Produit scalaire dans le plan

I. Produit scalaire de deux vecteurs

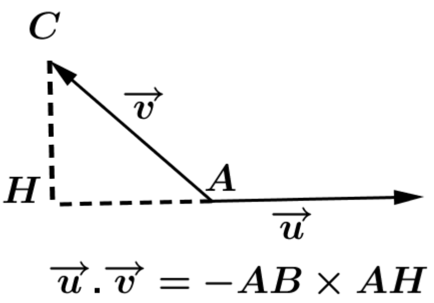
Définition:

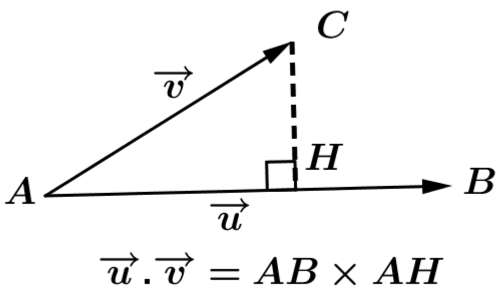
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et $A, B\ et\ C$ trois points du plan tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Le ***produit scalaire*** des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, est le ***nombre réel*** défini comme suit :

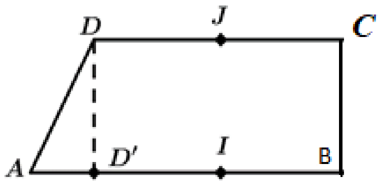
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens, alors : $\vec{u}.\vec{v} = AB \times AH$.
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont des sens contraires, alors : $\vec{u}.\vec{v} = -AB \times AH$.





Application ①:

Soit $ABCD$ un trapèze rectangle tel que: $AB = 6\ \ et\ CD = 5$ et soient I et J les milieux respectifs de $[AB]\ et\ [CD]$. (Voir la figure).



Calculer les produits scalaires suivants :

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CJ}$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IJ}$
- $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{ID}$

Propriété **: *Formule trigonométrique du produit scalaire***

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\overline{\vec{u};\vec{v}})$.
- Soient $A, B\ et\ C$ trois points du plan, on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

Application ②:

1) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ dans les deux cas suivants :

❶ $\|\vec{u}\| = 1,\ \|\vec{v}\| = \sqrt{3},\ et\ \left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

❷ $\|\vec{u}\| = 2,\ \|\vec{v}\| = \frac{2}{\sqrt{2}},\ et\ (\overline{\vec{u};\vec{v}}) \equiv \frac{5\pi}{4}[2\pi]$.

2) Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 4$. Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.

3) Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $BC = 6$. Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$.

4) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Déterminer les mesures possibles de l'angle orienté $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)$

sachant que : $\|\vec{u}\| = 4,\ \|\vec{v}\| = \sqrt{2},\ et\ \vec{u}.\vec{v} = -2\sqrt{6}$.

Exercice :

ABC un triangle isocèle en A tels que $AB = 3$ et $BC = 3\sqrt{3}$.

1) Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.
2) En déduire $\widehat{ACB}$ et $\widehat{CAB}$.

II. *Propriétés du produit scalaire :*

Propriété **:**

Soient $\vec{u}, \vec{v}\ et\ \vec{w}$ trois vecteurs du plan et k un réel. On a :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ ($\vec{u}^2$ est appelé ***carré scalaire*** de $\vec{u}$)

Application ③:

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que : $\|\vec{u}\| = 2,\ \|\vec{v}\| = 3,\ et\ (\widehat{\vec{u};\vec{v}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Calculer $\vec{u}.\vec{v}, \vec{u}^2, \vec{v}^2\ et\ (2\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v})$.

Propriété **:**

Soient $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ deux vecteurs du plan. On a :

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
- $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.
- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.
- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(-\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.

Application ④:

1) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = 2,\ \|\vec{v}\| = 3,\ et\ (\widehat{\vec{u};\vec{v}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Calculer : $\vec{u}.\vec{v}\ \ et\ \ (2\vec{u} - 3\vec{v})^2$.

2) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = \sqrt{2},\ \|\vec{v}\| = 2,\ et\ \|\vec{u} + \vec{v}\| = 7$.

Calculer : $\vec{u}.\vec{v}\ \ et\ \ \|\vec{u} - \vec{v}\|$.

Propriété **:**

Soient $A, B\ et\ C$ trois points du plan, on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\right\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)\end{aligned}$$

Application ⑤:

1) Soient $A, B\ et\ C$ trois points du plan tels que : $AB = 1,\ AC = \sqrt{3}\ et\ BC = \sqrt{2}$.

Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}$.

2) Soit ABC un triangle rectangle en A. Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Propriété **:**

Soient $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ deux vecteurs du plan.
$\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont ***orthogonaux***, et on écrit $\vec{u} \perp \vec{v}$, si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Application ⑥:

Soient $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux du plan tels que : $\left\|\vec{u}\right\| = 4,\ et\ \left\|\vec{v}\right\| = 5$.

Déterminer le réel m sachant que : $\left(m\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = 13$.

Exercice :

ABC est un triangle $AB = 1$, $AC = \sqrt{2}$ et $\cos(\hat{A}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) Considérons D un point du plan défini par : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$.

a)- Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

b)- Conclure.

III. Théorème d'Al-Kachi

Soit ABC un triangle. On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$.

Donc : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Par conséquent : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

Théorème **: *Théorème d'Al-Kachi***

Soit ABC un triangle. On a :

- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\hat{A})$
- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos(\hat{C})$

- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos(\hat{B})$

Application ⑦:

1) ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 5$ et $\hat{A} = \frac{\pi}{4}$. Calculer BC .

2) MNP est un triangle tel que $MN = \sqrt{3}$, $NP = 2$ et $\hat{N} = \frac{5\pi}{6}$. Calculer MP .

IV. Théorème de la médiane

Soit ABM un triangle et I le milieu de $[AB]$.

Calculons $MA^2 + MB^2$ en fonction de MI et AB .

$$MA^2 + MB^2 = \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 = 2\,MI^2 + \tfrac{1}{2}AB^2$$

Théorème **: *théorème de la médiane***

Soit ABM un triangle et I le milieu de $[AB]$. On a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$.

Application ⑧:

ABM un triangle et I , J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[AM]$ et $[BM]$.

Sachant que : $AB = 4$, $AM = 3$ et $BM = 4$, calculer les distances MI , AK et BJ .

Exercice :

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $B\hat{A}D = \frac{\pi}{3}$ et $AD = 4$ et $CD = 6$ et soit O le milieu du segment $[AB]$.

1) Calculer les distances BD et AC .

2) Montrer que pour tout point M du plan que $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + 18$.

3) En déduire l'ensemble des points M du plan tel que $MA^2 + MB^2 = 24$.

V. Relations métriques dans un triangle rectangle

Propriété **:**

Soient ABC un triangle et H le projeté orthogonal de A sur (AB) et I le milieu de $[BC]$.

ABC est rectangle en ABC si et seulement si l'une des relations suivantes est vérifiée :

- ✔ $BC^2 = AC^2 + AB^2$.
- ✔ $AB^2 = BH \times BC$.
- ✔ $AH^2 = HB \times HC$.
- ✔ $AI = \frac{1}{2}BC$.

Application ⑨:

Soient ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC) et AB=3 , AC=4 .
Calculer les longueurs BC, HC, HB et AH

Exercice de synthèse :

Soit ABC un triangle tel que : $AB = 3$ et $AC = 1$ et $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{-1}{3}$.

1) Vérifier que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -1$.

2) Calculer la distance BC .

3) Soient I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AC]$.

a/- Calculer AI et BJ .

b/- Calculer $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$.

4) Soit E un point du plan tel que : $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$.

a/- Ecrire le vecteur $\overrightarrow{IE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b/- Montrer que les droites (AB) et (IE) sont perpendiculaires .