

Уравнения в целых числах

Уравнения в целых числах – это алгебраические уравнения с двумя или более неизвестными переменными и целыми коэффициентами. Решениями такого уравнения являются все целочисленные (иногда натуральные или рациональные) наборы значений неизвестных переменных, удовлетворяющих этому уравнению. Такие уравнения ещё называют *диофантовыми*, в честь древнегреческого математика Диофанта Александрийского, который исследовал некоторые типы таких уравнений ещё до нашей эры.

Современной постановкой диофантовых задач мы обязаны французскому математику Ферма. Именно он поставил перед европейскими математиками вопрос о решении неопределённых уравнений только в целых числах.

Наиболее известное уравнение в целых числах – великая **теорема Ферма**: уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет ненулевых рациональных решений для всех натуральных $n > 2$.

Теоретический интерес к уравнениям в целых числах достаточно велик, так как эти уравнения тесно связаны со многими проблемами теории чисел.

В 1970 году ленинградский математик Юрий Владимирович Матиясевич доказал, что общего способа, позволяющего за конечное число шагов решать в целых числах произвольные диофантовы уравнения, не существует и быть не может. Поэтому следует для разных типов уравнений выбирать собственные методы решения.

При решении уравнений в целых и натуральных числах можно условно выделить следующие методы:

- способ перебора вариантов;
- применение алгоритма Евклида;
- представление чисел в виде непрерывных (цепных) дробей;
- разложения на множители;
- решение уравнений в целых числах как квадратных (или иных) относительно какой-либо переменной;
- метод остатков;
- метод бесконечного спуска.

Линейные уравнения

Общий вид линейного уравнения: $ax + by = c$ (*).

Теорема 1. Если c не делится на $\text{НОД}(a; b)$, то уравнение (*) не имеет решения в целых числах.

Будем рассматривать случай, когда коэффициенты a и b взаимно просты, т.е. $\text{НОД}(a; b) = 1$.

Теорема 2. Пусть $x = x_0$ и $y = y_0$ удовлетворяют уравнению (*). Тогда все решения уравнения (*) имеют вид: $x = x_0 + bk$, $y = y_0 - ak$ (k – целый параметр).

Пример. Решить уравнение в целых числах: $2x + 9y = 50$.

Решение. Заметим, что $\text{НОД}(2;9) = 1$. Найдём частное решение:

например, при $y_0 = 4$ получим, что $x_0 = \frac{50 - 9 \cdot 4}{2} = 7$. Таким образом, уравнение имеет бесконечно много целочисленных решений, которые в общем виде можно представить как $x = 7 + 9k$, $y = 4 - 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Проверка: $2(7 + 9k) + 9(4 - 2k) = 50$ - верно.

Нелинейные уравнения

I. Метод ограничения перебора

А) путём разложения на множители;

Б) преобразованием левой части уравнения к сумме неотрицательных функций;

В) за счёт использования неотрицательности дискриминанта.

II. Сравнение обеих частей по некоторому модулю

Если целые числа a и b дают одинаковые остатки при делении на целое ненулевое число m , то говорят, что a и b сравнимы по модулю m и записывают это следующим образом: $a \equiv b \pmod{m}$

Сравнения по одному модулю можно почленно складывать, вычитать, перемножать. Обе части сравнения можно возвести в натуральную степень.

Чтобы использовать теорию сравнений при решении уравнений в целых числах, нужно сначала выбрать модуль, по которому будет проводиться сравнение, а затем рассмотреть остатки, которые могут получиться при делении левой и правой части на выбранное число.

Пример. $x^2 + y^2 = 4z - 1$.

Решение. Квадрат целого числа может давать при делении на 4 либо остаток 0 (если число чётное), либо остаток 1 (если число нечётное):

$$1^2 \equiv 1 \pmod{4}, \quad 2^2 \equiv 0 \pmod{4}, \quad 3^2 \equiv 1 \pmod{4}, \quad 4^2 \equiv 0 \pmod{4}, \\ 5^2 \equiv 1 \pmod{4}, \dots$$

Остатки 0 и 1 чередуются, и других остатков получиться не может. Имеем: $x^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$, $y^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$, значит, $x^2 + y^2 \equiv 0, 1, 2 \pmod{4}$.

Правая часть исходного уравнения при делении на 4 даёт в остатке -1. Она, очевидно, при делении на 4 даёт в остатке 3: $-1 \equiv 3 \pmod{4}$

Получается, что левая и правая части уравнения дают разные остатки при делении на 4, а такого быть не может.

Ответ: нет решений.

Задания по теме «Уравнения в целых числах»

1. Найдите натуральные корни уравнения:

$$17(xyzt + xy + xt + zt + 1) - 54(yzt + y + t) = 0.$$

Указание: решать относительно x .

2. Выясните, конечно или бесконечно число решений в натуральных числах уравнения $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 3$.

3. Найдите все целые решения уравнения $\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{y^2 - y + 1} = 2013$.

4. Докажите, что уравнение $m^2 + 3mn - 2n^2 = 122$ не разрешимо на множестве целых чисел.

Указание: преобразуйте левую часть и используйте сравнения по модулю. Только догадайтесь, по какому именно.

5. Найдите все целые решения уравнения $xy = 20 - 3x + y$.

6. Среди всех пар $(x; y)$ натуральных чисел, удовлетворяющих равенству $x^2 + 3xy = y^3$ и неравенствам $x \leq 2013$, $y \leq 2013$ найдите ту, для которой сумма $x + y$ наибольшая.

Указание: легко заметить, что у чисел x и y есть общий делитель.

7. Докажите, что уравнение $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1$ неразрешимо в натуральных числах.

Подсказка: $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1$.

8. Решить в целых числах уравнение $x^2 - xy - 2y^2 = 7$.

Решение. Запишем уравнение в виде $(x - 2y)(x + y) = 7$.

Так как x, y – целые числа, то находим решения исходного уравнения, как решения следующих четырёх систем:

1) $x - 2y = 7, x + y = 1$; 2) $x - 2y = 1, x + y = 7$;

3) $x - 2y = -7, x + y = -1$; 4) $x - 2y = -1, x + y = -7$.

Решив эти системы, получаем решения уравнения:

$(3; -2), (5; 2), (-3; 2)$ и $(-5; -2)$.

Ответ: $(3; -2), (5; 2), (-3; 2), (-5; -2)$.

9. Решить в целых числах уравнение: а) $20x + 12y = 2013$; б) $5x + 7y = 19$; в) $201x - 1999y = 12$.

Решение.

а) Поскольку при любых целых значениях x и y левая часть уравнения делится на два, а правая является нечётным числом, то уравнение не имеет решений в целых числах.

Ответ: решений нет.

б) Подберём сначала некоторое конкретное решение. В данном случае, это просто, например, $x_0 = 1, y_0 = 2$. Тогда $5x_0 + 7y_0 = 19$, откуда

$$5(x - x_0) + 7(y - y_0) = 0,$$

$$5(x - x_0) = -7(y - y_0).$$

Поскольку числа 5 и 7 взаимно простые, то $x - x_0 = 7k$, $y - y_0 = -5k$.

Значит, общее решение: $x = 1 + 7k$, $y = 2 - 5k$, где k – произвольное целое число.

Ответ: $(1+7k; 2-5k)$, где k – целое число.

в) Найти некоторое конкретное решение подбором в данном случае достаточно сложно. Воспользуемся алгоритмом Евклида для чисел 1999 и 201: $\text{НОД}(1999, 201) = \text{НОД}(201, 190) = \text{НОД}(190, 11) = \text{НОД}(11, 3) = \text{НОД}(3, 2) = \text{НОД}(2, 1) = 1$.

Запишем этот процесс в обратном порядке:

$$1 = 2 - 1 = 2 - (3 - 2) = 2 \cdot 2 - 3 = 2 \cdot (11 - 3 \cdot 3) - 3 = 2 \cdot 11 - 7 \cdot 3 = 2 \cdot 11 - 7(190 - 11 \cdot 7) = 121 \cdot 11 - 7 \cdot 190 = 121(201 - 190) - 7 \cdot 190 = 121 \cdot 201 - 128 \cdot 190 = 121 \cdot 201 - 128(1999 - 9 \cdot 201) = 1273 \cdot 201 - 128 \cdot 1999.$$

Значит, пара $(1273, 128)$ является решением уравнения $201x - 1999y = 1$. Тогда пара чисел $x_0 = 1273 \cdot 12 = 15276$, $y_0 = 128 \cdot 12 = 1536$ является решением уравнения $201x - 1999y = 12$.

Общее решение этого уравнения запишется в виде:

$x = 15276 + 1999k$, $y = 1536 + 201k$, где k – целое число, или, после переобозначения (используем, что $15276 = 1283 + 7 \cdot 1999$, $1536 = 129 + 7 \cdot 201$):

$$x = 1283 + 1999n, y = 129 + 201n, \text{ где } n \text{ – целое число.}$$

Ответ: $(1283+1999n, 129+201n)$, где n – целое число.

10. Решить в целых числах уравнение: а) $x^3 + y^3 = 3333333$;

б) $x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$.

Решение.

а) Так как x^3 и y^3 при делении на 9 могут давать только остатки 0, 1 и 8, то $x^3 + y^3$ может давать только остатки 0, 1, 2, 7 и 8. Но число 3333333 при делении на 9 даёт остаток 3. Поэтому исходное уравнение не имеет решений в целых числах.

Ответ: целочисленных решений нет.

б) Перепишем исходное уравнение в виде $(x + y)^3 = 7(x^2y + xy^2) + 4$. Так как кубы целых чисел при делении на 7 дают остатки 0, 1 и 6, но не 4, то уравнение не имеет решений в целых числах.

Ответ: целочисленных решений нет.

11. Решить: а) в простых числах уравнение $x^2 - 7x - 144 = y^2 - 25y$; б) в целых числах уравнение $x + y = x^2 - xy + y^2$.

Решение.

а) Решим данное уравнение как квадратное относительно переменной y . Получим $y = x + 9$ или $y = 16 - x$.

Поскольку при нечётном x число $x + 9$ является чётным, то единственной парой простых чисел, которая удовлетворяет первому равенству, является $(2; 11)$.

Так как x, y – простые, то из равенства $y = 16 - x$ имеем: $2 \leq x \leq 16$, $2 < y \leq 16$.

С помощью перебора вариантов находим остальные решения: (3; 13), (5; 11), (11; 5), (13; 3).

Ответ: (2; 11), (3; 13), (5; 11), (11; 5), (13; 3).

б) Рассмотрим данное уравнение как квадратное уравнение относительно x : $x^2 - (y + 1)x + y^2 - y = 0$.

Дискриминант этого уравнения равен $-3y^2 + 6y + 1$. Он положителен лишь для следующих значений y : 0, 1, 2. Для каждого из этих значений из исходного уравнения получаем квадратное уравнение относительно x , которое легко решается.

Ответ: (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 2), (2; 1), (2; 2).

12. Существует ли бесконечное число троек целых чисел x, y, z таких, что $x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$?

Решение. Попробуем подбирать такие тройки, где $y = -z$. Тогда y^3 и z^3 будут всегда взаимно уничтожаться, и наше уравнение будет иметь вид: $x^2 + 2y^2 = x^3$ или, иначе, $x^2(x-1) = 2y^2$.

Чтобы пара целых чисел $(x; y)$ удовлетворяла этому условию, достаточно, чтобы число $x-1$ было удвоенным квадратом целого числа. Таких чисел бесконечно много, а именно, это все числа вида $2n^2+1$. Подставляя в $x^2(x-1) = 2y^2$ такое число, после несложных преобразований получаем: $y = xn = n(2n^2+1) = 2n^3+n$.

Все тройки, полученные таким образом, имеют вид $(2n^2+1; 2n^3+n; -2n^3-n)$.

Ответ: существует.

13. Найдите такие целые числа x, y, z, u , что $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2xyzu$.

Решение. Число $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ чётно, поэтому среди чисел x, y, z, u чётное число нечётных чисел.

Если все четыре числа x, y, z, u нечётны, то $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ делится на 4, но при этом $2xyzu$ не делится на 4 – несоответствие.

Если ровно два из чисел x, y, z, u нечётны, то $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ не делится на 4, а $2xyzu$ делится на 4 – опять несоответствие.

Поэтому все числа x, y, z, u чётны. Тогда можно записать, что $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1, u = 2u_1$, и исходное уравнение примет вид $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 = 8x_1y_1z_1u_1$.

Теперь заметим, что $(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1$ при делении на 8 даёт остаток 1. Поэтому если все числа x_1, y_1, z_1, u_1 нечётны, то $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2$ не делится на 8. А если ровно два из этих чисел нечётно, то $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2$ не делится даже на 4. Значит, $x_1 = 2x_2, y_1 = 2y_2, z_1 = 2z_2, u_1 = 2u_2$, и мы получаем уравнение $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + u_2^2 = 32x_2y_2z_2u_2$.

Снова повторив те же самые рассуждения, получим, что x, y, z, u делятся на 2^n при всех натуральных n , что возможно лишь при $x = y = z = u = 0$.

Ответ: (0; 0; 0; 0).

14. Докажите, что уравнение $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 30$ не имеет решений в целых числах.

Решение. Воспользуемся следующим тождеством:

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x).$$

Тогда исходное уравнение можно записать в виде $(x - y)(y - z)(z - x) = 10$.

Обозначим $a = x - y$, $b = y - z$, $c = z - x$ и запишем полученное равенство в виде $abc = 10$.

Кроме того, очевидно, $a + b + c = 0$. Легко убедиться, что с точностью до перестановки из равенства $abc = 10$ следует, что числа $|a|$, $|b|$, $|c|$ равны либо 1, 2, 5, либо 1, 1, 10. Но во всех этих случаях при любом выборе знаков a , b , c сумма $a + b + c$ отлична от нуля. Таким образом, исходное уравнение не имеет решений в целых числах.

15. Решить в целых числах уравнение $1! + 2! + \dots + x! = y^2$.

Решение. Очевидно, что если $x = 1$, то $y^2 = 1$, если $x = 3$, то $y^2 = 9$.

Этим случаям соответствуют следующие пары чисел:

$$x_1 = 1, y_1 = 1; \quad x_2 = 1, y_2 = -1;$$

$$x_3 = 3, y_3 = 3; \quad x_4 = 3, y_4 = -3.$$

Заметим, что при $x = 2$ имеем $1! + 2! = 3$, при $x = 4$ имеем $1! + 2! + 3! + 4! = 33$ и ни 3, ни 33 не являются квадратами целых чисел. Если же $x > 5$, то, так как

$$5! + 6! + \dots + x! = 10n, \text{ можем записать, что}$$

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + x! = 33 + 10n.$$

Так как $33 + 10n$ – число, оканчивающееся цифрой 3, то оно не является квадратом целого числа.

Ответ: (1; 1), (1; -1), (3; 3), (3; -3).

16. Решите следующую систему уравнений в натуральных числах:

$$a^3 - b^3 - c^3 = 3abc, \quad a^2 = 2(b + c).$$

Решение. Так как $3abc > 0$, то $a^3 > b^3 + c^3$; тогда имеем $b < a$, $c < a$.

Складывая эти неравенства, получим, что $b + c < 2a$ и $2(b + c) < 4a$.

С учётом последнего неравенства, из второго уравнения системы получаем, что $a^2 < 4a$ и $a < 4$. Но второе уравнение системы также показывает, что a – чётное число. Таким образом, $a = 2$, $b = c = 1$.

Ответ: (2; 1; 1).

17. Найти все пары целых чисел x и y , удовлетворяющих уравнению

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y.$$

Решение. Разложив на множители обе части данного уравнения, получим: $x(x + 1) = y(y + 1)(y^2 + 1)$, или $x(x + 1) = (y^2 + y)(y^2 + 1)$.

Такое равенство возможно, если левая и правая части равны нулю, или представляют собой произведение двух последовательных целых чисел. Поэтому, приравнявая к нулю те или иные множители, получим 4 пары искомых значений переменных:

$$x_1 = 0, y_1 = 0; \quad x_2 = 0, y_2 = -1; \quad x_3 = -1, y_3 = 0; \quad x_4 = -1, y_4 = -1.$$

Произведение $(y^2 + y)(y^2 + 1)$ можно рассматривать как произведение двух последовательных целых чисел, отличных от нуля, только при $y = 2$. Поэтому $x(x + 1) = 30$, откуда $x_5 = 5$, $x_6 = -6$. Значит, существуют ещё две пары целых чисел, удовлетворяющих исходному уравнению:

$$x_5 = 5, y_5 = 2;$$

$$x_6 = -6, y_6 = 2.$$

Ответ: $(0; 0)$, $(0; -1)$, $(-1; 0)$, $(-1; -1)$, $(5; 2)$, $(-6; 2)$.

18. Попробуйте разменять 25-рублёвую купюру одиннадцатью купюрами достоинством 1, 3 и 5 рублей.

Решение. Если мы возьмём 11 трёхрублевых купюр, то получим 33 руб. – на 8 руб. больше, чем надо. Заменим несколько трёхрублевых купюр на однорублевые. Каждая замена уменьшает сумму на 2 руб. Следовательно, чтобы уменьшить сумму на 8 руб., надо заменить 4 трёхрублевые купюры на 4 однорублевые: $7 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 25$.

19. В комнате стоят трехногие табуретки и четырехногие стулья. Когда на все эти сидячие места уселись люди, в комнате оказалось 39 ног. Сколько в комнате табуреток?

Решение. По условию, в комнате находятся пяти- и шестиногие существа, у которых в сумме 39 ног. Число ног у пятиногих оканчивается на 0 или 5. Но в данном случае на 0 это число оканчиваться не может, т.к. тогда число ног у шестиногих будет оканчиваться на 9. В таком случае пятиногих может быть 1, 3, 5 или 7. Простым перебором определяем, что пятиногих существ — 3, а шестиногих — 4. То есть в комнате 4 стула и 3 табуретки.

20. Несколько одинаковых по численности бригад сторожей спали одинаковое число ночей. Каждый сторож проспал больше ночей, чем сторожей в бригаде, но меньше, чем число бригад. Сколько сторожей в бригаде, если все сторожа вместе проспали 1001 человеко-ночь?

Решение. Обозначим через s число сторожей в бригаде, через b число бригад, а через n — число ночей, которые проспал один сторож. Тогда $s \cdot b \cdot n = 1001$. Но $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, причём числа 7, 11, 13 — простые. Учитывая, что по условию $s < n < b$, получаем $s = 7$.

21. Решите в натуральных числах уравнение: а) $x^2 - y^2 = 31$; б) $x^2 - y^2 = 303$.

Решение. $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

а) Так как произведение равно простому числу 31, то больший множитель равен 31, а меньший — 1. Итак, $x - y = 1$, $x + y = 31$, откуда $x = 16$, $y = 15$.

б) $303 = 1 \cdot 303 = 3 \cdot 101$. Имеем два случая:

1) $x - y = 1$, $x + y = 303$, откуда $x = 152$, $y = 151$.

2) $x - y = 3$, $x + y = 101$, откуда $x = 52$, $y = 49$.

22. Решить в целых числах уравнение $xy = x + y$.

Решение.

Первое решение. Выразим одно переменное через другое $x=y:(y-1)$, что можно преобразовать следующим образом $x=1+1:(y-1)$, а последняя дробь будет целым числом только при $y=0$ и $y=2$.

Второе решение. Уравнение можно преобразовать к виду $xy-x-y=0$, а затем к виду $(x-1)(y-1)=1$. Произведение двух чисел равно единице, если оба множителя равны единице или оба множителя равны -1 , отсюда два решения.

Ответ: $(0;0)$, $(2,2)$.

23. Остап Бендер в интервью шахматному журналу о сеансе одновременной игры в Васюках сообщил, что в одной из партий у него осталось фигур в три раза меньше, чем у соперника и в шесть раз меньше, чем свободных клеток на доске, а в другой партии, фигур у него осталось в пять раз меньше, чем у соперника, и в десять раз меньше, чем свободных клеток на доске и все-таки он сумел выиграть обе партии. Можно ли верить его рассказу?

Решение. Обозначим за N количество фигур у О. Бендера. В первом случае $N + 3N + 6N = 64$, что невозможно. Во втором случае $N + 5N + 10N = 64$ и $N = 4$, что также невозможно, так как у противника при этом должно остаться 20 фигур.

24. Найдите все простые числа p и q , для которых выполняется равенство

$$p^2 - 2q^2 = 1.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде $2q^2 = (p-1)(p+1)$. Заметим, что p нечётно. Значит, q чётно, то есть $q = 2$, а $p = 3$.

25. Найти хотя бы одно целочисленное решение уравнения

$$a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 = 2005.$$

Решение. $(a^2+1)(b^2+1)=a^2b^2+a^2+b^2+1=2005=5 \cdot 401=1 \cdot 2005$. Поскольку число 2004 не является полным квадратом, получаем 8 решений; все они получаются из $(2, 20)$ перестановкой и сменой знаков.

26. Зная, что число 1993 простое, выясните, существуют ли такие натуральные числа x и y , что: а) $x^2 - y^2 = 1993$; б) $x^3 - y^3 = 1993$; в) $x^4 - y^4 = 1993$?

Решение.

а) Разложим левую часть на множители. Имеем: $(x-y)(x+y) = 1993$. То есть и $x-y$, и $x+y$ являются делителями числа 1993. Учитывая, что число 1993 простое (т.е. делится только на себя и на 1), получаем: либо $x-y = 1$, $x+y = 1993$, либо $x-y = 1993$, $x+y = 1$. Второй случай, очевидно, невозможен для натуральных x и y , а в первом случае находим $x = 997$, $y = 996$.

б) Разложим левую часть на множители. Имеем: $(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 1993$. Учитывая, что число 1993 простое, получаем: либо $x-y = 1$, $x^2 + xy + y^2 = 1993$, либо $x-y = 1993$, $x^2 + xy + y^2 = 1$. Решений нет.

в) Разложим левую часть на множители. Имеем: $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = 1993$. Учитывая, что число 1993 простое, получаем: либо $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1993$, либо $x^2 - y^2 = 1993$, $x^2 + y^2 = 1$. Решений нет.

27. В равенстве $(ay^b)^c = -64y^6$ замените a , b и c целыми числами, отличными от 1, так, чтобы получилось тождество.

Решение. Задача сводится к решению системы $bc = 6$, $a^c = -64$. Из второго уравнения следует, что c положительно и нечетно. Отсюда $c = 3$.