

Простейшие типовые задачи с производной. Примеры решений

После изучения азов нахождения производной в статьях [Как найти производную?](#) [Примеры решений](#) и [Производная сложной функции](#) мы рассмотрим типовые задачи, связанные с нахождением производной. Желающие улучшить свои навыки дифференцирования также могут ознакомиться с уроком [Сложные производные. Логарифмическая производная.](#)

Помимо нового материала у вас есть возможность дополнительно «набить руку» на нахождении производных. Действительно, если речь пойдет о типовых задачах на производную, то, как минимум, во всех примерах нужно будет найти эту самую производную. Я постараюсь рассмотреть приёмы решения и хитрости, которые не встречались в других статьях.

Вот наше аппетитное меню:

- [Производная функции в точке](#)
- [Уравнение касательной к графику функции в точке](#)
- [Дифференциал функции одной переменной](#)
- [Вторая производная](#)

Повар на раздаче.

Производная функции в точке

Как найти производную функции в точке? Из формулировки следуют два очевидных пункта этого задания:

- 1) Необходимо найти производную.
- 2) Необходимо вычислить значение производной в заданной точке.

Пример 1

Вычислить производную функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ в точке $x = 5$

Справка: Следующие способы обозначения функции эквивалентны:

$$y = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$$

В некоторых заданиях бывает удобно обозначить функцию «игреком», а в некоторых через «эф от икс».

Сначала находим производную:

$$f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 72x + 90)' = 3x^2 + 6x - 72$$

Надеюсь, многие уже приновились находить такие производные устно.

На втором шаге вычислим значение производной в точке $x = 5$:

$$f'(5) = 3 \cdot 5^2 + 6 \cdot 5 - 72 = 75 + 30 - 72 = 33$$

Готово.

Небольшой разминочный пример для самостоятельного решения:

Пример 2

Вычислить производную функции $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ в точке $x = -4$

Найдем производную:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2}{x+2} \right)' = \frac{(x^2)'(x+2) - x^2(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \\ &= \frac{2x^2 + 4x - x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Вычислим значение функции в точке $x = -4$:

$$f'(-4) = \frac{(-4)^2 + 4 \cdot (-4)}{(-4+2)^2} = \frac{16 - 16}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

Необходимость находить производную в точке возникает в следующих задачах: построение касательной к графику функции (следующий параграф), [исследование функции на экстремум](#), [исследование функции на перегиб графика](#), [полное исследование функции](#) и др.

Но рассматриваемое задание встречается в контрольных работах и само по себе. И, как правило, в таких случаях функцию дают достаточно сложную. В этой связи рассмотрим еще два примера.

Пример 3

Вычислить производную функции $f(x) = \frac{x^2 \arctg 5x}{2} - \frac{x}{10} + \frac{1}{50} \arctg 5x$ в точке $x = \frac{1}{5}$.

Сначала найдем производную:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2 \arctg 5x}{2} - \frac{x}{10} + \frac{1}{50} \arctg 5x \right)' = \frac{1}{2} (x^2 \arctg 5x)' - \frac{1}{10} (x)' + \frac{1}{50} (\arctg 5x)' = \\ &= \frac{1}{2} ((x^2)' \arctg 5x + x^2 (\arctg 5x)') - \frac{1}{10} + \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{1+(5x)^2} \cdot (5x)' = \\ &= \frac{1}{2} \left(2x \arctg 5x + x^2 \cdot \frac{5}{1+(5x)^2} \right) - \frac{1}{10} + \frac{5}{50(1+25x^2)} = \\ &= x \arctg 5x + \frac{5x^2}{2(1+25x^2)} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10(1+25x^2)} = (*) \end{aligned}$$

Производная, в принципе, найдена, и можно подставлять требуемое значение $x = \frac{1}{5}$. Но что-то делать это не сильно хочется. Выражение очень длинное, да и значение «икс» у нас дробное. Поэтому стараемся максимально упростить нашу производную. В данном случае попробуем привести к общему знаменателю три последних слагаемых:

$$\begin{aligned}
 (*) &= x \operatorname{arctg} 5x + \frac{5x^2 \cdot 5 - (1 + 25x^2) + 1}{10(1 + 25x^2)} = x \operatorname{arctg} 5x + \frac{25x^2 - 1 - 25x^2 + 1}{10(1 + 25x^2)} = \\
 &= x \operatorname{arctg} 5x + \frac{0}{10(1 + 25x^2)} = x \operatorname{arctg} 5x + 0 = x \operatorname{arctg} 5x
 \end{aligned}$$

Ну вот, совсем другое дело. Вычислим значение производной в точке $x = \frac{1}{5}$:

$$f'\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} \operatorname{arctg}\left(5 \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} \operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{20}$$

В том случае, если Вам не понятно, как найдена производная, вернитесь к первым двум урокам темы. Если возникли трудности (недопонимание) с арктангенсом и его значениями, **обязательно** изучите методический материал [Графики и свойства элементарных функций](#) – самый последний параграф. Потому что арктангенсов на студенческий век ещё хватит.

Пример 4

Вычислить производную функции $f(x) = x \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} \ln(1 + 4x^2)$ в точке $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Найдем производную:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(x \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} \ln(1 + 4x^2) \right)' = (x \operatorname{arctg} 2x)' - \frac{1}{4} (\ln(1 + 4x^2))' = \\
 &= (x)' \operatorname{arctg} 2x + x (\operatorname{arctg} 2x)' - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1 + 4x^2)} \cdot (1 + 4x^2)' = \\
 &= \operatorname{arctg} 2x + x \cdot \frac{1}{1 + (2x)^2} \cdot (2x)' - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1 + 4x^2)} \cdot (0 + 8x) = \\
 &= \operatorname{arctg} 2x + \frac{2x}{1 + (2x)^2} - \frac{2x}{(1 + 4x^2)} = \operatorname{arctg} 2x
 \end{aligned}$$

Вычислим производную в заданной точке:

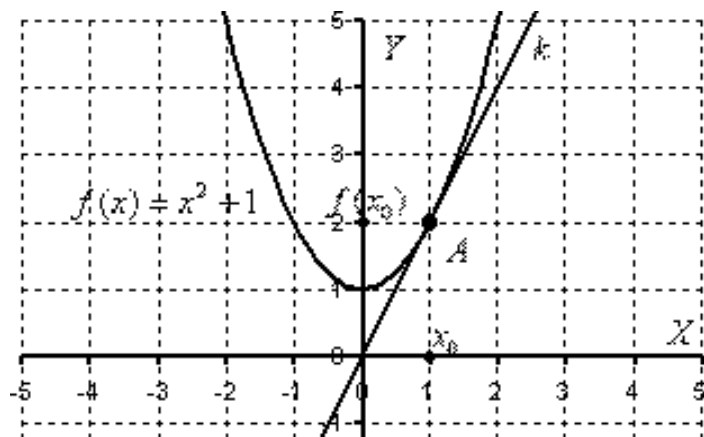
$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \operatorname{arctg}\left(2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

Уравнение касательной к графику функции

Чтобы закрепить предыдущий параграф, рассмотрим задачу нахождения касательной к [графику функции](#) в данной точке. Это задание встречалось нам в школе, и оно же встречается в курсе высшей математики.

Рассмотрим «демонстрационный» простейший пример.

Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$. Я сразу приведу готовое графическое решение задачи (на практике этого делать в большинстве случаев не надо):



Строгое определение касательной даётся с помощью **определения производной функции**, но пока мы освоим техническую часть вопроса. Наверняка практически всем интуитивно понятно, что такое касательная. Если объяснять «на пальцах», то касательная к графику функции – это **прямая**, которая касается графика функции в **единственной** точке. При этом все близлежащие точки прямой расположены максимально близко к графику функции.

Применительно к нашему случаю: при $x_0 = 1$ касательная k (стандартное обозначение) касается графика функции в единственной точке A .

И наша задача состоит в том, чтобы найти уравнение прямой k .

Как составить уравнение касательной в точке с абсциссой x_0 ?

Общая формула знакома нам еще со школы:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Значение $x_0 = 1$ нам уже дано в условии.

Теперь нужно вычислить, чему равна **сама функция** в точке $x_0 = 1$:

$$f(x_0) = 1^2 + 1 = 2$$

На следующем этапе находим производную:

$$f'(x) = (x^2 + 1)' = 2x$$

Находим производную в точке (задание, которое мы недавно рассмотрели):

$$f'(x_0) = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

Подставляем значения $x_0 = 1$, $f(x_0) = 2$ и $f'(x_0) = 2$ в формулу $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$:

$$y - 2 = 2(x - 1)$$

$$y - 2 = 2x - 2$$

Таким образом, уравнение касательной:

$$k: y = 2x$$

Это «школьный» вид уравнения прямой с угловым коэффициентом. В высшей математике **уравнение прямой на плоскости** принято записывать в так называемой *общей форме* $Ax + By + C = 0$, поэтому перепишем найденное уравнение касательной в соответствии с традицией:
 $k: 2x - y = 0$

Очевидно, что точка $(x_0; f(x_0)) = (1; 2)$ должна удовлетворять данному уравнению:
 $2 \cdot 1 - 2 = 0$
 $0 = 0$ – верное равенство.

Следует отметить, что такая проверка является лишь частичной. Если мы неправильно вычислили производную в точке $f'(x_0)$, то выполненная подстановка нам ничем не поможет.

Рассмотрим еще два примера.

Пример 5

Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = e^{\frac{1}{2-x}}$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$

Уравнение касательной составим по формуле $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

1) Вычислим значение функции в точке $x_0 = 0$:

$$f(x_0) = f(0) = e^{\frac{1}{2-0}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

2) Найдем производную. Дважды используем правило дифференцирования сложной функции:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{\frac{1}{2-x}} \right)' = e^{\frac{1}{2-x}} \cdot \left(\frac{1}{2-x} \right)' = e^{\frac{1}{2-x}} \cdot ((2-x)^{-1})' = \\ &= -e^{\frac{1}{2-x}} \cdot (2-x)^{-2} \cdot (2-x)' = -\frac{e^{\frac{1}{2-x}}}{(2-x)^2} \cdot (0-1) = \frac{e^{\frac{1}{2-x}}}{(2-x)^2} \end{aligned}$$

3) Вычислим значение производной в точке $x_0 = 0$:

$$f'(x_0) = f'(0) = \frac{e^{\frac{1}{2-0}}}{(2-0)^2} = \frac{\sqrt{e}}{4}$$

4) Подставим значения $x_0 = 0$, $f(x_0) = \sqrt{e}$ и $f'(x_0) = \frac{\sqrt{e}}{4}$ в формулу $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$:

$$y - \sqrt{e} = \frac{\sqrt{e}}{4}(x - 0)$$

$$y - \sqrt{e} = \frac{\sqrt{e}}{4}x$$

$$4(y - \sqrt{e}) = \sqrt{e}x$$

$$4y - 4\sqrt{e} = \sqrt{e}x$$

$$k: \sqrt{e}x - 4y + 4\sqrt{e} = 0$$

Готово.

Выполним частичную проверку:

Подставим точку $(x_0, f(x_0)) = (0, \sqrt{e})$ в найденное уравнение:

$$\sqrt{e} \cdot 0 - 4\sqrt{e} + 4\sqrt{e} = 0$$

$0 = 0$ – верное равенство.

Пример 6

Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = -\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{1}{2}$

Уравнение касательной составим по формуле $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

1) Вычислим значение функции в точке $x_0 = \frac{1}{2}$:

$$f(x_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}}\right)^2 = -\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2 = -(-1)^2 = -1$$

2) Найдем производную. Перед дифференцированием функцию выгодно упростить:

$$f(x) = -\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 = -\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = -\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = -1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = \left(-1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)' = (-1)' + 2(x^{-1})' - (x^{-2})' = 0 - 2x^{-2} - (-2x^{-3}) = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

3) Вычислим значение производной в точке $x_0 = \frac{1}{2}$:

$$f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = -8 + 16 = 8$$

4) Подставим значения $x_0 = \frac{1}{2}$, $f(x_0) = -1$ и $f'(x_0) = 8$ в формулу $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$:

$$y - (-1) = 8 \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

$$y + 1 = 8x - 4$$

$$k: 8x - y - 5 = 0.$$

В задаче на нахождение уравнения касательной очень важно **ВНИМАТЕЛЬНО** и аккуратно выполнить вычисления, привести уравнение прямой к общему виду. И, конечно же, ознакомьтесь со строгим определением касательной, после чего закрепите материал на уроке Уравнение нормали, где есть дополнительные примеры с касательной.

Дифференциал функции одной переменной

С формально-технической точки зрения найти дифференциал функции – это «почти то же самое, что найти производную».

Производная функции чаще всего обозначается через y' .

Дифференциал функции стандартно обозначается через dy (так и читается – «дэ игрек»)

Дифференциал функции одной переменной записывается в следующем виде:

$$dy = y' dx$$

Другой вариант записи: $df(x) = f'(x) dx$

Простейшая задача: Найти дифференциал функции $y = 2x + 3$

1) Первый этап. Найдем производную:

$$y' = (2x + 3)' = 2$$

2) Второй этап. Запишем дифференциал:

$$dy = 2 dx$$

Готово.

Дифференциал функции одной или нескольких переменных чаще всего используют для приближенных вычислений.

Помимо «комбинированных» задач с дифференциалом время от времени встречается и «чистое» задание на нахождение дифференциала функции:

Пример 7

$$y = \sqrt[5]{\sin^4 \left(\frac{x-3}{x} \right)}$$

Найти дифференциал функции

Перед тем, как находить производную или дифференциал, всегда целесообразно посмотреть, а нельзя ли как-нибудь упростить функцию (или запись функции) ещё **до** дифференцирования? Смотрим на наш пример. Во-первых, можно преобразовать корень:

$$y = \sqrt[5]{\sin^4\left(\frac{x-3}{x}\right)} = \sin^{\frac{4}{5}}\left(\frac{x-3}{x}\right) \text{ (корень пятой степени относится именно к синусу).}$$

Во-вторых, замечаем, что под синусом у нас дробь, которую, очевидно, предстоит дифференцировать. Формула дифференцирования дроби очень громоздка. Нельзя ли избавиться от дроби? В данном случае – можно, почленно разделим числитель на знаменатель:

$$y = \sqrt[5]{\sin^4\left(\frac{x-3}{x}\right)} = \sin^{\frac{4}{5}}\left(\frac{x-3}{x}\right) = \sin^{\frac{4}{5}}\left(1 - \frac{3}{x}\right)$$

Функция сложная. В ней два вложения: под степень вложен синус, а под синус

вложено выражение $\left(1 - \frac{3}{x}\right)$. Найдем производную, используя правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ два раза:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sin^{\frac{4}{5}}\left(1 - \frac{3}{x}\right) \right)' = \frac{4}{5} \cdot \sin^{-\frac{1}{5}}\left(1 - \frac{3}{x}\right) \cdot \left(\sin\left(1 - \frac{3}{x}\right) \right)' = \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{\sin\left(1 - \frac{3}{x}\right)}} \cdot \cos\left(1 - \frac{3}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{x}\right)' = \frac{4 \cos\left(1 - \frac{3}{x}\right)}{5 \cdot \sqrt[5]{\sin\left(1 - \frac{3}{x}\right)}} \cdot \left(0 + \frac{3}{x^2}\right) = \frac{12 \cos\left(1 - \frac{3}{x}\right)}{5 \cdot x^2 \cdot \sqrt[5]{\sin\left(1 - \frac{3}{x}\right)}} \end{aligned}$$

Запишем дифференциал, при этом снова представим $\left(1 - \frac{3}{x}\right)$ в первоначальном «красивом» виде:

$$dy = \frac{12 \cos\left(\frac{x-3}{x}\right) dx}{5 \cdot x^2 \cdot \sqrt[5]{\sin\left(\frac{x-3}{x}\right)}}$$

Готово.

Когда производная представляет собой дробь, значок dx обычно «прилепляют» в самом конце числителя (можно и справа на уровне дробной черты).

Пример 8

Найти дифференциал функции $y = \sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt{x}+1}}$

Преобразуем функцию:

$$y = \sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt{x}+1}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\sqrt{x}+1}} = (\sqrt{x}+1)^{-\frac{1}{5}}$$

Найдем производную:

$$y' = \left((\sqrt{x} + 1)^{-\frac{1}{5}} \right)' = -\frac{1}{5} \cdot (\sqrt{x} + 1)^{-\frac{6}{5}} \cdot (\sqrt{x} + 1)' =$$

$$= -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{(\sqrt{x} + 1)^6}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{10\sqrt{x} \cdot \sqrt[5]{(\sqrt{x} + 1)^6}}$$

Запишем дифференциал:

$$dy = -\frac{dx}{10\sqrt{x} \cdot \sqrt[5]{(\sqrt{x} + 1)^6}}$$

Следующие два примера на нахождение [дифференциала в точке](#):

Пример 9

Вычислить дифференциал функции $f(x) = \ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 1})$ в точке $x = 1$

Найдем производную:

$$f'(x) = \left(\ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 1}) \right)' = \frac{1}{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} \cdot (x^2 + \sqrt{x^4 + 1})' =$$

$$= \frac{1}{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} \cdot \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x^4 + 1}} \cdot (x^4 + 1)' \right) = \frac{1}{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} \cdot \left(2x + \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4 + 1}} \right) = (*)$$

Опять, производная вроде бы найдена. Но в эту бодягу еще предстоит подставлять число, поэтому результат максимально упрощаем:

$$(*) = \frac{1}{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} \cdot \left(2x + \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + 1}} \right) = \frac{2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}} \right) =$$

$$= \frac{2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^4 + 1} + x^2}{\sqrt{x^4 + 1}} \right) = \frac{2x \cdot (\sqrt{x^4 + 1} + x^2)}{(x^2 + \sqrt{x^4 + 1}) \cdot \sqrt{x^4 + 1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

Труды были не напрасны, записываем дифференциал:

$$df(x) = \frac{2x dx}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

Теперь вычислим дифференциал в точке $x = 1$:

$$df(1) = \frac{2 \cdot 1 \cdot dx}{\sqrt{1^4 + 1}} = \frac{2dx}{\sqrt{2}}$$

В значок дифференциала dx единицу подставлять не нужно, он немного из другой оперы.

Ну и хорошим тоном в математике считается устранение иррациональности в знаменателе. Для этого домножим числитель и знаменатель на $\sqrt{2}$. Окончательно:

$$df(1) = \frac{2 \cdot \sqrt{2} dx}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} dx}{2} = \sqrt{2} dx$$

Пример 10

Вычислить дифференциал функции $f(x) = -\ln|\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}|$ в точке $x = \sqrt{2}$. В ходе решения производную максимально упростить.

Найдем производную:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-\ln |\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}| \right)' = -\frac{1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}} \cdot (\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1})' = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}} \right) = \\ &= \frac{-(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})}{2 \cdot (\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}) \cdot \sqrt{(x-1)(x+1)}} = \frac{(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1})}{2 \cdot (\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}) \cdot \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

Запишем дифференциал:

$$df(x) = \frac{dx}{2\sqrt{x^2 - 1}}$$

Вычислим дифференциал в точке $x = \sqrt{2}$:

$$df(\sqrt{2}) = \frac{dx}{2\sqrt{2-1}} = \frac{dx}{2}$$

Вторая производная

Всё очень просто. Вторая производная – это **производная от первой производной**:

$$(y')'$$

Стандартные обозначения второй производной: y'' , $f''(x)$ или $\frac{d^2y}{dx^2}$ (дробь читается так: «дэ два игрек по дэ икс квадрат»). Чаще всего вторую производную обозначают первыми двумя вариантами. Но третий вариант тоже встречается, причем, его очень любят включать в условия контрольных заданий, например:

«Найдите $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции...». А студент сидит и битый час чешет репу, что это вообще такое.

Рассмотрим простейший пример. Найдем вторую производную от функции $y = 2x - 1$.

Для того чтобы найти вторую производную, как многие догадались, нужно сначала найти первую производную:

$$y' = (2x - 1)' = 2$$

Теперь находим вторую производную:

$$y'' = (y')' = (2)' = 0$$

Готово.

Рассмотрим более содержательные примеры.

Пример 11

Найти вторую производную функции $y = \sin^2 \frac{x}{3}$

Найдем первую производную:

$$y' = \left(\sin^2 \frac{x}{3} \right)' = 2 \sin \frac{x}{3} \left(\sin \frac{x}{3} \right)' = 2 \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} \cdot \left(\frac{x}{3} \right)' = \frac{2}{3} \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3}$$

На каждом шаге всегда смотрим, нельзя ли что-нибудь упростить? Сейчас нам предстоит дифференцировать произведение двух функций, и мы избавимся от этой неприятности, применив известную [тригонометрическую формулу](#) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. Точнее говоря, использовать формулу будем в обратном

направлении: $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$:

$$y' = \frac{2}{3} \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{2x}{3} = \frac{1}{3} \sin \frac{2x}{3}$$

Находим вторую производную:

$$y'' = (y')' = \left(\frac{1}{3} \sin \frac{2x}{3} \right)' = \frac{1}{3} \left(\sin \frac{2x}{3} \right)' = \frac{1}{3} \cos \frac{2x}{3} \cdot \left(\frac{2x}{3} \right)' = \frac{2}{9} \cos \frac{2x}{3}$$

Готово.

Можно было пойти другим путём – понизить степень функции еще перед

дифференцированием, используя формулу $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$:

$$y = \sin^2 \frac{x}{3} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2x}{3} \right)$$

Если интересно, возьмите первую и вторую производные снова. Результаты, естественно, совпадут.

Отмечу, что понижение степени бывает очень выгодно при нахождении [частных производных функций](#). Здесь же оба способа решения будут примерно одинаковой длины и сложности.

Как и для первой производной, можно рассмотреть **задачу нахождения второй производной в точке**.

Например: Вычислим значение найденной второй производной в точке $x = \frac{\pi}{2}$:

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{9} \cos\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{9} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{9}$$

Необходимость находить вторую производную и вторую производную в точке возникает при исследовании графика функции на [выпуклость/вогнутость и перегибы](#).

Пример 12

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}. \text{ Найти } f''(0)$$

Найти вторую производную функции
Найдем первую производную:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)' = \frac{(x)' \cdot \sqrt{x^2+1} - x \cdot (\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x}{x^2+1} = \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \end{aligned}$$

Найдем вторую производную:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \right)' = ((x^2+1)^{-\frac{3}{2}})' = -\frac{3}{2}(x^2+1)^{-\frac{5}{2}} \cdot (x^2+1)' = \\ &= -\frac{3}{2\sqrt{(x^2+1)^5}} \cdot 2x = -\frac{3x}{\sqrt{(x^2+1)^5}} \\ f''(0) &= -\frac{3 \cdot 0}{\sqrt{(0^2+1)^5}} = -\frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

Вычислим:

Аналогично можно найти [третью производную](#), а также [производные более высоких порядков](#). Такие задания встречаются, но встречаются чуть реже.