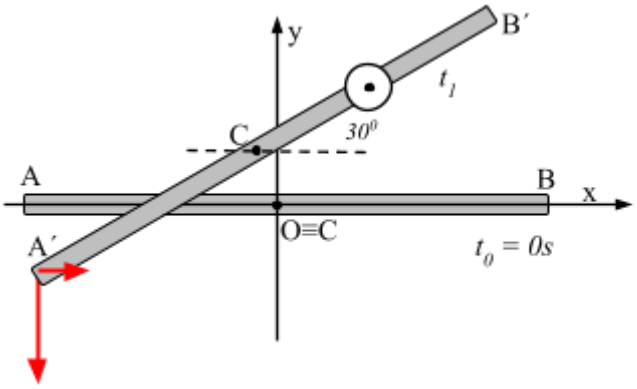
Στιγμιότυπο στην κίνηση μιας ράβδου

Μια ομογενής λεπτή ράβδος ΑΒ με μήκος $L = 2m$, τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$, έχει τη διεύθυνση του άξονα Ox, ενός συστήματος xOy ορθογωνίων αξόνων, με το μέσον - και κέντρο μάζας - C, να συμπίπτει με την αρχή O των αξόνων. Κάποια χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται για πρώτη φορά στη θέση του διπλανού σχήματος, έχοντας στραφεί αντιωρολογιακά κατά $\Delta\theta = 30^0$.



Οι συνιστώσες της ταχύτητας του άκρου Α, έχουν αλγεβρικές τιμές $\upsilon_{Ax} =+ 2m/s$ και $\upsilon_{Ay} = -6m/s$ για κάθε άξονα, ενώ η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου έχει σταθερό μέτρο $\omega = 12rad/s$, με αντιωρολογιακή φορά.

Θεωρείστε την κίνηση της ράβδου σύνθετη: Ομαλή Στροφική, γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο xOy που διέρχεται από το κέντρο μάζας C της ράβδου και ευθύγραμμη ομαλή μεταφορική με την ταχύτητα του κέντρου μάζας C. Για τη χρονική στιγμή t_1:

α) Υπολογίστε την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_C$ του κέντρου μάζας.

β) Υπολογίστε την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_B$ του άκρου Β.

γ) Υπολογίστε τη χρονική στιγμή t_1 και βρείτε τη θέση του σημείου Α ως προς το δοσμένο σύστημα αξόνων.

Απάντηση

Με βάση τον άξονα περιστροφής, που διέρχεται από το C, το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του άκρου Α είναι:

$$\upsilon_{\gamma\rho,A} = \omega\frac{L}{2} = 12m/s$$

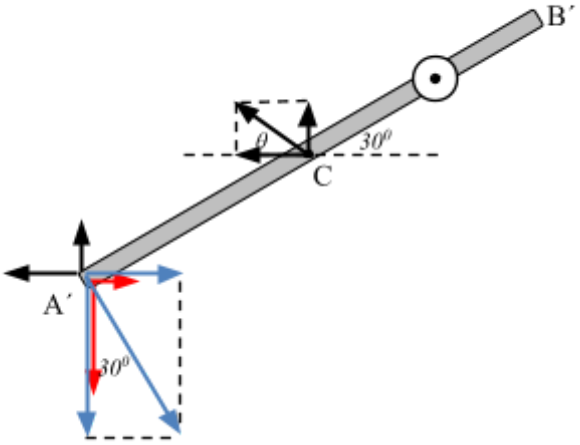
με διεύθυνση κάθετη στη ράβδο. Αναλύουμε τη γραμμική ταχύτητα του άκρου Α σε δυο συνιστώσες με αλγεβρικές τιμές:

$$\upsilon_{\gamma\rho,Ax} = +\upsilon_{\gamma\rho,A}\cdot\eta\mu 30 = 6m/s$$

$$\upsilon_{\gamma\rho,Ay} = -\upsilon_{\gamma\rho,A}\cdot\sigma\upsilon\nu 30 = -6\sqrt{3} \approx -10,4m/s$$

όπως φαίνεται στο σχήμα 1.

Σχήμα 1



Η ταχύτητα του σημείου Α σε κάθε άξονα, θα προκύπτει από τη σύνθεση της αντίστοιχης συνιστώσας ταχύτητας του κέντρου μάζας C και γραμμικής ταχύτητας του σημείου Α. Εργαζόμενοι με αλγεβρικές τιμές:

$$\upsilon_{Ax} = \upsilon_{\gamma\rho,Ax} + \upsilon_{Cx} \Leftrightarrow \upsilon_{Cx} = \upsilon_{Ax} - \upsilon_{\gamma\rho,Ax} \Leftrightarrow$$
$$\upsilon_{Cx} = +2 - (+6) \Leftrightarrow \upsilon_{Cx} = -4m/s$$
$$\upsilon_{Ay} = \upsilon_{\gamma\rho,Ay} + \upsilon_{Cy} \Leftrightarrow \upsilon_{Cy} = \upsilon_{Ay} - \upsilon_{\gamma\rho,Ay} \Leftrightarrow$$
$$\upsilon_{Cy} = -6 - (-10,4) \Leftrightarrow \upsilon_{Cy} = +4,4m/s$$

Άρα η ταχύτητα του κέντρου μάζας C θα έχει μέτρο

$$|\upsilon_C| = \sqrt{\upsilon_{Cx}^2 + \upsilon_{Cy}^2} = \sqrt{(-4)^2 + 4,4^2} = 5,9m/s$$

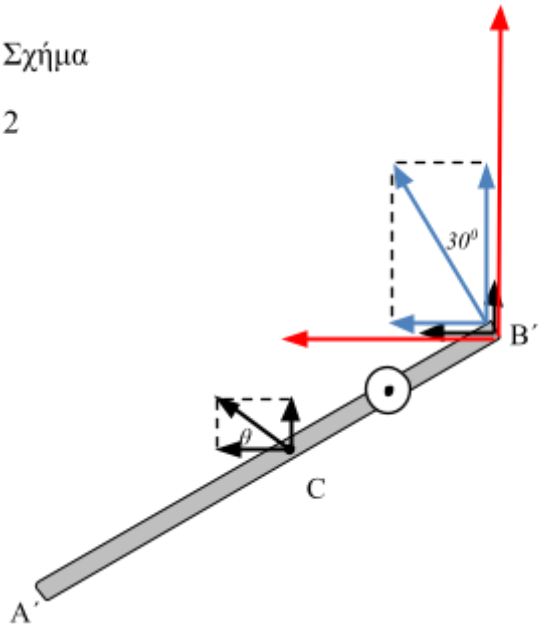
και διεύθυνση

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{|\upsilon_{Cy}|}{|\upsilon_{Cx}|} = 1,1 \Leftrightarrow \theta \approx 48^0$$

β) Το σημείο B θα έχει την ίδια χρονική στιγμή: Γραμμική ταχύτητα αντίθετη εκείνης του A, που σημαίνει συνιστώσες ίδιου μέτρου αλλά αντίθετης φοράς και μεταφορική ταχύτητα ίδια με εκείνη του κέντρου μάζας.
Άρα όπως φαίνεται και στο σχήμα 2

$$\upsilon_{Bx} = \upsilon_{\gamma\rho,Bx} + \upsilon_{Cx} \Leftrightarrow$$
$$\upsilon_{Bx} = -6 + (-4) \Leftrightarrow$$
$$\upsilon_{Bx} = -10m/s$$
$$\upsilon_{By} = \upsilon_{\gamma\rho,By} + \upsilon_{Cy} \Leftrightarrow$$
$$\upsilon_{By} = +10,4 + 4,4 \Leftrightarrow$$
$$\upsilon_{By} = +14,8m/s$$

Σχήμα 2



Η ταχύτητα του B θα έχει μέτρο

$$|\upsilon_B| = \sqrt{\upsilon_{Bx}^2 + \upsilon_{By}^2} = \sqrt{(-10)^2 + 14,4^2} = 17,5m/s$$

και διεύθυνση

$$\varepsilon\varphi\theta' = \frac{|\upsilon_{By}|}{|\upsilon_{Bx}|} = 1,44 \Leftrightarrow \theta \approx 55^0$$

Στο σχήμα 2, ας σχεδιάσει την $\vec{\upsilon}_B$ ο αναγνώστης…

γ) Η χρονική στιγμή t_1 είναι

$$t_1 = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{\pi/6}{12} = \frac{\pi}{72}s \approx 0,04s$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την **αρχή της επαλληλίας**.

- Η ράβδος στρέφεται κατά *π/6* αριστερόστροφα (σχήμα 3). Οι συντεταγμένες του άκρου της ράβδου είναι:
  αρχικά: A*(-1m, 0m)* και τελικά A΄(x_r, y_r). Όπως φαίνεται στο σχήμα, $x_r < 0$, $y_r < 0$, άρα:

$$x_r = -\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu 30 = -0,87m$$

$$y_r = -\frac{L}{2}\eta\mu 30 = -0,5m$$

*Μπορούσαμε να θεωρήσουμε και αρχική γωνία $\theta_0 = \pi$ rad.

- Η ράβδος και το σημείο Α, μεταφέρεται με την ταχύτητα του κέντρου μάζας, για χρονικό διάστημα t_1, σε κάθε άξονα, κατά:

$$x_C = x_0 + \upsilon_{Cx} t_1 =$$

$$0 + (-4)\cdot\frac{\pi}{72} = -0,17m$$

$$y_C = y_0 + \upsilon_{Cy} t_1 =$$

$$0 + 4,4\cdot\frac{\pi}{72} = 0,19m$$

Η τελική θέση του Α (σχήμα 4) θα είναι

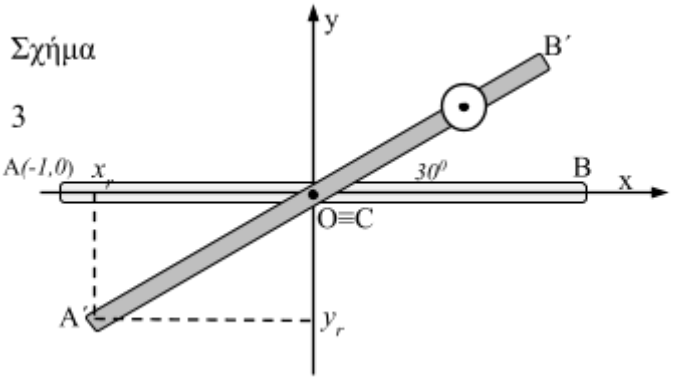
$$x_A = x_r + x_C =$$

$$-0,87 - 0,17 = -1,04m$$

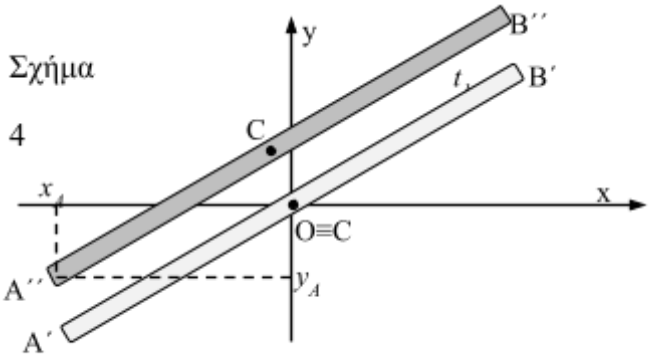
$$y_A = y_r + y_C =$$

$$-0,5 + 0,19 = -0,31m$$

Σχήμα 3



Σχήμα 4



Μπορείτε να δείτε τα παραπάνω σε: Προσομοίωση Interactive Physics

Σχόλιο

Αν θέλουμε γενικούς τύπους για τη θέση ενός σημείου στερεού, που εκτελεί σύνθετη κίνηση ως προς ορθογώνιο σύστημα αξόνων, μπορούμε με βάση το ερώτημα (γ) να έχουμε:

$$x = x_0 + \upsilon_x t + r\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t + \theta_0)$$

$$y = y_0 + \upsilon_y t + r\cdot\eta\mu(\omega t + \theta_0)$$

Σε αυτές τις εξισώσεις, x_0 και y_0 είναι οι αρχικές θέσεις του σημείου A, υ_x και υ_y είναι οι συνιστώσες της σταθερής ταχύτητας μεταφορικής κίνησης(αλγεβρικές τιμές), r είναι η ακτίνα του κύκλου(στην άσκησή μας ήταν $r = L/2$), ω είναι το μέτρο της σταθερής γωνιακής ταχύτητας και θ_0 είναι η αρχική γωνία της ομαλής κυκλικής κίνησης.

Ανδρέας Ριζόπουλος