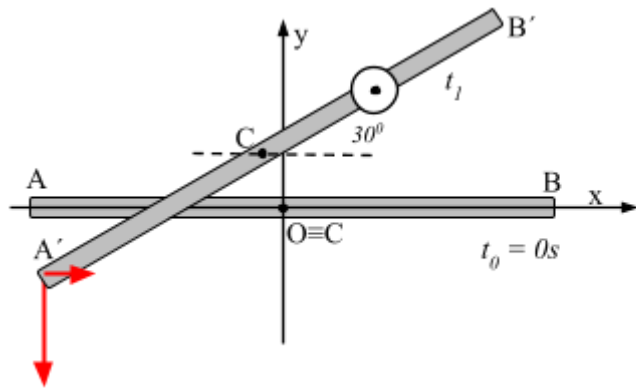


Στιγμιότυπο στην κίνηση μιας ράβδου

Μια ομογενής λεπτή ράβδος AB με μήκος $L = 2m$, τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$, έχει τη διεύθυνση του άξονα Ox, ενός συστήματος xOy ορθογωνίων αξόνων, με το μέσον - και κέντρο μάζας - C, να συμπίπτει με την αρχή O των αξόνων. Κάποια χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται για πρώτη φορά στη θέση του διπλανού σχήματος, έχοντας στραφεί αντιωρολογιακά κατά $\Delta\theta = 30^\circ$.



Οι συνιστώσες της ταχύτητας του

άκρου A, έχουν αλγεβρικές τιμές $v_{Ax} = +2m/s$ και

$v_{Ay} = -6m/s$ για κάθε άξονα, ενώ η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου έχει σταθερό μέτρο $\omega = 12rad/s$, με αντιωρολογιακή φορά.

Θεωρείστε την κίνηση της ράβδου σύνθετη: Ομαλή Στροφική, γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο xOy που διέρχεται από το κέντρο μάζας C της ράβδου και ευθύγραμμη ομαλή μεταφορική με την ταχύτητα του κέντρου μάζας C. Για τη χρονική στιγμή t_1 :

α) Υπολογίστε την ταχύτητα $\vec{v}_C$ του κέντρου μάζας.

β) Υπολογίστε την ταχύτητα $\vec{v}_B$ του άκρου B.

γ) Υπολογίστε τη χρονική στιγμή t_1 και βρείτε τη θέση του σημείου A ως προς το δοσμένο σύστημα αξόνων.

Απάντηση

Με βάση τον άξονα περιστροφής, που διέρχεται από το C, το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του άκρου A είναι:

$$v_{\gamma\rho,A} = \omega \frac{L}{2} = 12m/s$$

με διεύθυνση κάθετη στη ράβδο. Αναλύουμε τη γραμμική ταχύτητα του άκρου A σε δυο συνιστώσες με αλγεβρικές τιμές:

$$v_{\gamma\rho,Ax} = +v_{\gamma\rho,A} \cdot \eta\mu 30 = 6m/s$$

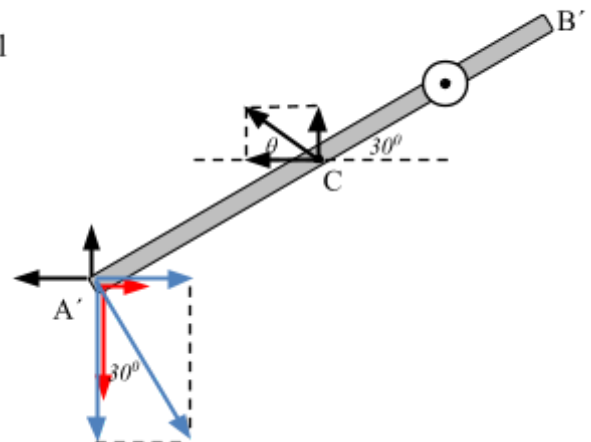
$$v_{\gamma\rho,Ay} = -v_{\gamma\rho,A} \cdot \sigma\upsilon\nu 30 = -6\sqrt{3} \approx -10,4m/s$$

όπως φαίνεται στο σχήμα 1.

Η ταχύτητα του σημείου A σε κάθε άξονα, θα προκύπτει από τη σύνθεση της αντίστοιχης συνιστώσας ταχύτητας του κέντρου μάζας C και γραμμικής ταχύτητας του σημείου A. Εργαζόμενοι με αλγεβρικές τιμές:

Σχήμα

1



$$v_{Ax} = v_{\gamma p, Ax} + v_{Cx} \Leftrightarrow v_{Cx} = v_{Ax} - v_{\gamma p, Ax} \Leftrightarrow$$

$$v_{Cx} = +2 - (+6) \Leftrightarrow v_{Cx} = -4 \text{ m/s}$$

$$v_{Ay} = v_{\gamma p, Ay} + v_{Cy} \Leftrightarrow v_{Cy} = v_{Ay} - v_{\gamma p, Ay} \Leftrightarrow$$

$$v_{Cy} = -6 - (-10,4) \Leftrightarrow v_{Cy} = +4,4 \text{ m/s}$$

Άρα η ταχύτητα του κέντρου μάζας C θα έχει μέτρο

$$|v_C| = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2} = \sqrt{(-4)^2 + 4,4^2} = 5,9 \text{ m/s}$$

και διεύθυνση

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{|v_{Cy}|}{|v_{Cx}|} = 1,1 \Leftrightarrow \theta \approx 48^\circ$$

β) Το σημείο B θα έχει την ίδια χρονική στιγμή:

Γραμμική ταχύτητα αντίθετη εκείνης του A, που σημαίνει συνιστώσες ίδιου μέτρου αλλά αντίθετης φοράς και μεταφορική ταχύτητα ίδια με εκείνη του κέντρου μάζας.

Άρα όπως φαίνεται και στο σχήμα 2

$$v_{Bx} = v_{\gamma p, Bx} + v_{Cx} \Leftrightarrow$$

$$v_{Bx} = -6 + (-4) \Leftrightarrow$$

$$v_{Bx} = -10 \text{ m/s}$$

$$v_{By} = v_{\gamma p, By} + v_{Cy} \Leftrightarrow$$

$$v_{By} = +10,4 + 4,4 \Leftrightarrow$$

$$v_{By} = +14,8 \text{ m/s}$$

Η ταχύτητα του B θα έχει μέτρο

$$|v_B| = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = \sqrt{(-10)^2 + 14,4^2} = 17,5 \text{ m/s}$$

και διεύθυνση

$$\varepsilon\varphi\theta' = \frac{|v_{By}|}{|v_{Bx}|} = 1,44 \Leftrightarrow \theta \approx 55^\circ$$

Στο σχήμα 2, ας σχεδιάσει την $\vec{v}_B$ ο αναγνώστης...

γ) Η χρονική στιγμή t_l είναι

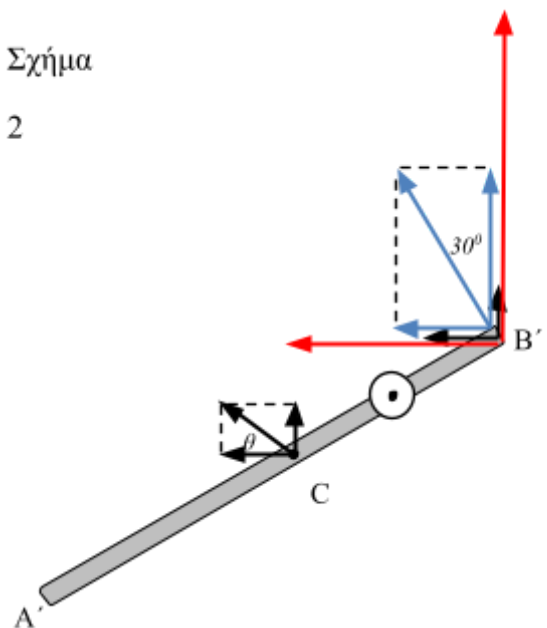
$$t_l = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{\pi/6}{12} = \frac{\pi}{72} \text{ s} \approx 0,04 \text{ s}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την **αρχή της επαλληλίας**.

- Η ράβδος στρέφεται κατά $\pi/6$ αριστερόστροφα (σχήμα 3). Οι συντεταγμένες του άκρου της ράβδου είναι:
αρχικά: A(-1m, 0m) και τελικά A'(x_r, y_r). Όπως φαίνεται στο σχήμα, x_r < 0, y_r < 0, άρα:

Σχήμα

2



$$x_r = -\frac{L}{2} \sin 30 = -0,87m$$

$$y_r = -\frac{L}{2} \eta\mu 30 = -0,5m$$

*Μπορούσαμε να θεωρήσουμε και αρχική γωνία $\theta_0 = \pi \text{ rad}$.

- Η ράβδος και το σημείο A, μεταφέρεται με την ταχύτητα του κέντρου μάζας, για χρονικό διάστημα t_1 , σε κάθε άξονα, κατά:

$$x_C = x_0 + v_{Cx} t_1 =$$

$$0 + (-4) \cdot \frac{\pi}{72} = -0,17m$$

$$y_C = y_0 + v_{Cy} t_1 =$$

$$0 + 4,4 \cdot \frac{\pi}{72} = 0,19m$$

Η τελική θέση του A (σχήμα 4) θα είναι

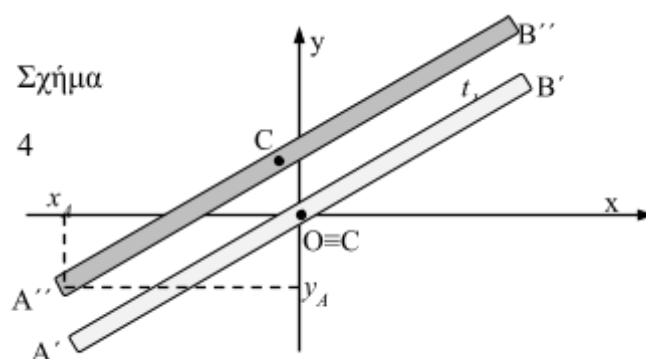
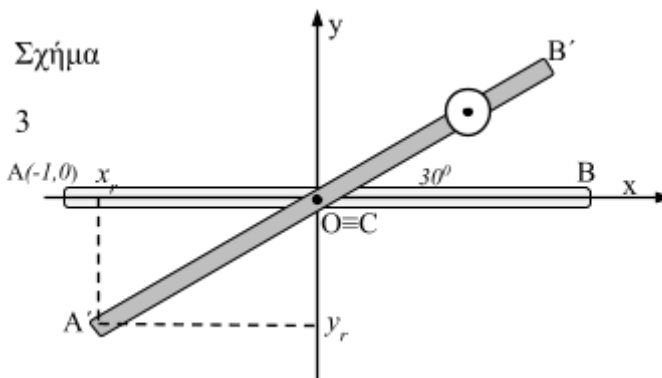
$$x_A = x_r + x_C =$$

$$-0,87 - 0,17 = -1,04m$$

$$y_A = y_r + y_C =$$

$$-0,5 + 0,19 = -0,31m$$

Μπορείτε να δείτε τα παραπάνω σε: [Προσομοίωση Interactive Physics](#)



Σχόλιο

Αν θέλουμε γενικούς τύπους για τη θέση ενός σημείου στερεού, που εκτελεί σύνθετη κίνηση ως προς ορθογώνιο σύστημα αξόνων, μπορούμε με βάση το ερώτημα (γ) να έχουμε:

$$x = x_0 + v_x t + r \cdot \sin(\omega t + \theta_0)$$

$$y = y_0 + v_y t + r \cdot \eta\mu(\omega t + \theta_0)$$

Σε αυτές τις εξισώσεις, x_0 και y_0 είναι οι αρχικές θέσεις του σημείου A, v_x και v_y είναι οι συνιστώσες της σταθερής ταχύτητας μεταφορικής κίνησης (αλγεβρικές τιμές), r είναι η ακτίνα του κύκλου (στην άσκησή μας ήταν $r = L/2$), ω είναι το μέτρο της σταθερής γωνιακής ταχύτητας και θ_0 είναι η αρχική γωνία της ομαλής κυκλικής κίνησης.

Ανδρέας Ριζόπουλος