

(On peut regretter une imprécision sur la définition des forces et des systèmes considérés dans la partie 1, les calculs du 2.5 sont lourds, longs et auront occupé une trop grande partie du temps des candidats sans réelle utilité physique ...)

1 Tension de surface

1.1 Travail des forces de Van der Waals, de résultante non nulle, pour les particules de la surface.

1.2 α s'exprime en Nm^{-1} ou kg.s^{-2} . Il faut multiplier α par une longueur pour avoir une force.

1.3 Avec une variation dl de la longueur, l'aire du rectangle varie de $da = hdl$, le travail est $dW = \alpha h dl$, soit le travail d'une force extérieure $F_{op} = \alpha h$ sur un déplacement dl . On peut opposer à l'opérateur une force $F_s = -F_{op}$ à chaque instant représentant la force de tension superficielle. Cette force s'exerce sur le côté de longueur h , donc $\alpha = F_s/h$ est bien une force par unité de longueur. F_s s'exerce orthogonalement à la frontière et dirigée vers l'intérieur.

1.4 a) On définit l'énergie E du système (surface). Il faut compter les travaux de pression en plus du travail δW_s des forces de tension superficielles : $\delta E = -\alpha da - (P_2 - P_1)dV$ soit $\delta E = -8\pi R\alpha\delta R - 4\pi R^2(P_2 - P_1)\delta R$. E peut être défini comme l'énergie libre du système dans le champ des pressions P_1 et P_2 à la température T , le rayon d'équilibre est alors donné par le minimum de E soit $\delta E/\delta R = 0$.

b) La relation d'équilibre donne la loi de Laplace (1).

c) A.N. : La bulle d'air : $\Delta P = 144 \text{ Pa}$, la bulle de savon a deux surfaces de contact air/eau, de même rayon et $\Delta P = 288 \text{ Pa}$. Cette surpression ne représente que $\Delta P/P_0 = 3 \cdot 10^{-3}$.

d) On néglige la gravité en ne tenant pas compte de variation de pression dans les deux fluides sur une hauteur $2R$. En fait le terme correctif serait la variation des variations de pression : $\Delta(P_1 - P_2) = (\rho_1 - \rho_2)g2R$;

cette variation est très inférieure à $2\alpha/R$ si : $R^2 \ll \frac{\alpha}{g|\rho_1 - \rho_2|}$; pour une bulle d'air dans l'eau $R \ll R_{\max} = 2.7 \text{ mm}$.

e) La tension superficielle est bien inférieure et on obtient dans ce cas $R \ll R_{\max} = 2/2 \cdot 10^{-5} \text{ m}$.

1.5 En projetant sur l'axe de symétrie Oz la force de tension superficielle intégrée sur le pourtour de la calotte et en l'égalant à la somme des forces de pression projetées sur le même axe, on obtient :

$$F_{sz} = 2\pi R \sin \theta \alpha \sin \theta = \int_0^\theta (P_1 - P_2) 2\pi R \sin(\varphi) R d\varphi \cos \varphi$$

Le calcul de l'intégrale redonne la relation de Laplace (1).

1.6 a) Le calcul précédent se généralise en identifiant le $\sin \theta$ précédent au rapport $dh/(dr^2 + dh^2)^{1/2} = h'(r)/(1 + h'(r)^2)^{1/2}$. Alors la force F_s s'écrit en projection

sur Oz : $F_{sz} = 2\pi r \alpha \frac{h'(r)}{\sqrt{1 + h'(r)^2}}$, soit pour une bande de l'interface comprise

$$dF_{zs} = 2\pi \alpha \frac{d}{dr} \left(\frac{rh'(r)}{\sqrt{1 + h'(r)^2}} \right) dr$$

entre r et $r + dr$: , on l'ajoute à la projection sur Oz de la force de pression élémentaire sur la même bande : $(P_1(r) - P_2(r)) 2\pi r (R d\varphi \cos \varphi) = (P_1(r) - P_2(r)) 2\pi r dr$, la somme doit donner 0 à l'équilibre.

b) Si $|h'(r)| \ll 1$, alors la relation précédente s'écrit : $P_1(r) - P_2(r) = -\alpha \Delta h(r)$

2 Ondes électromagnétiques et interface

2.1 a) La susceptibilité est définie par $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ donc $\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi) \mathbf{E}$.

b) Dans un milieu non absorbant χ est réel.

c) Classique ...

2.2 a) De l'équation précédente : $k^2 = \omega^2(1 + \chi)/c^2$.

b) $v_\phi = \omega/k = c/(1 + \chi)^{1/2} = c/n$ donc $n = (1 + \chi)^{1/2}$ puis $\mathbf{D} = \epsilon_0 n^2 \mathbf{E}$ et $k = n\omega/c$

c) L'équation de Maxwell (2) donne $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}$ soit $\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{B}_0$.

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{E} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E})}{\mu_0 \omega} = \frac{E^2 \mathbf{k}}{\mu_0 \omega} = \frac{E_0^2 \cos^2(\mathbf{k}r - \omega t)}{\mu_0 \omega} \mathbf{k}$$

2.3 a)

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 \omega} \mathbf{k}$$

b)

$$c) I = \langle \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \mathbf{k} / k \rangle = |\langle \mathbf{P} \rangle| = n E_0^2 / (2\mu_0 c)$$

d) En écrivant $\text{div } \mathbf{P} = (\mathbf{B} \cdot \text{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot} \mathbf{B})/\mu_0$ on fait apparaître $-dU/dt$, donc l'équation de conservation locale de l'énergie électromagnétique sans perte, en définissant à une constante près : $U = B^2/2\mu_0 + \varepsilon_0 n^2 E^2/2$. $\langle U \rangle = \varepsilon_0 n^2 E_0^2/2$

2.4 a) $\mathbf{k} = (n_1 \omega \sin \theta / c, 0, n_1 \omega \cos \theta / c) \approx (n_1 \omega \theta / c, 0, n_1 \omega (1 - \theta^2/2)/c)$, de même $\mathbf{k}' = (n_1 \omega \theta' / c, 0, -n_1 \omega (1 - \theta'^2/2)/c)$ et $\mathbf{k}'' = (n_2 \omega \theta'' / c, 0, n_2 \omega (1 - \theta''^2/2)/c)$. $k = k' = n_1 \omega / c$ et $k'' = n_2 \omega / c$

b) $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 \exp i(n_1 \omega \theta x / c + n_1 \omega (1 - \theta^2/2) z / c - \omega t) + \mathbf{E}'_0 \exp i(n_1 \omega \theta' x / c - n_1 \omega (1 - \theta'^2/2) z / c - \omega t)$
 $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0 \exp i(n_1 \omega \theta x / c + n_1 \omega (1 - \theta^2/2) z / c - \omega t) + \mathbf{B}'_0 \exp i(n_1 \omega \theta' x / c - n_1 \omega (1 - \theta'^2/2) z / c - \omega t)$
 $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}''_0 \exp i(n_2 \omega \theta'' x / c + n_2 \omega (1 - \theta''^2/2) z / c - \omega t)$
 $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}''_0 \exp i(n_2 \omega \theta'' x / c + n_2 \omega (1 - \theta''^2/2) z / c - \omega t)$

2.5 a) $\text{div } \mathbf{D} = 0$ conduit par la démonstration du théorème de Gauss sur un petit cylindre à cheval sur la frontière à $D_{n2} - D_{n1} = 0$ ce qu'on traduit ici par $\varepsilon_0 n_2^2 E_{z2} = \varepsilon_0 n_1^2 E_{z1}$ (*). De même pour la coordonnée B_z .
L'équation de Maxwell $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ permet de calculer la circulation du champ $\mathbf{E}$ le long d'un contour fermé englobant la surface sur laquelle $\mathbf{B}$ n'est pas infini, le flux de $\mathbf{B}$ à travers ce contour pouvant être rendu aussi petit que l'on veut cela entraîne la continuité de $\mathbf{E}$ tangentielle. Idem pour la continuité de $\mathbf{B}$ tangentielle.

b) En écrivant la relation (*) en $z = 0$ on obtient :
 $n_1^2 E_{0z} \exp i(n_1 \omega \theta x / c) + n_1^2 E'_{0z} \exp i(n_1 \omega \theta' x / c) = n_2^2 E''_{0z} \exp i(n_2 \omega \theta'' x / c)$ où la prise en compte de la fréquence unique a déjà été faite. La validité de cette équation en tout x et tout y du plan $z = 0$ implique : $\theta = \theta'$ et $n_1 \theta = n_2 \theta''$, c'est à dire les lois de Descartes, et entre les composantes : $n_1^2 (E_{0z} + E'_{0z}) = n_2^2 E''_{0z}$. On réécrit alors $\mathbf{k}' = (n_1 \omega \theta / c, 0, -n_1 \omega (1 - \theta^2/2)/c)$ et $\mathbf{k}'' = (n_1 \omega \theta / c, 0, n_2 \omega (1 - n_1^2 \theta^2 / 2 n_2^2) / c)$

c) On passe des composantes $E_{0x}, E'_{0x}, E''_{0x}$ à $E_{0z}, E'_{0z}, E''_{0z}$ par la quatrième équation de Maxwell : $\text{div } \mathbf{D} = 0$ soit dans ces milieux linéaires $\text{div } \mathbf{E} = 0$. Ainsi : $E_{0z} = -\theta E_{0x}$, $E'_{0z} = +\theta E'_{0x}$ et $E''_{0z} = -(n_1/n_2) \theta E'_{0x}$. De même les champs $\mathbf{B}$ sont du genre : $\mathbf{B} = (k_z E_{0x} - k_x E_{0z})/\omega \mathbf{e}_y$. Alors une écriture assez laborieuse et délicate aboutit, tous calculs faits, à :

$\mathbf{E}_1 = \{E_{0x} \exp i(n_1 \omega \theta x / c + n_1 \omega (1 - \theta^2/2) z / c - \omega t) + E'_{0x} \exp i(n_1 \omega \theta x / c - n_1 \omega (1 - \theta^2/2) z / c - \omega t)\} \mathbf{e}_x + \theta \{-E_{0x} \exp i(n_1 \omega \theta x / c + n_1 \omega (1 - \theta^2/2) z / c - \omega t) + E'_{0x} \exp i(n_1 \omega \theta x / c - n_1 \omega (1 - \theta^2/2) z / c - \omega t)\} \mathbf{e}_z$
 $\mathbf{B}_1 = (n_1/c) (1 + \theta^2/2) \{E_{0x} \exp i(n_1 \omega \theta x / c + n_1 \omega (1 - \theta^2/2) z / c - \omega t) - E'_{0x} \exp i(n_1 \omega \theta x / c - n_1 \omega (1 - \theta^2/2) z / c - \omega t)\} \mathbf{e}_y$
 $\mathbf{E}_2 = E''_{0x} \exp i(n_1 \omega \theta x / c + n_2 \omega (1 - n_1^2 \theta^2 / 2 n_2^2) z / c - \omega t) \mathbf{e}_x - (n_1 \theta / n_2) E''_{0x} \exp i(n_1 \omega \theta x / c + n_2 \omega (1 - n_1^2 \theta^2 / 2 n_2^2) z / c - \omega t) \mathbf{e}_z$
 $\mathbf{B}_2 = (n_2/c) (1 + n_1^2 \theta^2 / 2 n_2^2) E''_{0x} \exp i(n_1 \omega \theta x / c + n_2 \omega (1 - n_1^2 \theta^2 / 2 n_2^2) z / c - \omega t) \mathbf{e}_y$

d) L'équation de continuité des amplitudes E_z de 2.5.b) s'écrit :
 $n_1^2 E_{0x} - n_1^2 E'_{0x} = n_1 n_2 E''_{0x}$ et la continuité selon x : $E_{0x} + E'_{0x} = E''_{0x}$. On en tire $E'_{0x} = r E_{0x}$ et $E''_{0x} = t E_{0x}$. Et remplacez si le cœur vous en dit ...

e) $r = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$ et $t = 2n_1/(n_1 + n_2)$

2.6 a) A partir de 2.3.b) : $\langle \mathbf{P} \rangle = E_{0x}^2 (1 + \theta^2)/(2\mu_0 \omega) \mathbf{k}$, puis $\langle \mathbf{P}' \rangle = E_{0x}^2 r^2 (1 + \theta^2)/(2\mu_0 \omega) \mathbf{k}'$ et $\langle \mathbf{P}'' \rangle = E_{0x}^2 t^2 (1 + n_1^2 \theta^2 / n_2^2 \theta^2)/(2\mu_0 \omega) \mathbf{k}''$. L'intensité incidente I est définie par : $I = |\langle \mathbf{P} \rangle| = n_1 E_{0x}^2 (1 + \theta^2)/(2\mu_0 c)$

$$\langle \mathbf{P}'' \rangle = \frac{cI}{n_1 \omega} \frac{\left(1 + \frac{n_1^2}{n_2^2} \theta^2\right)}{(1 + \theta^2)} \frac{4n_1^2}{(n_1 + n_2)^2} \mathbf{k}''$$

$\langle \mathbf{P} \rangle = cI/(n_1 \omega) \mathbf{k}$, $\langle \mathbf{P}' \rangle = cIr^2/(n_1 \omega) \mathbf{k}'$ et

De même à partir de 2.3.d) :

$$\langle U \rangle = \frac{n_1 I}{c(1 + \theta^2)} \quad \langle U' \rangle = \frac{n_1 I}{c(1 + \theta^2)} \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}$$

$$\text{et } \langle U'' \rangle = \frac{n_2^2 I}{c n_1 (1 + \theta^2)} \frac{4n_1^2}{(n_1 + n_2)^2} \left(1 + \frac{n_1^2}{n_2^2} \theta^2\right)$$

$$\langle \mathbf{Q}'' \rangle = \frac{I}{\omega} \frac{\left(1 + \frac{n_1^2}{n_2^2} \theta^2\right)}{(1 + \theta^2)} \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \mathbf{k}''$$

b) $\langle \mathbf{Q} \rangle = (I/\omega) \mathbf{k}$, $\langle \mathbf{Q}' \rangle = (Ir^2/\omega) \mathbf{k}'$ et

Le bilan est à faire pour un élément de volume, de forme cylindrique, de génératrices // à la normale, d'épaisseur aussi petite que l'on veut et dont les faces d'entrée et de sortie sont de part et d'autre de l'interface. On compte positivement les flux entrants :

$$\left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\rangle = (\langle \mathbf{Q} \rangle \cdot \mathbf{Se}_z) \frac{\mathbf{k}}{k} + (\langle \mathbf{Q}' \rangle \cdot \mathbf{Se}_z) \frac{\mathbf{k}'}{k'} + (\langle \mathbf{Q}'' \rangle \cdot (-\mathbf{Se}_z)) \frac{\mathbf{k}''}{k''}$$

$$\frac{\mathbf{F}}{S} = \frac{1}{S} \left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\rangle = \frac{I}{\omega} \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \mathbf{k} + \frac{I}{\omega} r^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \mathbf{k}' - \frac{I}{\omega} \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \times$$

$$\times \left[\frac{1 + \frac{n_1^2}{n_2^2} \theta^2}{1 + \theta^2} \left(1 - \frac{n_1^2}{2n_1^2} \theta^2\right) \right] \mathbf{k}''$$

c) Dans la base locale ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$) les projections de $\mathbf{F}/S$ donnent F_x/S et

$$\frac{F_z}{S} = \frac{2n_1(n_1 - n_2)}{c(n_1 + n_2)} (1 - \theta^2 + \dots) l$$

F_y/S nulles pour tout θ . Et : Cette composante normale est du genre pression de radiation et l'équilibre de l'interface est réalisé lorsque : $\delta P + F_z/S = 0$ d'où l'expression du saut de pression de l'énoncé.

d) Une propagation en sens inverse doit permuter dans l'expression précédente les indices n_1 et n_2 . Cela changera le signe du saut de pression à l'équilibre.

e) La pression de radiation est maximum en incidence normale et la dépendance en θ obtenue en c) fait penser à un $\cos^2\theta$. (Je ne suis pas convaincu que la conduite de tous ces calculs ait été simplifiée par le D.L. en θ tout le long.)

3 Déformation d'une interface par un laser

3.1 a) $P_2(r) = P_0 - \rho_2 g h(r)$
b) $P_1(r) = P_0 - \rho_1 g h(r)$
c) L'équilibre de l'interface entre la pression de radiation, les forces de tension superficielle de 1.6.b) et les pressions hydrostatiques de part et d'autre conduit à l'équation (4).

3.2 a) $\Delta h \sim h/l_c^2$, et alors $l_c = (\alpha/(\rho_1 - \rho_2)g)^{1/2}$. C'est le rayon $R_{\max}$ de 1.4.d) et e).
b) La longueur de variation de l est σ , on attend donc des variations de $h(r)$ due à la pression de radiation sur l'échelle de longueur $l = \sigma$; en ordre de grandeur le premier membre de (4) peut s'écrire $h(\alpha/l_c^2 - \alpha/\sigma^2)$. Dans le cas $l_c \ll \sigma$, on négligera le terme de tension superficielle en Δh dans (4). Et au contraire le terme de pesanteur dans le cas $l_c \gg \sigma$.

c) On reprend les A.N. déjà faites en 1.4 : pour l'interface air/eau $l_c = 2.7$ mm et pour l'interface des mélanges eau/huile $l_c = 2.5 \cdot 10^{-5}$ m. Pour l'interface eau huile : $l_c / \sigma = 20$ la tension superficielle est prépondérante, alors que pour l'interface des mélanges eau/huile $l_c/\sigma = 0.2$, l'effet de gravité sera prépondérant.

3.3 a) En négligeant le terme en laplacien, l'équation (4) n'est plus une équation différentielle et on lit directement :

$$h(r) = \frac{2n_1(n_1 - n_2)}{c(n_1 + n_2)} \frac{2Pe^{-\frac{2r^2}{\sigma^2}}}{(\rho_1 - \rho_2)g\pi\sigma^2} = h(0)e^{-\frac{2r^2}{\sigma^2}}$$

b) c) Dans le cas de l'interface entre mélanges eau/huile $h_{\min} = h(0) = -7.7 \cdot 10^{-7}$ m, c'est peu mais négatif. Le laser, bien qu'arrivant par le bas creuse une

dépression de forme gaussienne dans l'interface. Pour le cas de l'interface eau/air, mais là il n'est pas licite de négliger la tension superficielle, vu les indices on trouverait $h(0) = 1.3 \cdot 10^{-6}$ m = $h_{\max} > 0$, plus conforme à l'intuition.

3.4 a) En remplaçant l'expression $h(r)$ par son intégrale sur $\hat{h}(k)$, en permutant cette intégrale sur k avec l'opérateur Δ portant sur r et en notant que $\Delta J_0(kr) = k^2 J_0(r) = -k^2 J_0(r) = -k^2 J_0(kr)$ il suffit ensuite d'exprimer α en fonction de l_c pour trouver l'expression proposée pour $\hat{h}(k)$.

b) En reprenant $h(r)$ sous la forme de l'intégrale sur k de la fonction $\hat{h}(k)$ fournie, un changement de variable $u = 1 + k^2 l_c^2$ puis un second changement $U = (\sigma^2/8l_c^2)u$ fait apparaître la fonction $E_1(\sigma^2/8l_c^2)$. On obtient alors :

$$h(0) = h_{\min} \left(\frac{\sigma^2}{8l_c^2} \right) e^{\left(\frac{\sigma^2}{8l_c^2} \right)} E_1 \left(\frac{\sigma^2}{8l_c^2} \right)$$

c) Pour l'interface air/eau $x = \frac{\sigma^2}{8l_c^2} = 3.36 \cdot 10^{-4} \ll 1$, la formule d'approximation de E_1 est valable et on trouve $h(0) = 2.2 \cdot 10^{-3} h_{\max}$ bien trop faible ; la tension superficielle importante annule l'effet de la pression de radiation.

3.5 a) On considère des expériences avec les mélanges eau/huile et donc une dépression creusée par le laser, la fonction $h'(r)$ est donc > 0 pour tout r . Sur un schéma on notera que $dh/dr = 1/\tan(\pi/2 - \theta)$ soit $\tan\theta = h'(r)$.

b) Il faut revenir, d'une part à l'expression de la tension superficielle de la forme 1.6.a), d'autre part de la pression de radiation en fonction de θ assimilé au $\tan\theta$, pour obtenir :

$$h(r) - \frac{l_c^2}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r h'(r)}{\sqrt{1 + h'(r)^2}} \right) = \frac{2n_1(n_1 - n_2)}{c(n_1 + n_2)(\rho_1 - \rho_2)g} (1 - h'(r)^2) l(r)$$

c) La fonction de $h'(r)$ dans le critère d'instabilité représente en fait le $\sin\theta$ local de l'angle d'incidence du faisceau par rapport à l'interface. On peut donc penser que lors du passage de l'onde dans le sens F2 vers F1, il y a réflexion totale dans la zone concernée par l'inégalité, que cette réflexion totale concentre la puissance du laser vers le centre de la dépression accroissant ainsi la puissance au centre, donc la pression de radiation, puis $h_{\min}$ et finalement augmentant la zone de forte pente pour augmenter cet effet, c'est donc bien un phénomène cumulatif non linéaire. Le jet se forme au voisinage de l'axe Oz, pénétrant dans le fluide F1.

d) La condition d'instabilité, avec l'expression de $h(r)$ du 1.3.a), s'écrit :

$$h'(r)^2 = h_m^2 \frac{16r^2}{\sigma^4} e^{-\frac{4r^2}{\sigma^2}} \geq \frac{n_1^2}{(n_2^2 - n_1^2)} . \text{ On prend une pente maximum aux environs}$$

$$P_{\max} = \frac{\sqrt{ec}\sqrt{n_1 + n_2}(\rho_1 - \rho_2)g\pi\sigma^3}{8(n_1 - n_2)^{3/2}} = 1.8 \cdot 10^3 \text{ W ??}$$
