0$. Его корни, как легко убедиться, — числа -2 и $2-b$, т. е. целые неположительные числа.

10.3. Ответ: нет. Обозначим $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$, $m_b=BB_1$, $m_c=CC_1$.



Пусть $r(CBB_1)$, $r(BMC_1)$ — радиусы вписанных окружностей треугольников ABB_1, BMC, CBB_1, BMC_1, соответственно, а $S(CBB_1)$, $S(BMC_1)$ — площади этих треугольников. Пусть также $S(ABC)$ — площадь треугольника ABC. Легко видеть, что

$$S(CBB_1)=\frac{1}{2}S(ABC), \quad S(BMC_1)=\frac{1}{6}S(ABC). \qquad (1)$$

Кроме того,

$$S(CBB_1) = \frac{1}{2} r(CBB_1)(a + \frac{1}{2}b + m_b), \quad S(BMC_1) = \frac{1}{2} r(BMC_1)(\frac{1}{2}c + \frac{2}{3}m_b + \frac{1}{3}m_c). \qquad (2)$$

Поэтому в силу (1) и (2) равенство $r(BB_1) = r(BMC_1)$ равносильно равенству

$$2(a + \frac{1}{2}b + m_b) = 6(\frac{1}{2}c + \frac{2}{3}m_b + \frac{1}{3}m_c) \iff m_b + m_c + \frac{3}{2}c = a + \frac{1}{2}b. \qquad (3)$$

Однако, из неравенства треугольника следует, что

$$\frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c = BM + MC > BC = a$$

$$\frac{1}{2}c + \frac{1}{3}m_c + \frac{1}{3}m_b = AC_1 + C_1M + MB_1 > AB_1 = \frac{1}{2}b.$$

Следовательно, равенство (3) невозможно, а, значит, невозможно и равенство $r(BB_1C) = r(BMC_1)$.

10.4. Пусть на рёбрах треугольной пирамиды $OABC$ записаны числа a, b, c, d, e, f так, как показано на рис. 1.

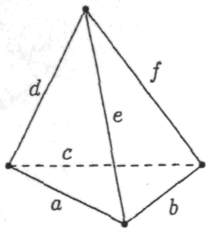


Рис. 1

Докажем, что каждое из утверждений **а)** и **б)** равносильно утверждению:

в) если два ребра не имеют общей точки (т. е. являются скрещивающимися), то на них записаны одинаковые числа.

Докажем вначале, что если утверждение **а)** верно, то верно и утверждение **в)**. Действительно, рассмотрим какие-либо два скрещивающихся ребра — например, AB и OC. Тогда сумма чисел, которые записаны на рёбрах, выходящих из вершины B, равна $a+e+b$, а выходящих из вершины O — равна $d+e+f$. Так как утверждение **а)** верно, то эти суммы равны, т. е. $a+e+b = d+e+f$, или

$$a + b = d + f. \qquad (1)$$

Точно так же, сумма чисел, которые записаны на отрезках, выходящих из точки A, равна $a + c + d$, а выходящих из точки C — равна $b + c + f$. Так как утверждение **а)** верно, то эти суммы равны, т. е. $a + c + d = b + c + f$, или

$$a + d = b + f. \qquad (2)$$

Сложив почленно равенства (1) и (2), получим $2a + b + d = b + d + 2f$, или $a = f$, т. е. около отрезков AB и OC записаны одни и те же числа.

Точно так же получаем, что одни и те же числа записаны около отрезков BC и OA и что одни и те же числа записаны около отрезков AC и OB. Пусть около отрезков AB и OC записано по числу a, около отрезков BC и OA — по числу b, и около отрезков AC и OB — по числу c (см. рис. 2). Импликация **а)** $\Longrightarrow$ **в)** доказана. Обратная импликация **в)** $\Longrightarrow$ **а)** очевидно вытекает из рис. 2. Следовательно, утверждения **а)** и **в)** равносильны.

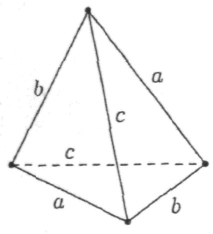


Рис. 2

Докажем теперь, что если утверждение **б)** верно, то верно и утверждение **в)**. Покажем, например, что на рёбрах AB и OC записаны одинаковые числа. Действительно, рассмотрим грани ABC и OAC

тетраэдра (см. рис. 1). Сумма чисел, стоящих на рёбрах грани AB, равна $a+b+c$, а стоящих на грани OAC — равна $d+f+c$. Так как утверждение **б)** верно, то эти суммы равны: $a+b+c=d+f+c$, или $a+b=d+f$, т. е. имеет место равенство (1). Рассмотрим две другие грани OAB и OBC тетраэдра (см. рис. 1). Сумма чисел, стоящих на рёбрах грани OAB, равна $a+d+e$, а стоящих на грани OBC — равна $b+e+f$. Так как утверждение **б)** верно, то эти суммы равны: $a+d+e=b+e+f$, или $a+d=b+f$, т. е. имеет место равенство (2). Сложив почленно равенства (1) и (2), получим $2a+b+d=b+d+2f$, или $a=f$, т. е. около отрезков AB и OC записаны одни и те же числа. Точно так же получаем, что одни и те же числа записаны около отрезков BC и OA и что одни и те же числа записаны около отрезков AC и OB, т. е. числа записаны так, как показано на рис. 2. Импликация **б)** $\Longrightarrow$ **в)** доказана. Обратная импликация **в)** $\Longrightarrow$ **б)** очевидно вытекает из рис. 2. Следовательно, утверждения **б)** и **в)** равносильны.

Поскольку, как доказано, утверждения **а)** и **б)** порознь равносильны утверждению **в)**, то утверждения **а)** и **б)** равносильны.

11 класс

11.1. Пусть эти числа: x, y, z и t. Тогда по условию

$$x+y+z+t=22, \quad xy+xz+xt+yz+yt+zt=105, \quad xyzt=64.$$

Так как все числа $x,\ y,\ z,\ t>0$, то $x=a^2$, $y=b^2$, $z=c^2$, $t=d^2$ для некоторых действительных чисел a, b, c, d. Нужно показать, что одно из них равно сумме трех остальных, т. е., что равносильно, $A=(a+b+c-d)(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)=0$. Имеем:

$$A=((b+c)+(a-d))\cdot((b+c)-(a-d))\cdot((a+d)-(b-c))\cdot((a+d)+(b-c))=$$
$$=((b+c)^2-(a-d)^2)\cdot((a+d)^2)-(b-c)^2)=$$
$$=((2bc+2ad)+(b^2+c^2-a^2-d^2))\cdot((2bc+2ad)-(b^2+c^2-a^2-d^2))=$$
$$=2(a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2)-(a^4+b^4+c^4+d^4)+8abcd=$$
$$=4(a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2)-(a^2+b^2+c^2+d^2)^2+8abcd=4B-C^2+8D,$$

где $B=a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2=xy+xz+xt+yz+yt+zt=105$, $C=a^2+b^2+c^2+d^2=x+y+z+t=22$, $D=abcd=\sqrt{xyzt}=\sqrt{64}=8$. В результате, $A=4\cdot105-22^2+8\cdot8=420-484+64=0$, что и требовалось доказать.

11.2. Ответ: $a\in(-2,2]$.

Пусть $a\in\mathbb{R}$ таково, что для него существует функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для которой равенство

$$f(x)+axf(1-x)=x^2-2x. \tag{1}$$

выполнено при всех $x\in\mathbb{R}$. Поскольку равенство (1) выполнено при всех $x\in\mathbb{R}$, то, заменив в (1) x на $1-x$, получим равенство, также выполненное при всех $x\in\mathbb{R}$, т. е.

$$f(1-x)+a(1-x)f(x)=(1-x)^2-2(1-x) \tag{2}$$

при всех $x\in\mathbb{R}$. Рассмотрим равенства (1) и (2) как систему линейных уравнений относительно $f(x)$ и $f(1-x)$ и решим её относительно $f(x)$. Умножив уравнение (2) на $-ax$ почленно сложив полученное уравнение с уравнением (1), придём после очевидных преобразований к равенству

$$(a^2x^2-a^2x+1)f(x)=-x(ax^2-x+2-a), \tag{3}$$

верному при всех $x \in \mathbb{R}$.

Если квадратный трёхчлен $a^2x^2 - a^2x + 1$ не имеет действительных корней, т. е. если

$$a \neq 0 \quad \text{и} \quad a^4 - 4a^2 < 0, \tag{4}$$

то из (3) находим, что

$$f(x) = -\frac{x(ax^2 - x + 2 - a)}{a^2x^2 - a^2x + 1} \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

С другой стороны, несложно убедиться, что функция (5), определённая при выполнении условия (4) при всех $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяет уравнению (1). Обстоятельством, облегчающим такую проверку, является то, что знаменатель дроби в (5) не меняется при замене x на $1 - x$. Следовательно, так как условия (4) равносильны включению $x \in (-2, 0) \bigcup (0, 2)$ и очевидно, что при $a = 0$ решением уравнения (1) является функция $f(x) = x^2 - 2x$, то при $a \in (-2, 2)$ функциональное уравнение (1) имеет решения, определённые при всех $x \in \mathbb{R}$.

Докажем теперь, что при $a \notin [-2, 2]$ равенство (3) не может быть выполнено при всех $x \in \mathbb{R}$. Для этого докажем вначале, что при $a \notin [-2, 2]$ многочлен-сомножитель $a^2x^2 - a^2x + 1$ в левой части равенства (3) имеет корень, не являющийся корнем правой части равенства (3). В самом деле, так как при $a \notin [-2, 2]$ квадратный трёхчлен $a^2x^2 - a^2x + 1$ имеет корни и оба они очевидно ненулевые, то если бы оба корня были и корнями многочлена $-x(ax^2 - x + 2 - a)$ — правой части равенства (3) — то оба эти корня были бы корнями квадратного трёхчлена $ax^2 - x + 2 - a$, а значит, квадратные трёхчлены $a^2x^2 - a^2x + 1$ и $ax^2 - x + 2 - a$ отличались бы только вещественным множителем, т. е. отношения их коэффициентов при одинаковых степенях были бы равны. В частности, выполнялось бы равенство $\dfrac{a^2}{a} = \dfrac{-a^2}{-1}$, из которого находим $a = 1$, что невозможно, поскольку $a \notin [-2, 2]$. Следовательно, если x_a — корень трёхчлена $a^2x^2 - a^2x + 1$, не являющийся корнем правой части (3), то при $x = x_a$ левая часть (3) равна нулю, а правая нет. Поэтому при $a \notin [-2, 2]$ равенство (3) не может быть выполнено при всех $x \in \mathbb{R}$. $a = 2 \quad f(x) = -\frac{x^2}{2x-1} \quad x \neq 1/2 \quad f(1/2) = -3/8 \; ; \; a = -2 \quad f(x) \nexists \Rightarrow \varnothing$

11.3. Обозначим $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $m_b = BB_1$, $m_c = CC_1$. Пусть $r(ABB_1)$, $r(BMC)$, $r(CBB_1)$, $r(BMC_1)$ — радиусы вписанных окружностей треугольников ABB_1, BMC, CBB_1, BMC_1, соответственно, а $S(ABB_1)$, $S(BMC)$, $S(CBB_1)$, $S(BMC_1)$ — площади этих треугольников. Пусть также $S(ABC)$ — площадь треугольника ABC. Легко видеть, что

$$S(ABB_1) = \frac{1}{2}S(ABC), \quad S(BMC) = \frac{1}{3}S(ABC), \tag{1}$$

$$S(CBB_1) = \frac{1}{2}S(ABC), \quad S(BMC_1) = \frac{1}{6}S(ABC). \tag{2}$$

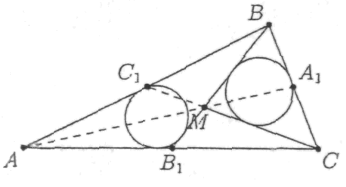


Рис. 1

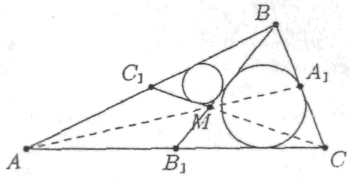


Рис. 2

Кроме того,

$$S(ABB_1) = \frac{1}{2}r(ABB_1)(c + \frac{1}{2}b + m_b), \quad S(BMC) = \frac{1}{2}r(BMC)(a + \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c), \tag{3}$$

$$S(CBB_1) = \frac{1}{2} r(CBB_1)(a + \frac{1}{2}b + m_b), \quad S(BMC_1) = \frac{1}{2} r(BMC_1)(\frac{1}{2}c + \frac{2}{3}m_b + \frac{1}{3}m_c). \qquad (4)$$

Поэтому в силу (1) и (3) равенство $r(ABB_1) = r(BMC)$ равносильно равенству

$$2(c + \frac{1}{2}b + m_b) = 3(a + \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c) \iff 2m_c = 2c + b - 3a. \qquad (5)$$

Аналогично, в силу (2) и (4) равенство $r(CBB_1) = 2r(BMC_1)$ равносильно равенству

$$2(a + \frac{1}{2}b + m_b) = 3(\frac{1}{2}c + \frac{2}{3}m_b + \frac{1}{3}m_c) \iff 2m_c = 4a + 2b - 3c. \qquad (6)$$

Используя формулу для вычисления длины медианы, получим, что (5) равносильно

$$2a^2 + 2b^2 - c^2 = 4m_c^2 = 4c^2 + b^2 + 9a^2 + 4bc - 12ac - 6ab \iff$$

$$7a^2 - b^2 + 5c^2 + 4bc - 12ac - 6ab = 0, \qquad (7)$$

при условии

$$2c + b - 3a > 0, \qquad (8)$$

а (6) равносильно

$$2a^2 + 2b^2 - c^2 = 4m_c^2 = 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 16ab - 24ac - 12bc \iff$$

$$7a^2 + b^2 + 5c^2 + 8ab - 12ac - 6bc = 0, \qquad (9)$$

при условии

$$4a + 2b - 3c > 0. \qquad (10)$$

Для завершения доказательства утверждения задачи нам осталось показать, что условия (7), (8) равносильны условиям (9), (10). Для этого заметим, что, если (5) и (6) равносильны, то $7a + b - 5c = 0$. Разложив левые части равенств (7) и (9) на множители, получим

$$7a^2 - b^2 + 5c^2 + 4bc - 12ac - 6ab = (7a + b - 5c)(a - b - c),$$

$$7a^2 + b^2 + 5c^2 + 8ab - 12ac - 6bc = (7a + b - 5c)(a + b - c).$$

Так как из неравенства треугольника следует, что $(a - b - c) \neq 0$ и $a + b - c) \neq 0$, то равенства (7) и (9) равносильны друг другу и равносильны равенству $7a + b - 5a = 0$. Но тогда из (8) следует (10), так как

$$2c + b - 3a > 0,\ 7a + b - 5c = 0 \implies 0 < (2c + b - 3a) + (7a + b - 5c) = 4a + 2b - 3c,$$

а из (10) следует (8), так как

$$4a + 2b - 3c > 0,\ 7a + b - 5c = 0 \implies 0 < (4a + 2b - 3c) - (7a + b - 5c) = 2c + b - 3a.$$

Таким образом, условия (7), (8) равносильны условиям (9), (10), что и требовалось доказать.

11.4. Ответ: наименьшее $r = -2$.

Допустим, что числа $1,\ 2,\ \ldots,\ 11$ и r расставлены на рёбрах куба так, как требуется в условии задачи. Через S обозначим сумму чисел на рёбрах, выходящих из произвольной вершины куба (согласно условию эта сумма одна и та же для каждой вершины).

Запишем в каждой вершине куба число, равное сумме чисел, стоящих на выходящих из неё рёбрах. Так как для каждой вершины куба это число равно S, то сумма чисел, записанных во всех восьми вершинах куба, равна $8S$. С другой стороны, как легко видеть, сумма $8S$ — это в точности такая сумма, в которой каждое число, стоящее на ребре, подсчитано дважды: для каждой из вершин ребра, на котором оно стоит. Поэтому

$$8S = 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 11 + r), \quad \text{или} \quad 66 + r = 4S. \qquad (*)$$

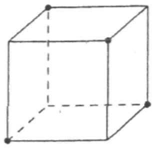


Рис. 1

К этому результату можно прийти и по-другому. Рассмотрим четыре вершины куба, обозначенные на рис. 1 жирными точками. Тогда, сумма чисел на рёбрах, выходящих из этих четырёх вершин, равна, с одной стороны, $4S$, а с другой, как легко видеть, она равна сумме всех чисел, стоящих на рёбрах куба, т. е.

$$4S = 1 + 2 + \ldots + 11 + r, \quad \text{или} \quad 66 + r = 4S.$$

Из равенства $(*)$ находим, что $r = 4S - 66 = 2(2S - 33)$, а так как S — целое, то r — целое чётное число. (*Можно утверждать даже больше:* r — чётное число, не делящееся нацело на 4, поскольку $r = 4(S - 17) + 2$, но этот факт нам не понадобится.)

Оценим теперь величину числа r снизу. Пусть число r стоит на ребре XY, а на остальных рёбрах, выходящих из вершин X и Y, стоят числа x_1, x_2, x_3 и x_4. Тогда сумма чисел, которые стоят на рёбрах, выходящих из вершины X, и рёбрах, выходящих из вершины Y, равна, с одной стороны, $2S$, а с другой — она равна $2r + x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, т. е. поскольку в силу второго равенства в $(*)$ $2S = 33 + \dfrac{r}{2}$, имеем равенство

$$33 + \frac{r}{2} = 2r + x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \quad \text{или} \quad \frac{3}{2}r = 33 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4). \qquad (**)$$

Но числа x_1, x_2, x_3 и x_4 — это какие-то попарно различные из чисел $1, 2, \ldots, 11$. Поэтому $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 8 + 9 + 10 + 11 = 38$. Тогда из второго равенства в $(**)$ получаем неравенство $\dfrac{3}{2}r \geqslant 33 - 38 = -5$, *а значит,* $r \geqslant -3\dfrac{1}{3}$. *Поскольку, как доказано выше, число* r *чётное, то* $r \geqslant -2$.

Остаётся на рёбрах куба расставить числа $1, 2, \ldots, 11$ и -2, так, чтобы выполнялось условие задачи — см. рис. 2, на котором для большего удобства расстановки чисел на рёбрах куба вместо привычной параллельной проекции куба, как на рис. 1, изображена его центральная проекция. Для расстановки чисел $1, 2, \ldots, 11$ и -2, удовлетворяющей условию задачи, необходимо вначале из равенства $(*)$ при $r = -2$ найти, что в этом случае $S = 16$. После этого нужную расстановку несложно получить при помощи простых соображений и небольшого перебора.

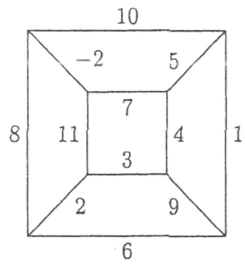


Рис. 2

LXII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

9 – 12 января 2012 года

Решения

Второй день

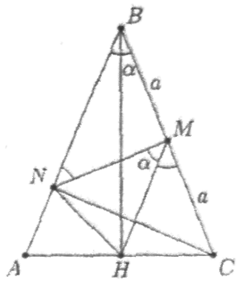
8 класс

8.5. Ответ: $a = 11$, $b = 2$.

Если $a = 0$ и $b = 0$, то левая часть данного равенства равна 0 и, значит, оно не верно. Если только одно из чисел a, b равно 0 (и соответствующая степень равна 1), то левая часть данного равенства равна нечетному числу и, тем самым, оно не может быть верным. Поэтому, если a и b удовлетворяют равенству $2^a - 6^b = 2012$, то $a \geqslant 1$ и $b \geqslant 1$. Значит, 2^a делится на 2 и 6^b делится на 2. Разделив на 2 обе части данного равенства получим $2^{a-1} - 3 \cdot 6^{b-1} = 1006$. Еще раз повторив такие же рассуждения, получим $2^{a-2} - 9 \cdot 6^{b-2} = 503$. Теперь, поскольку правая часть последнего равенства — нечетное число, либо $a - 2 = 0$, либо $b - 2 = 0$. При $a-2 = 0$ левая часть последнего равенства отрицательна и поэтому оно не может быть верным. При $b-2 = 0$ получаем $2^{a-2} - 9 \cdot 1 = 503$, т. е. $2^{a-2} = 512 = 2^9$, откуда $a = 9$. Таким образом, единственным решением данного уравнения являются $a = 11$, $b = 2$.

8.6. Ответ: 4 см.

Обозначим $\angle NMH = \angle ABC = \alpha$ и $BC = 2a$. Тогда, так как по условию M – середина BC, $BM = MC = a$. Поскольку треугольник BNC прямоугольный, а медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, то $NM = \frac{1}{2}BC = a$. Поэтому $\triangle NMB$ – равнобедренный ($NM = a$ и $BM = a$). Поэтому $\angle BNM = \angle NBM = \alpha$. Тогда внешний для $\triangle NMB$ угол $\angle NMC = \angle BNM + \angle NBM = 2\alpha$. Тогда $\angle HMC = \angle NMC - \angle NMH = 2\alpha - \alpha = \alpha$. Следовательно, $\triangle NMH = \triangle HMC$ (по двум равным сторонам и углу между ними). Поэтому $NH = HC$ и поскольку тогда $\triangle NHC$ – равнобедренный, то в нем $\angle HNC = \angle NCH$.



Тогда рассматривая прямоугольный треугольник $\triangle ANC$, получаем: $\angle NAH = \angle NAC = 90° - \angle ACN = 90° - \angle HNC = \angle ANH$. Поэтому $\triangle AHN$ – равнобедренный и, значит, $AH = HN = HC$. А так как $AH + HC = AC = 8$ см, то $AH = AC : 2 = 4$ см и тогда также $NH = 4$ см.

8.7. Ответ: а) нет, нельзя; б) да, можно.

а) Так как среди чисел от 1 до 99 нечетных чисел (50) больше, чем четных (49), то при любой расстановке этих чисел по кругу найдутся два нечетных числа, стоящих рядом. Сумма этих двух чисел будет составным числом, поскольку она будет четной, большей 2.

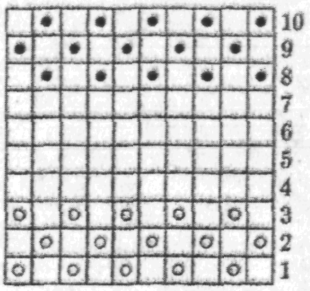
б) Расставим данные числа, например, следующим образом:

$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots\ 97,\ 99,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots\ 96,\ 98.$$

Здесь сначала стоят все нечетные числа в порядке возрастания, а затем — все четные в порядке возрастания. Последнее число 98 считается стоящим рядом с первым числом 1. Видим, что $|99 - 2| = 97$, $|98 - 1| = 97$, а модуль разности любых других соседних чисел при такой расстановке равен 2. Числа 2 и 97 – простые и, значит, построенный пример удовлетворяет условию пункта б).

8.8. Ответ : нет, нельзя.

Пронумеруем строчки доски снизу вверх числами от 1 до 10 (см. рис.) и будем называть уровнем шашки номер строчки, в которой данная шашка находится. Тогда в исходном



положении сумма уровней всех белых шашек равна $5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 30$, а сумма уровней всех черных шашек равна $5 \cdot 8 + 5 \cdot 9 + 5 \cdot 10 = 135$. Теперь заметим, что после каждого хода одной шашки ее уровень меняется ровно на 1, а тогда после хода двух белых шашек их суммарный уровень меняется ровно на 2 или вообще не меняется. Следовательно, сумма уровней всех белых шашек всегда будет такой же четности, как в исходном положении, т. е. всегда будет четной. Поэтому она никогда не сможет стать равной 135 и, значит, все белые шашки не могут занять в точности все те клетки, на которых в исходном положении находятся все черные шашки.

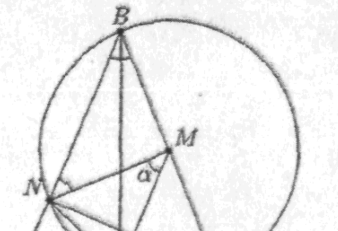
9 класс

9.5. Ответ : 4.

Покажем, что сумма S любых чисел, которые можно составить из цифр от 0 до 9, использовав каждую из них ровно по одному разу, делится на 9. Действительно, пусть A – одно из таких чисел, и пусть для определенности число $A = \overline{adcd}$ – 4-значное. Тогда $A = 1000a + 100b + 10c + d = 9(111a + 11b + c) + (a + b + c + d)$. Следовательно, число A имеет такой же остаток при делении на 9, как $(a + b + c + d)$ – сумма цифр этого числа. Аналогично, любое многозначное число (не только 4-значное) имеет такой же остаток при делении на 9, как и сумма его цифр. Поэтому, остаток при делении на 9 суммы S рассматриваемых чисел не измениться, если мы заменим каждое число в этой сумме суммой его цифр. Но в результате мы получим сумму всех цифр от 1 до 9, которая равна 45 и, значит, делится на 9. Следовательно, и сумма S исходных чисел также должна делиться на 9. Ближайшие к 2012 числа, кратные 9, это — числа 2007 и 2016. При этом $|2007 - 2012| = 5$, а $|2016 - 2012| = 4$. Поэтому $|S - 2012|$ не может быть меньше 4. С другой стороны, сумма $1978 + 23 + 4 + 5 + 6 = 2016$, причем все слагаемые состоят из всех девяти цифр от 1 до 9, использованных ровно по одному разу. Таким образом, S может равняться 2016 и, значит, $|S - 2012|$ может равняться 4.

9.6. Ответ : 9 см.

Обозначим $\angle NMH = \angle ABC = \alpha$. Построим окружность с центром в точке M



и диаметром BC. Так как согласно условию углы $\angle BNC$ и $\angle BHC$ – прямые и опираются на диаметр построенной окружности, их вершины — точки N и H — лежат на этой окружности. Поэтому, в частности, $NM = BM$ и, значит, треугольник $\triangle BMN$ – равнобедренный. Далее, поскольку четырехугольник $NBCH$ – вписанный в окружность, то $\angle NBC + \angle NHC = 180°$, откуда $\angle NBC = 180° - \angle NHC = \angle NHA = \alpha$. Тогда в равнобедренном треугольнике $\triangle BMN$ имеем: $\angle BNM = \angle NBM = \alpha$. Тогда $\angle BNM = \alpha = \angle NMH$ и, значит, $HM \| AB$. Следовательно, так как M – середина BC, MH – средняя линия треугольника $\triangle ABC$. Поэтому H – середина стороны AC. Тогда в прямоугольном треугольнике $\triangle ANC$ отрезок NH – медиана, проведенная к гипотенузе AC. Поэтому $AC = 2 \cdot NH = 2 \cdot 4{,}5 = 9$ см.

9.7. Ответ: **а)** да, можно; **б)** да, можно.

а) Расставим данные числа, например, следующим образом:

$$1,\ 100,\ 3,\ 98,\ 5,\ 96,\ \ldots\ 95,\ 6,\ 97,\ 4,\ 99,\ 2.$$

Здесь на нечетных местах стоят в порядке возрастания все нечетные числа, а на четных местах — в порядке убывания все четные числа. Последнее число 1 считается стоящим рядом с первым числом 2. Видим, что $1 + 2 = 3$, а суммы любых двух других соседних чисел равны либо 101, либо 103. Числа 3, 101 и 103 — простые и, значит, построенный пример удовлетворяет условию пункта а).

б) Расставим данные числа, например, следующим образом:

$$3,\ 5,\ 7,\ \ldots\ 97,\ 99,\ 2,\ 4,\ 1,\ 6,\ 8,\ \ldots\ 96,\ 98,\ 100.$$

Здесь сначала стоят в порядке возрастания все нечетные числа, начиная с 3, а затем стоят в порядке возрастания все четные числа, но между 4 и 6 стоит число 1. Последнее число 100 считается стоящим рядом с первым числом 3. Видим, что $|99-2| = 97$, $|4-1| = 3$, $|1-6| = 5$, $|100 - 3| = 97$, а модуль разности любых других соседних чисел при такой расстановке равен 2. Числа 2, 3, 5 и 97 — простые и, значит, построенный пример удовлетворяет условию пункта б).

9.8. Ответ: нет, нельзя.

Первое решение. Пронумеруем диагонали доски 7×8 с нижнего левого угла к верхнему правому углу числами от 1 до 14 (см. рис. 1) и будем называть уровнем фишки номер диагонали, на которой данная фишка находится. Тогда в исходном положении сумма уровней всех белых фишек равна $1+2\cdot 2+3\cdot 3+2\cdot 4+5 = 27$, а сумма уровней всех черных фишек равна $10+2\cdot 11+3\cdot 12+2\cdot 13+14 = 108$. Теперь заметим, что после каждого хода одной фишки ее уровень меняется ровно на 1, а тогда после хода двух белых фишек их суммарный уровень меняется ровно на 2 или вообще не меняется. Следовательно, сумма уровней всех белых фишек всегда будет такой же четности, как в исходном положении, т. е. всегда будет нечетной. Поэтому она никогда не сможет стать равной 108 и, значит, все белые фишки не могут занять в точности все те клетки, на которых в исходном положении находятся все черные фишки.

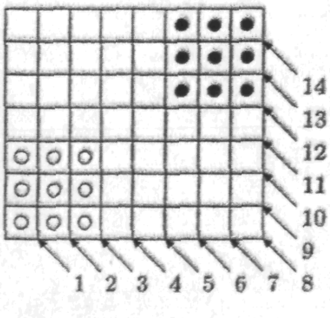


Рис. 1

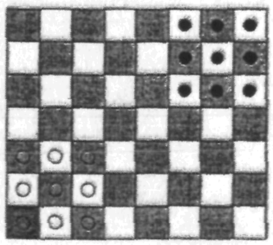


Рис. 2

Второе решение. Будем считать, что данная доска 7×8 окрашена в шахматном порядке так, что нижняя левая клетка — черная (см. рис. 2). Тогда в начальном положении 5 из девяти белых фишек находятся на черных клетках. После каждого хода каждая фишка, которая при этом перемещается на соседнюю клетку, меняет цвет клетки, на которую она становится. Поэтому, легко видеть, что после каждого хода, число белых фишек, находящихся на черных клетках, может измениться ровно на 2, либо вообще не измениться. Следовательно, после каждого хода число белых фишек на черных клетках — всегда нечетное. А число черных фишек на черных клетках в исходном положении — четное (оно равно 4). Следовательно, с помощью указанных ходов нельзя поменять местами все белые фишки со всеми черными.

10 класс

10.5. Докажем, что

$$1 \leqslant \frac{3+x-y}{1+x+z}. \qquad (1)$$

Действительно, это неравенство равносильно неравенству

$$1+x+z \leqslant 3+x-y \iff y+z \leqslant 2,$$

но последнее неравенство очевидно, так как по условию $y \leqslant 1$ и $z \leqslant 1$. Точно так же получаем, что верны неравенства

$$1 \leqslant \frac{3+y-z}{1+x+y} \quad и \quad 1 \leqslant \frac{3+z-x}{1+y+z}. \qquad (2)$$

Сложив почленно неравенства (1) и (2), получим левое из доказываемых неравенств.

Для доказательства правого неравенства достаточно заменить 1 в знаменателе дроби каждого из трёх слагаемых на не большее число — на y, z и x соответственно (от чего дробь, поскольку $x, y, z \in [0,1]$, может только увеличиться): :

$$\frac{3+x-y}{1+x+z}+\frac{3+y-z}{1+x+y}+\frac{3+z-x}{1+y+z} \leqslant \frac{3+x-y}{y+x+z}+\frac{3+y-z}{z+x+y}+\frac{3+z-x}{x+y+z}=$$

$$=\frac{(3+x-y)+(3+y-z)+(3+z-x)}{x+y+z}=\frac{9}{x+y+z}.$$

Неравенства доказаны.

10.6. Ответ: $t = 61$.

Так как числа p, q, r входят в систему

$$\begin{cases} s = 1+p+q+r, \\ t = pq+qr+rp, \\ t-s = 44. \end{cases} \qquad (*)$$

симметрично (т. е. система не изменяется при любой циклической перестановке переменных p, q, r между собой), то без нарушения общности рассуждений будем в дальнейшем считать, что выполнены неравенства

$$p \leqslant q \leqslant r. \qquad (**)$$

Если бы среди чисел p, q и r было нечётное количество нечётных чисел (т. е. нечётными были только одно или все три числа), то из первого уравнения в системе $(*)$ получили бы, что s — чётное число, не меньшее 4, т. е. в этом случае число s являлось бы составным, что противоречит условию. Значит, числа p, q, r либо 1) все чётны, либо 2) среди них только одно чётное число. Так как по условию числа p, q, r простые, а среди простых чисел имеется только одно чётное число (число 2) и это число — наименьшее простое число, то отсюда и из неравенств $(**)$ получаем, что условия 1) и 2) равносильны соответственно условиям: либо $p = q = r = 2$, либо $p = 2$ и $2 < q$.

Если $p = q = r = 2$, то из второго уравнения в $(*)$ находим $t = 12$ — число составное, что противоречит условию.

Следовательно, $p=2$ и $2<q\leqslant r$. Заменив в системе $(*)$ p на 2, получим систему

$$\begin{cases} s=3+q+r,\\ t=2q+qr+2r,\\ t-s=44. \end{cases} \qquad \left(\substack{*\\ **}\right)$$

Почленно вычитая из второго уравнения системы $\left(\substack{*\\ **}\right)$ первое её уравнение и учитывая третье уравнение, получим: $44=2q+qr+2r-3-q-r$, или $q+r+qr+1=48$, т. е.

$$(q+1)(r+1)=48. \qquad \left(\substack{**\\ **}\right)$$

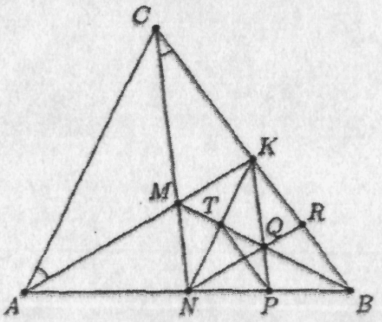
Поскольку натуральные числа q и r нечётны и $3\leqslant q\leqslant r$, то $q+1$ и $r+1$ — чётные числа, не меньшие 4, и $q+1\leqslant r+1$. Следовательно, равенство $\left(\substack{**\\ **}\right)$ возможно, только если

$$\begin{cases} q+1=4,\\ r+1=12 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} q+1=6,\\ r+1=8. \end{cases} \qquad \left(\substack{**\\ ***}\right)$$

Из первой системы в $\left(\substack{**\\ ***}\right)$ находим, что $q=3$ и $r=11$, тогда $s=3+3+11=17$ и $t=s+44=61$. В этом случае все числа являются простыми, а значит, $t=61$. Из второй системы в $\left(\substack{**\\ ***}\right)$ находим, что $q=5$ и $r=7$, но тогда $s=3+5+7=15$ — число составное.

Поэтому система уравнений, данная в условии, может выполняться только для простых чисел $p=2$, $q=3$, $r=11$, $s=17$ и $t=61$.

10.7. Заметим, что так как KN — средняя линия треугольника ABC, то $KN \parallel AC$, тогда



$$\angle AKN = \angle CAK. \qquad (1)$$

Поскольку KP – средняя линия треугольника CBN, то $KP \parallel CN$, тогда

$$\angle BKP = \angle BCN. \qquad (2)$$

Так как AK и CN медианы треугольника ABC, то отрезок BM *лежит на медиане этого треугольника*, проведенной из вершины B. Поэтому, в виду параллельности NK и AC, T – середина NK. Тогда TP – средняя линия треугольника NKB, откуда $TP \parallel BK$, и, следовательно,

$$\angle TPK = \angle BKP. \qquad (3)$$

Аналогично, так как BT и KP медианы треугольника NKB, то NR – медиана этого треугольника, т.е. R – середина KB. Поэтому NR средняя линия треугольника ABK, откуда $NR \parallel AK$, и, следовательно,

$$\angle KNQ = \angle AKN. \qquad (4)$$

По условию $\angle CAK = \angle BCN$, поэтому из (1) – (4) следует, что $\angle KNQ = \angle QPT$, что и влечет вписанность четырехугольника $NTQP$, поскольку углы TNQ и QPT опираются на один и тот же отрезок TQ и их вершины N и P лежат в одной полуплоскости от прямой, содержащей этот отрезок.

10.8. Рассмотрим любой круговой маршрут $\ell = \ell_1 \cup \ell_2$, связывающий города A и B. Он состоит из двух простых маршрутов ℓ_1 и ℓ_2, связывающих эти города (рис. 1). Если город C принадлежит этому маршруту ℓ, скажем, его части ℓ_1, то маршрут $A\ell_2BC$ — искомый (рис. 2).

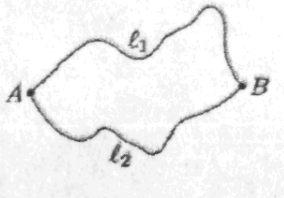


Рис. 1

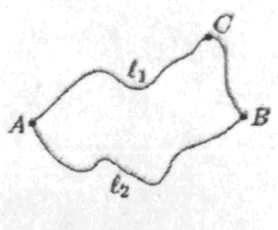


Рис. 2

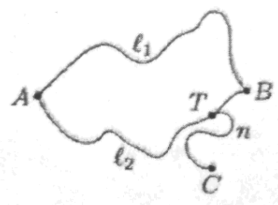


Рис. 3

Пусть C не принадлежит маршруту ℓ. Закроем проезд через город A. Из условия следует, что тем не менее, найдется простой (не круговой) маршрут n, связывающий C с B (если бы такого маршрута не существовало, то не нашлось бы кругового маршрута для городов C и B). Пусть T – самый первый, считая от C, город маршрута n, входящий в круговой маршрут ℓ, скажем, в его части ℓ_2 (рис. 3) (не исключается возможность, что $T = B$). Тогда маршрут $A\ell_1 BTC$ – искомый: он соединяет A с C, посещая B и проходя через каждый город и по каждой дороге не более одного раза.

Замечание 1. Как уже отмечалось, если закрыть любой город, то из любого оставшегося города можно добраться в любой другой оставшийся город. Поэтому для этой задачи годится также решение задачи 11.8.

Замечание 2. На первый взгляд, эта задача вроде бы не сложная. Действительно, из условия существует путь (даже два) m, соединяющий A и B, существует путь n, соединяющий B и C. Тогда есть путь $AmBnC$, соединяющий A и C. В этом "доказательстве" отсутствует главное — гарантия того, что получившийся путь не проходит дважды по городам и дорогам.

11 класс

11.5. Во-первых, заметим, что в силу неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом для трех чисел имеем

$$6 \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \quad \Longrightarrow \quad 8 \geqslant \frac{1}{abc} \quad \Longrightarrow \quad 8abc \geqslant 1. \qquad (1)$$

Во-вторых, опять в силу неравенств о среднем арифметическом и среднем геометрическом для трех и двух чисел имеем

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \geqslant 3\sqrt[3]{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geqslant$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\sqrt{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}}} \geqslant 3\sqrt[3]{\sqrt{8abc}} \overset{(1)}{\geqslant} 3\sqrt[3]{\sqrt{1}} = 3,$$

что и требовалось доказать.

11.6. Так как искомые числа должны удовлетворять равенству

$$p^6 + 24 = q^4 + r^7, \qquad (1)$$

то легко видеть, что все они не могут быть нечетными. Следовательно, по крайней мере одно из них должно быть четным числом, т.е. должно равняться 2.

Пусть $p = 2$. Тогда (1) перепишется в виде $88 = q^4 + r^7$. Однако, $2^7 = 128 > 88 = q^4 + r^7 \geqslant r^7 \geqslant 2^7$, противоречие.

Пусть $q = 2$. Тогда (1) перепишется в виде $p^6 + 8 = r^7$.

Если $p = 3$, то $r^7 = 737$, что не так.

Если $p \neq 3$, то

$$p \equiv \pm 1\ (mod\, 3) \quad \Rightarrow \quad p^6 + 8 \equiv 0\ (mod\, 3) \quad \Rightarrow \quad r^7 \vdots 3 \quad \Rightarrow r = 3.$$

Тогда $p^6 = 2179$, что не так.

Таким образом, осталось рассмотреть лишь случай, когда $r = 2$. В этом случае (1) перепишется в виде $p^6 - q^4 = 104$.

Если ни одно из чисел p или q не равно 3, то

$$p \equiv \pm 1\ (mod\, 3), \quad q \equiv \pm 1\ (mod\, 3) \quad \Rightarrow \quad 104 = p^6 - q^4 \equiv 0\ (mod\, 3),$$

противоречие.

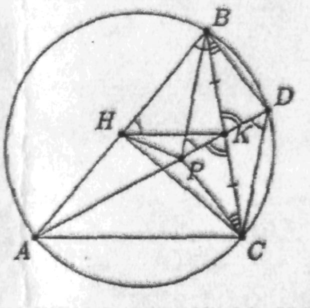
Значит, или $p = 3$, или $q = 3$.

Если $p = 3$, то $q^4 = 729 - 104 = 625$, откуда $q = 5$.

Если $q = 3$, то $p^6 = 81 + 104 = 185$, что не так.

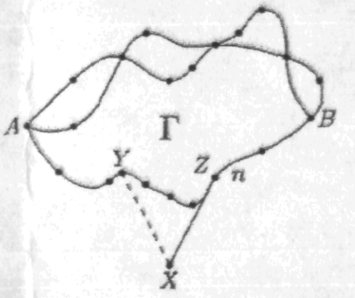
Окончательно, единственно возможный случай — $p = 3$, $q = 5$, $r = 2$.

11.7. *Первое решение.* Легко видеть, что, так как $BK = KC$ и $CP||BD$, то треугольники CPK и BDK равны по двум углам и стороне. Значит, $KD = KP$. Поскольку диагонали четырехугольника $BDCP$ точкой пересечения делятся пополам, то $BDCP$ – параллелограмм. Следовательно $BP \parallel DC$, и, значит $\angle KDC = \angle KPB$. Но $\angle KDC = \angle ADC = \angle ABC$, как углы, опирающуюся на одну дугу. Кроме того, $KH = KB$ (HK - медиана в прямоугольном треугольнике CHB), т.е. треугольник BKH равнобедренный и $\angle ABC = \angle HBK = \angle KHB$. Следовательно, $\angle KHB = \angle KPB$. Эти углы опираются на отрезок BK и их вершины лежат в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей этот отрезок. Следовательно, точки B, K, P, H лежат на одной окружности.



Второе решение. Легко видеть, что, так как $BK = KC$ и $CP||BD$, то треугольники CPK и BDK равны по двум углам и стороне. Значит, $KD = KP$. Кроме того, $KH = BK = KC$ (HK - медиана в прямоугольном треугольнике CHB). Следовательно, $KH^2 = BK \cdot KC = AK \cdot KD = AK \cdot KP$, откуда получаем, что $\dfrac{KA}{KH} = \dfrac{KH}{KP}$. Тогда из того, что треугольники AHK и HPK имеют общий угол $\angle K$, заключаем, что эти треугольники подобные. Поэтому $\angle HPK = \angle AHK$. Итак, $\angle HPK = \angle AHK = \pi - \angle BHK = [HK = BK] = \pi - \angle HBK$. Значит, $\angle HPK + \angle HBK = \pi$, и четырехугольник $BKPH$ вписанный.

11.8. Рассмотрим все простые (не круговые) маршруты, соединяющие города A и C и не проходящие ни через какой город и ни по какой дороге более одного раза. Пусть Γ — множество всех городов, входящих в эти маршруты (Γ не пусто, так как, например, $A, C \in \Gamma$). Нужно доказать, что любой третий город B принадлежит одному из маршрутов, т.е. $B \in \Gamma$. Допустим, однако, что не любой город принадлежит Γ. Покажем тогда, что найдутся два города X и Z, которые непосредственно соединены дорогой, причем $X \notin \Gamma$, а $Z \in \Gamma$.



По условию, из любого города можно попасть в любой другой город. Рассмотрим все простые маршруты, соединяющие города не из Γ с городами из Γ; из всех таких маршрутов выберем маршрут с наименьшим числом дорог (или один из таких маршрутов). Пусть это маршрут $X...Z$, где $X \notin \Gamma$,

$Z \in \Gamma$. Этот маршрут и состоит из одной дороги. Если бы на этом маршруте нашелся еще город T ($X...T...Z$), то либо маршрут $X...T$ (в случае $T \in \Gamma$), либо маршрут $T...Z$ (в случае $T \notin \Gamma$) был бы короче.

Итак, существуют два города X и Z, такие, что $X \notin \Gamma$, $Z \in \Gamma$, и X и Z соединены дорогой.

Рассмотрим маршрут ℓ, соединяющий A и C и проходящий через город Z (такой маршрут существует, так как $Z \in \Gamma$). Закроем проезд через город Z. Тем не менее, по условию, найдется маршрут, соединяющий X и A. У этого маршрута с маршрутом ℓ есть общие города (например, A). Пусть Y — первый, считая от X, город этого маршрута, входящий в ℓ (возможно, $Y = A$). Тогда маршрут, составленный из путей ($A...Y$), ($Y...X$), XZ, ($Z...C$), соединяет A и C, и проходит через X, причем не проходит через города и по дорогам более одного раза. Но это противоречит тому, что $X \notin \Gamma$. Тем самым, доказано, что все города принадлежат рассматриваемым маршрутам из A в C, в том числе и город B.

Замечание. См. замечание 2 к задаче 10.8.