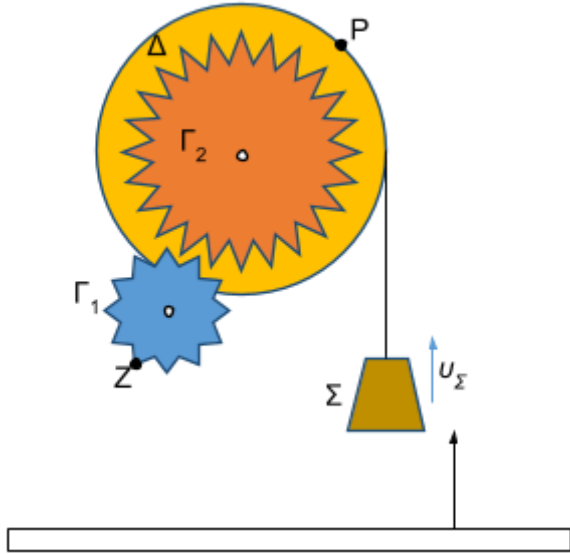


Εξαρτήματα μιας μηχανής συμπλέκονται

Το κινητήριο γρανάζι Γ_1 μιας μηχανής, μπορεί να συμπλέκεται και να οδηγεί το γρανάζι Γ_2 , που είναι κολλημένο στον ομοαξονικό δίσκο Δ , ο οποίος φέρει στην περιφέρειά του λεπτό αυλάκι. Τα 3 στερεά έχουν ακτίνες $R_1 = 12\text{cm}$, $R_2 = 36\text{cm}$, $R_\Delta = 50\text{cm}$ αντίστοιχα και μπορούν να στρέφονται χωρίς τριβές, περί σταθερούς οριζόντιους άξονες, που διέρχονται από τα κέντρα τους. Το σώμα Σ είναι δεμένο σε αβαρές μη εκτατό νήμα, που μπορεί να τυλίγεται χωρίς να γλιστράει στην περιφέρεια του δίσκου Δ και ηρεμεί στο οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0\text{s}$, θέτουμε σε λειτουργία τη μηχανή και κάποια χρονική t_1 , το σώμα Σ έχει ταχύτητα μέτρου $v_\Sigma = 3\text{m/s}$, έχοντας μετατοπιστεί κατά $y_\Sigma = 60\text{cm}$, ανερχόμενο με σταθερή επιτάχυνση.



- i) α) Υπολογίστε τη χρονική στιγμή t_1 ,
- β) Βρείτε το μέτρο και σχεδιάστε στο σχήμα την επιτάχυνση ενός σημείου P της περιφέρειας του δίσκου Δ και τη γωνιακή επιτάχυνση του γραναζιού Γ_2 .
- ii) Τη χρονική στιγμή t_1 , βρείτε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας και της γωνιακής επιτάχυνσης γραναζιού Γ_1 .
- iii) Αν το γρανάζι Γ_1 έχει 12 δόντια, πόσα δόντια έχει το γρανάζι Γ_2 ;

Απάντηση

i) α) Το σώμα ανέρχεται εκτελώντας ομαλά επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση, με τη βοήθεια του νήματος. Όταν ένα σημείο P της περιφέρειας του δίσκου, έρχεται σε επαφή με ένα σημείο του νήματος, προσδίδει σε αυτό το σημείο την ίδια ταχύτητα, αφού όπως είπαμε το νήμα δε γλιστράει. Αν πάρουμε τους ρυθμούς μεταβολής (παραγωγίσουμε), θα έχουμε:

$$v_P = v_\Sigma \Leftrightarrow \frac{dv_P}{dt} = \frac{dv_\Sigma}{dt} \Leftrightarrow \alpha_{\epsilon, P} = \alpha_\Sigma = \alpha, \text{ δηλαδή το σώμα } \Sigma \text{ έχει επιτάχυνση ίδιου μέτρου με την επιτρόχια επιτάχυνση του σημείου P.}$$

Αν α το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος Σ :

$$\left. \begin{aligned} v_\Sigma &= \alpha \cdot t_1 \\ y_\Sigma &= \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \frac{v_\Sigma}{y_\Sigma} = \frac{2}{t_1} \Leftrightarrow \frac{3}{0,6} = \frac{2}{t_1} \Leftrightarrow 3t_1 = 1,2 \Leftrightarrow t_1 = 0,4\text{s}$$

$$\alpha = \frac{v_\Sigma}{t_1} = \frac{3}{0,4} = 7,5\text{m/s}^2$$

β) Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε

Το σημείο P έχει:

Επιτρόχιο επιτάχυνση: $\alpha_{\varepsilon,P} = \alpha = 7,5 \text{ m/s}^2$

Κεντρομόλο επιτάχυνση:

$$\alpha_{\kappa,P} = \frac{v_P^2}{R_\Delta} \Leftrightarrow \alpha_{\kappa,P} = \frac{3^2}{0,5} \Leftrightarrow \alpha_{\kappa,P} = 18 \text{ m/s}^2$$

Άρα η επιτάχυνση του σημείου P θα έχει μέτρο

$$\alpha_P = \sqrt{\alpha_{\varepsilon,P}^2 + \alpha_{\kappa,P}^2} \Leftrightarrow \alpha_P = \sqrt{7,5^2 + 18^2} \Leftrightarrow$$

$$\alpha_P = 19,5 \text{ m/s}^2$$

Η γωνιακή επιτάχυνση του γραναζιού Γ_2 θα είναι ίδια με τη γωνιακή επιτάχυνση του ομοαξονικού δίσκου Δ , δηλαδή

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = \alpha_{\gamma\omega\nu,\Delta} = \frac{\alpha_{\varepsilon,P}}{R_\Delta} = \frac{7,5}{0,5} \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = 15 \text{ rad/s}^2$$

Τα διανύσματα έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα 1.

ii) Τη χρονική στιγμή t_I , η γωνιακή ταχύτητα του γραναζιού Γ_2 είναι ίδια με τη γωνιακή

ταχύτητα του δίσκου Δ , δηλαδή

$$\omega_2 = \omega_P = \frac{v_P}{R_\Delta} = \frac{v_\Sigma}{R_\Delta} = \frac{3}{0,5} \Leftrightarrow \omega_2 = 6 \text{ rad/s}$$

Τα δόντια στα γρανάζια Γ_1 και Γ_2 πρέπει να έχουν κάθε στιγμή την ίδια γραμμική ταχύτητα:

$$v_I = v_2 \Leftrightarrow \omega_I R_I = \omega_2 R_2 \Leftrightarrow \omega_I = \frac{R_2}{R_I} \omega_2 \Leftrightarrow \omega_I = \frac{36}{12} \cdot 6 \Leftrightarrow \omega_I = 18 \text{ rad/s}$$

Τότε όμως η γωνιακή επιτάχυνση του Γ_1 , θα είναι

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_I - 0}{t_I - 0} = \frac{18}{0,4} \Leftrightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,1} = 45 \text{ rad/s}^2$$

Το ίδιο θα βρούμε αν παραγωγίσουμε τη σχέση

$$\omega_I = \frac{R_2}{R_I} \omega_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\omega_I}{dt} = \frac{R_2}{R_I} \frac{d\omega_2}{dt} \Leftrightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,1} = \frac{R_2}{R_I} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu,2} \Leftrightarrow$$

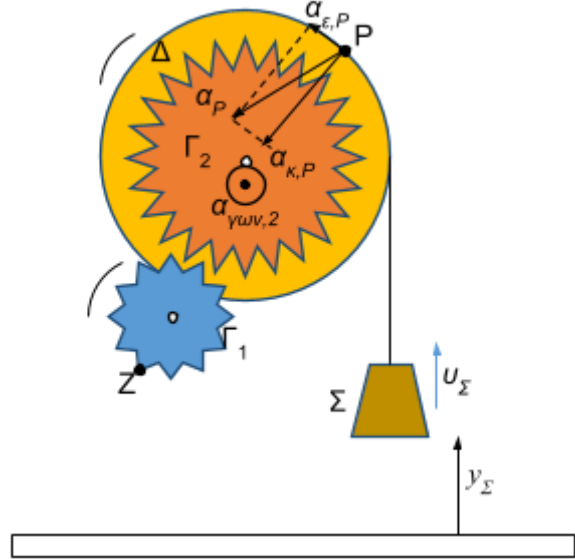
$$\alpha_{\gamma\omega\nu,1} = \frac{36}{12} \cdot 15 \Leftrightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,1} = 45 \text{ rad/s}^2$$

iii) Αν $\Delta\theta_I$ η επίκεντρη γωνία που ορίζεται από το κέντρο του γραναζιού Γ_1 και 2 διαδοχικά

δόντια (σχήμα 2),

$$N_I \cdot \Delta\theta_I = 2\pi \Leftrightarrow \Delta\theta_I = \frac{2\pi}{N_I} \quad (1)$$

σχήμα 1



Αν $\Delta\theta_2$ η επίκεντρη γωνία που ορίζεται από το κέντρο του γραναζιού Γ_2 και 2 διαδοχικά δόντια,

$$N_2 \cdot \Delta\theta_2 = 2\pi \Leftrightarrow \Delta\theta_2 = \frac{2\pi}{N_2} \quad (2)$$

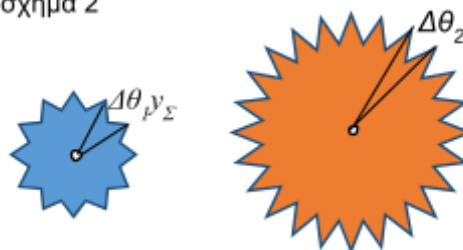
Αν για τη διαγραφή των γωνιών $\Delta\theta_1$ και $\Delta\theta_2$ απαιτείται χρονικό διάστημα Δt ,

$$\left. \begin{aligned} \Delta\theta_1 &= \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega v,1} \cdot \Delta t^2 \\ \Delta\theta_2 &= \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega v,2} \cdot \Delta t^2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2} = \frac{\alpha_{\gamma\omega v,1}}{\alpha_{\gamma\omega v,2}} \xrightarrow{(1),(2)}$$

$$\frac{\frac{2\pi}{N_1}}{\frac{2\pi}{N_2}} = \frac{\alpha_{\gamma\omega v,1}}{\alpha_{\gamma\omega v,2}} \Leftrightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{\alpha_{\gamma\omega v,1}}{\alpha_{\gamma\omega v,2}} \Leftrightarrow \frac{N_2}{12} = \frac{45}{15} \Leftrightarrow$$

$$N_2 = 36$$

σχήμα 2



Σχόλιο

Το πηλίκο του αριθμού των δοντιών με τη μορφή $\frac{N_1}{N_2}$, λέγεται σχέση μετάδοσης και δίνει το κλάσμα του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας που μεταφέρεται από το κινητήριο γρανάζι Γ_1 στο Γ_2 . Στην περίπτωσή μας η σχέση μετάδοσης είναι **0,33**.

Από τα τεχνικά χαρακτηριστικά της γνωστής μοτοσυκλέτας APRILIAPEGASO 650ie βλέπουμε:

Κιβώτιο Ταχυτήτων	5 Ταχύτητες.
	Σχέση μετάδοσης: 1η 12/33
	2η 16/28
	3η 16/21
	4η 22/23
	5η 24/21
Τελική μετάδοση	Αλυσίδα Σχέση μετάδοσης: 16/47

Μπορείτε επίσης να τρέξετε τη σχετική προσομοίωση [ΕΔΩ](#).

Ανδρέας Ριζόπουλος