Простейшие типовые задачи с производной. Примеры решений

После изучения азов нахождения производной в статьях **Как найти производную? Примеры решений** и **Производная сложной функции** мы рассмотрим типовые задачи, связанные с нахождением производной. Желающие улучшить свои навыки дифференцирования также могут ознакомиться с уроком **Сложные производные. Логарифмическая производная**.

Помимо нового материала у вас есть возможность дополнительно «набить руку» на нахождении производных. Действительно, если речь пойдет о типовых задачах на производную, то, как минимум, во всех примерах нужно будет найти эту самую производную. Я постараюсь рассмотреть приёмы решения и хитрости, которые не встречались в других статьях.

Вот наше аппетитное меню:

- **Производная функции в точке**
- **Уравнение касательной к графику функции в точке**
- **Дифференциал функции одной переменной**
- **Вторая производная**

Повар на раздаче.

Производная функции в точке

Как найти производную функции в точке? Из формулировки следуют два очевидных пункта этого задания:

1) Необходимо найти производную.

2) Необходимо вычислить значение производной в заданной точке.

<u>Пример 1</u>

Вычислить производную функции $f(x)=x^3+3x^2-72x+90$ в точке $x=5$

Справка: *Следующие способы обозначения функции эквивалентны:*
$y=x^3+3x^2-72x+90$
$f(x)=x^3+3x^2-72x+90$
В некоторых заданиях бывает удобно обозначить функцию «игреком», а в некоторых через «эф от икс».

Сначала находим производную:

$$f'(x)=(x^3+3x^2-72x+90)'=3x^2+6x-72$$

Надеюсь, многие уже приноровились находить такие производные устно.

На втором шаге вычислим значение производной в точке $x=5$:

$$f'(5)=3\cdot 5^2+6\cdot 5-72=75+30-72=33$$

Готово.

Небольшой разминочный пример для самостоятельного решения:

Пример 2

Вычислить производную функции $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$ в точке $x=-4$

Найдем производную:

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x+2}\right)'=\frac{(x^2)'(x+2)-x^2(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{2x(x+2)-x^2}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{2x^2+4x-x^2}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$$

Вычислим значение функции в точке $x=-4$*:*

$$f'(-4)=\frac{(-4)^2+4\cdot(-4)}{(-4+2)^2}=\frac{16-16}{4}=\frac{0}{4}=0$$

Необходимость находить производную в точке возникает в следующих задачах: построение касательной к графику функции (следующий параграф), **исследование функции на экстремум**, **исследование функции на перегиб графика**, **полное исследование функции** и др.

Но рассматриваемое задание встречается в контрольных работах и само по себе. И, как правило, в таких случаях функцию дают достаточно сложную. В этой связи рассмотрим еще два примера.

Пример 3

Вычислить производную функции $f(x)=\frac{x^2 arctg5x}{2}-\frac{x}{10}+\frac{1}{50}arctg5x$ в точке $x=\frac{1}{5}$.

Сначала найдем производную:

$$f'(x)=\left(\frac{x^2 arctg5x}{2}-\frac{x}{10}+\frac{1}{50}arctg5x\right)'=\frac{1}{2}(x^2 arctg5x)'-\frac{1}{10}(x)'+\frac{1}{50}(arctg5x)'=$$

$$=\frac{1}{2}((x^2)'arctg5x+x^2(arctg5x)')-\frac{1}{10}+\frac{1}{50}\cdot\frac{1}{1+(5x)^2}\cdot(5x)'=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2xarctg5x+x^2\cdot\frac{5}{1+(5x)^2}\right)-\frac{1}{10}+\frac{5}{50(1+25x^2)}=$$

$$=xarctg5x+\frac{5x^2}{2(1+25x^2)}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10(1+25x^2)}=(*)$$

Производная, в принципе, найдена, и можно подставлять требуемое значение $x=\frac{1}{5}$. Но что-то делать это не сильно хочется. Выражение очень длинное, да и значение «икс» у нас дробное. Поэтому стараемся максимально упростить нашу производную. В данном случае попробуем привести к общему знаменателю три последних слагаемых:

$$(*) = x\,arctg5x + \frac{5x^2 \cdot 5 - (1+25x^2) + 1}{10(1+25x^2)} = x\,arctg5x + \frac{25x^2 - 1 - 25x^2 + 1}{10(1+25x^2)} =$$

$$= x\,arctg5x + \frac{0}{10(1+25x^2)} = x\,arctg5x + 0 = x\,arctg5x$$

Ну вот, совсем другое дело. Вычислим значение производной в точке $x = \frac{1}{5}$:

$$f'\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} arctg\left(5 \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} arctg1 = \frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{20}$$

В том случае, если Вам не понятно, как найдена производная, вернитесь к первым двум урокам темы. Если возникли трудности (недопонимание) с арктангенсом и его значениями, **обязательно** изучите методический материал **Графики и свойства элементарных функций** – самый последний параграф. Потому что арктангенсов на студенческий век ещё хватит.

Пример 4

Вычислить производную функции $f(x) = x\,arctg2x - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2)$ в точке $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Найдем производную:

$$f'(x) = \left(x\,arctg2x - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2)\right)' = (x\,arctg2x)' - \frac{1}{4}(\ln(1+4x^2))' =$$

$$= (x)'arctg2x + x(arctg2x)' - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+4x^2)} \cdot (1+4x^2)' =$$

$$= arctg2x + x \cdot \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot (2x)' - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+4x^2)} \cdot (0+8x) =$$

$$= arctg2x + \frac{2x}{1+(2x)^2} - \frac{2x}{(1+4x^2)} = arctg\,2x$$

Вычислим производную в заданной точке:

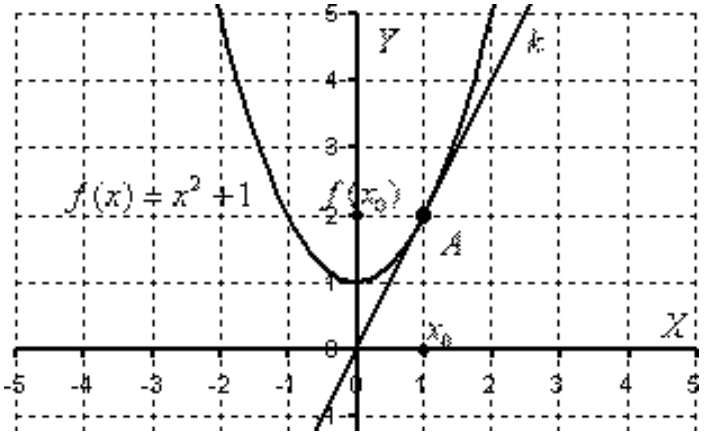
$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = arctg\left(2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -arctg(\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}.$$

Уравнение касательной к графику функции

Чтобы закрепить предыдущий параграф, рассмотрим задачу нахождения касательной к **графику функции** в данной точке. Это задание встречалось нам в школе, и оно же встречается в курсе высшей математики.

Рассмотрим «демонстрационный» простейший пример.

Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$. Я сразу приведу готовое графическое решение задачи (на практике этого делать в большинстве случаев не надо):



Строгое определение касательной даётся с помощью **определения производной функции**, но пока мы освоим техническую часть вопроса. Наверняка практически всем интуитивно понятно, что такое касательная. Если объяснять «на пальцах», то касательная к графику функции – это **прямая**, которая касается графика функции в **единственной** точке. При этом все близлежащие точки прямой расположены максимально близко к графику функции.

Применительно к нашему случаю: при $x_0 = 1$ касательная k (стандартное обозначение) касается графика функции в единственной точке A.

И наша задача состоит в том, чтобы найти уравнение прямой k.

Как составить уравнение касательной в точке с абсциссой x_0?

Общая формула знакома нам еще со школы:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Значение $x_0 = 1$ нам уже дано в условии.

Теперь нужно вычислить, чему равна **сама функция** в точке $x_0 = 1$:

$$f(x_0) = 1^2 + 1 = 2$$

На следующем этапе находим производную:

$$f'(x) = (x^2 + 1)' = 2x$$

Находим производную в точке (задание, которое мы недавно рассмотрели):

$$f'(x_0) = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

Подставляем значения $x_0 = 1$, $f(x_0) = 2$ и $f'(x_0) = 2$ в формулу $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$:

$$y - 2 = 2(x - 1)$$
$$y - 2 = 2x - 2$$

Таким образом, уравнение касательной:

$$k: y = 2x$$

Это «школьный» вид уравнения прямой с угловым коэффициентом. В высшей математике **уравнение прямой на плоскости** принято записывать в так называемой *общей форме* $Ax+By+C=0$, поэтому перепишем найденное уравнение касательной в соответствии с традицией:

$k: 2x-y=0$

Очевидно, что точка $(x_0; f(x_0))=(1;2)$ должна удовлетворять данному уравнению:

$2\cdot 1-2=0$

$0=0$ – верное равенство.

Следует отметить, что такая проверка является лишь частичной. Если мы неправильно вычислили производную в точке $f'(x_0)$, то выполненная подстановка нам ничем не поможет.

Рассмотрим еще два примера.

<u>Пример 5</u>

Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=e^{\frac{1}{2-x}}$ в точке с абсциссой $x_0=0$

Уравнение касательной составим по формуле $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

1) Вычислим значение функции в точке $x_0=0$:

$$f(x_0)=f(0)=e^{\frac{1}{2-0}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

2) Найдем производную. Дважды используем правило дифференцирования сложной функции:

$$f'(x)=\left(e^{\frac{1}{2-x}}\right)'=e^{\frac{1}{2-x}}\cdot\left(\frac{1}{2-x}\right)'=e^{\frac{1}{2-x}}\cdot((2-x)^{-1})'=$$

$$=-e^{\frac{1}{2-x}}\cdot(2-x)^{-2}\cdot(2-x)'=-\frac{e^{\frac{1}{2-x}}}{(2-x)^2}\cdot(0-1)=\frac{e^{\frac{1}{2-x}}}{(2-x)^2}$$

3) Вычислим значение производной в точке $x_0=0$:

$$f'(x_0)=f'(0)=\frac{e^{\frac{1}{2-0}}}{(2-0)^2}=\frac{\sqrt{e}}{4}$$

4) Подставим значения $x_0=0$, $f(x_0)=\sqrt{e}$ и $f'(x_0)=\frac{\sqrt{e}}{4}$ в формулу $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$:

$$y-\sqrt{e}=\frac{\sqrt{e}}{4}(x-0)$$
$$y-\sqrt{e}=\frac{\sqrt{e}}{4}x$$
$$4(y-\sqrt{e})=\sqrt{e}x$$
$$4y-4\sqrt{e}=\sqrt{e}x$$
$$k:\sqrt{e}x-4y+4\sqrt{e}=0$$

Готово.

Выполним частичную проверку:

Подставим точку $(x_0;f(x_0))=(0;\sqrt{e})$ в найденное уравнение:

$$\sqrt{e}\cdot 0-4\sqrt{e}+4\sqrt{e}=0$$

$0=0$ – верное равенство.

<u>Пример 6</u>

Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=-\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$ в точке с абсциссой $x_0=\frac{1}{2}$

Уравнение касательной составим по формуле $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

1) Вычислим значение функции в точке $x_0=\frac{1}{2}$*:*

$$f(x_0)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}}\right)^2=-\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2=-(-1)^2=-1$$

2) Найдем производную. Перед дифференцированием функцию выгодно упростить:

$$f(x)=-\left(\frac{x-1}{x}\right)^2=-\left(1-\frac{1}{x}\right)^2=-\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=-1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$$

$$f'(x)=\left(-1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)'=(-1)'+2(x^{-1})'-(x^{-2})'=0-2x^{-2}-(-2x^{-3})=-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}$$

3) Вычислим значение производной в точке $x_0=\frac{1}{2}$*:*

$$f'(x_0)=f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=-8+16=8$$

4) Подставим значения $x_0=\frac{1}{2}$, $f(x_0)=-1$ *и* $f'(x_0)=8$ *в формулу* $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$*:*

$$y-(-1)=8\left(x-\frac{1}{2}\right)$$
$$y+1=8x-4$$
$$k: 8x-y-5=0.$$

В задаче на нахождение уравнения касательной очень важно ВНИМАТЕЛЬНО и аккуратно выполнить вычисления, привести уравнение прямой к **общему виду**. И, конечно же, ознакомьтесь со **строгим определением касательной**, после чего закрепите материал на уроке **Уравнение нормали**, где есть дополнительные примеры с касательной.

Дифференциал функции одной переменной

С формально-технической точки зрения найти **дифференциал функции** – это «почти то же самое, что найти производную».

Производная функции чаще всего обозначается через y'.

Дифференциал функции стандартно обозначается через dy (так и читается – «дэ игрек»)

Дифференциал функции одной переменной записывается в следующем виде:

$$dy = y'dx$$

Другой вариант записи: $df(x) = f'(x)dx$

Простейшая задача: Найти дифференциал функции $y = 2x+3$

1) Первый этап. Найдем производную:

$$y' = (2x+3)' = 2$$

2) Второй этап. Запишем дифференциал:

$$dy = 2dx$$

Готово.

Дифференциал функции одной или нескольких переменных чаще всего используют для **приближенных вычислений**.

Помимо «комбинированных» задач с дифференциалом время от времени встречается и «чистое» задание на нахождение **дифференциала функции**:

Пример 7

Найти дифференциал функции $y = \sqrt[5]{\sin^4\left(\frac{x-3}{x}\right)}$

Перед тем, как находить производную или дифференциал, всегда целесообразно посмотреть, а нельзя ли как-нибудь упростить функцию (или запись функции) ещё **до** дифференцирования? Смотрим на наш пример. Во-первых, можно преобразовать корень:

$y=\sqrt[5]{\sin^4\left(\frac{x-3}{x}\right)}=\sin^{\frac{4}{5}}\left(\frac{x-3}{x}\right)$ (корень пятой степени относится именно к синусу).

Во-вторых, замечаем, что под синусом у нас дробь, которую, очевидно, предстоит дифференцировать. Формула дифференцирования дроби очень громоздка. Нельзя ли избавиться от дроби? В данном случае – можно, почленно разделим числитель на знаменатель:

$$y=\sqrt[5]{\sin^4\left(\frac{x-3}{x}\right)}=\sin^{\frac{4}{5}}\left(\frac{x-3}{x}\right)=\sin^{\frac{4}{5}}\left(1-\frac{3}{x}\right)$$

Функция сложная. В ней два вложения: под степень вложен синус, а под синус вложено выражение $\left(1-\frac{3}{x}\right)$. Найдем производную, используя правило дифференцирования сложной функции $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$ два раза:

$$y'=\left(\sin^{\frac{4}{5}}\left(1-\frac{3}{x}\right)\right)'=\frac{4}{5}\cdot\sin^{-\frac{1}{5}}\left(1-\frac{3}{x}\right)\cdot\left(\sin\left(1-\frac{3}{x}\right)\right)'=$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{\sin\left(1-\frac{3}{x}\right)}}\cdot\cos\left(1-\frac{3}{x}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{x}\right)'=\frac{4\cos\left(1-\frac{3}{x}\right)}{5\cdot\sqrt[5]{\sin\left(1-\frac{3}{x}\right)}}\cdot\left(0+\frac{3}{x^2}\right)=\frac{12\cos\left(1-\frac{3}{x}\right)}{5\cdot x^2\cdot\sqrt[5]{\sin\left(1-\frac{3}{x}\right)}}$$

Запишем дифференциал, при этом снова представим $\left(1-\frac{3}{x}\right)$ в первоначальном «красивом» виде:

$$dy=\frac{12\cos\left(\frac{x-3}{x}\right)dx}{5\cdot x^2\cdot\sqrt[5]{\sin\left(\frac{x-3}{x}\right)}}$$

Готово.

Когда производная представляет собой дробь, значок dx обычно «прилепляют» в самом конце числителя (можно и справа на уровне дробной черты).

<u>Пример 8</u>

Найти дифференциал функции $y=\sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt{x}+1}}$

Преобразуем функцию:

$$y=\sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt{x}+1}}=\frac{1}{\sqrt[5]{\sqrt{x}+1}}=(\sqrt{x}+1)^{-\frac{1}{5}}$$

Найдем производную:

$$y' = \left((\sqrt{x}+1)^{-\frac{1}{5}}\right)' = -\frac{1}{5}\cdot\left((\sqrt{x}+1)\right)^{-\frac{6}{5}}\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)' =$$

$$= -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{(\sqrt{x}+1)^6}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{10\sqrt{x}\cdot\sqrt[5]{(\sqrt{x}+1)^6}}$$

Запишем дифференциал:

$$dy = -\frac{dx}{10\sqrt{x}\cdot\sqrt[5]{(\sqrt{x}+1)^6}}.$$

Следующие два примера на нахождение **дифференциала в точке**:

Пример 9

Вычислить дифференциал функции $f(x) = \ln(x^2+\sqrt{x^4+1})$ в точке $x = 1$

Найдем производную:

$$f'(x) = \left(\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})\right)' = \frac{1}{x^2+\sqrt{x^4+1}}\cdot(x^2+\sqrt{x^4+1})' =$$

$$= \frac{1}{x^2+\sqrt{x^4+1}}\cdot\left(2x+\frac{1}{2\sqrt{x^4+1}}\cdot(x^4+1)'\right) = \frac{1}{x^2+\sqrt{x^4+1}}\cdot\left(2x+\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}}\right) = (*)$$

Опять, производная вроде бы найдена. Но в эту бодягу еще предстоит подставлять число, поэтому результат максимально упрощаем:

$$(*) = \frac{1}{x^2+\sqrt{x^4+1}}\cdot\left(2x+\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}\right) = \frac{2x}{x^2+\sqrt{x^4+1}}\cdot\left(1+\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}\right) =$$

$$= \frac{2x}{x^2+\sqrt{x^4+1}}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+1}+x^2}{\sqrt{x^4+1}}\right) = \frac{2x\cdot(\sqrt{x^4+1}+x^2)}{(x^2+\sqrt{x^4+1})\cdot\sqrt{x^4+1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^4+1}}$$

Труды были не напрасны, записываем дифференциал:

$$df(x) = \frac{2xdx}{\sqrt{x^4+1}}$$

Теперь вычислим дифференциал в точке $x = 1$:

$$df(1) = \frac{2\cdot 1\cdot dx}{\sqrt{1^4+1}} = \frac{2dx}{\sqrt{2}}$$

В значок дифференциала dx единицу подставлять не нужно, он немного из другой оперы.

Ну и хорошим тоном в математике считается устранение иррациональности в знаменателе. Для этого домножим числитель и знаменатель на $\sqrt{2}$. Окончательно:

$$df(1) = \frac{2\cdot\sqrt{2}dx}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}dx}{2} = \sqrt{2}dx$$

Пример 10

Вычислить дифференциал функции $f(x) = -\ln\left|\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right|$ в точке $x = \sqrt{2}$. В ходе решения производную максимально упростить.

Найдем производную:

$$f'(x)=\left(-\ln\left|\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right|\right)'=-\frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}\cdot(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})'=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}\cdot\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}}\right)=$$

$$=\frac{-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{2\cdot(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})\cdot\sqrt{(x-1)(x+1)}}=\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})}{2\cdot(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})\cdot\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$$

Запишем дифференциал:

$$df(x)=\frac{dx}{2\sqrt{x^2-1}}$$

Вычислим дифференциал в точке $x=\sqrt{2}$*:*

$$df(\sqrt{2})=\frac{dx}{2\sqrt{2-1}}=\frac{dx}{2}$$

Вторая производная

Всё очень просто. Вторая производная – это **производная от первой производной**: $(y')'$

Стандартные обозначения второй производной: y'', $f''(x)$ или $\frac{d^2y}{dx^2}$ (дробь читается так: «дэ два игрек по дэ икс квадрат»). Чаще всего вторую производную обозначают первыми двумя вариантами. Но третий вариант тоже встречается, причем, его очень любят включать в условия контрольных заданий, например: «Найдите $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции…». А студент сидит и битый час чешет репу, что это вообще такое.

Рассмотрим простейший пример. Найдем вторую производную от функции $y=2x-1$.

Для того чтобы найти вторую производную, как многие догадались, нужно сначала найти первую производную:

$$y'=(2x-1)'=2$$

Теперь находим вторую производную:

$$y''=(y')'=(2)'=0$$

Готово.

Рассмотрим более содержательные примеры.

<u>Пример 11</u>

Найти вторую производную функции $y=\sin^2\frac{x}{3}$

Найдем первую производную:

$$y'=\left(\sin^2\frac{x}{3}\right)'=2\sin\frac{x}{3}\left(\sin\frac{x}{3}\right)'=2\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)'=\frac{2}{3}\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}$$

На каждом шаге всегда смотрим, нельзя ли что-нибудь упростить? Сейчас нам предстоит дифференцировать произведение двух функций, и мы избавимся от этой неприятности, применив известную **тригонометрическую формулу** $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$. Точнее говоря, использовать формулу будем в обратном направлении: $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$:

$$y'=\frac{2}{3}\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{2x}{3}=\frac{1}{3}\sin\frac{2x}{3}$$

Находим вторую производную:

$$y''=(y')'=\left(\frac{1}{3}\sin\frac{2x}{3}\right)'=\frac{1}{3}\left(\sin\frac{2x}{3}\right)'=\frac{1}{3}\cos\frac{2x}{3}\cdot\left(\frac{2x}{3}\right)'=\frac{2}{9}\cos\frac{2x}{3}$$

Готово.

Можно было пойти другим путём – понизить степень функции еще перед дифференцированием, используя формулу $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$:

$$y=\sin^2\frac{x}{3}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2x}{3}\right)$$

Если интересно, возьмите первую и вторую производные снова. Результаты, естественно, совпадут.

Отмечу, что понижение степени бывает очень выгодно при нахождении **частных производных функции**. Здесь же оба способа решения будут примерно одинаковой длины и сложности.

Как и для первой производной, можно рассмотреть **задачу нахождения второй производной в точке**.

Например: Вычислим значение найденной второй производной в точке $x=\frac{\pi}{2}$:

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{9}\cos\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{9}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{9}$$

Необходимость находить вторую производную и вторую производную в точке возникает при исследовании графика функции на **выпуклость/вогнутость и перегибы**.

Пример 12

Найти вторую производную функции $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Найти $f''(0)$

Найдем первую производную:

$$f'(x)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\frac{(x)'\cdot\sqrt{x^2+1}-x\cdot(\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x}{x^2+1}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

Найдем вторую производную:

$$f''(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\right)'=((x^2+1)^{-\frac{3}{2}})'=-\frac{3}{2}(x^2+1)^{-\frac{5}{2}}\cdot(x^2+1)'=$$

$$=-\frac{3}{2\sqrt{(x^2+1)^5}}\cdot 2x=-\frac{3x}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$$

Вычислим: $$f''(0)=-\frac{3\cdot 0}{\sqrt{(0^2+1)^5}}=-\frac{0}{1}=0$$

Аналогично можно найти **третью производную**, а также **производные более высоких порядков**. Такие задания встречаются, но встречаются чуть реже.