Κινήσεις στερεού σώματος

1) Μεταφορική

Αν κατά την κίνηση ενός στερεού, όλα τα σημεία του έχουν κάθε στιγμή *ίδια ταχύτητα* τότε το στερεό μεταφέρεται στο χώρο χωρίς να αλλάζει προσανατολισμό (σχήμα 1).

Επειδή μελετάμε το μηχανικό (άκαμπτο) στερεό, πρέπει οι ταχύτητες δύο σημείων στην ίδια διεύθυνση να είναι ίσες, αλλιώς η απόσταση των σημείων θα άλλαζε. Π.χ. στο σχήμα 1, οι προβολές $\vec{\upsilon}_{\psi}$ των ταχυτήτων στη διεύθυνση ΑΒ πρέπει να είναι ίσες.

Η επιτάχυνση όλων των σημείων είναι κι αυτή κάθε στιγμή ίδια, καθώς και η μετατόπισή τους σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα. Οι τροχιές τους είναι ίδιες και μπορούν με παράλληλη μεταφορά να συμπέσουν.

Σε περίπτωση επίπεδης κίνησης οι τροχιές των σημείων είναι επίπεδες και τα επίπεδά τους είναι παράλληλα.

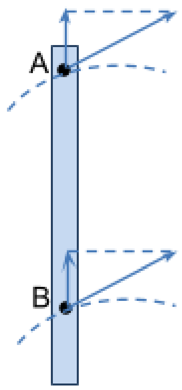
Η τροχιά μπορεί να είναι:

- Ευθύγραμμη (π.χ. σε κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη)
- Καμπυλόγραμμη (π.χ. σε κίνηση ομαλή κυκλική - βλέπε τους θαλαμίσκους της ρόδας λούναπαρκ)

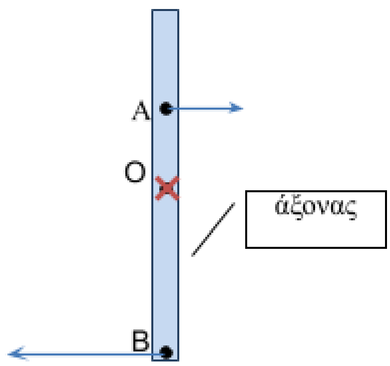
2) Στροφική

Αν κατά την κίνηση του στερεού ένα σημείο του παραμένει ακίνητο, τότε από το σημείο αυτό διέρχεται άξονας γύρω από τον οποίο στρέφεται το στερεό (θεώρημα Euler). Όλα τα σημεία του, εκτός από τα σημεία του άξονα, διαγράφουν κυκλικές τροχιές ακτίνας *r, σε* επίπεδα κάθετα προς τον άξονα με τα κέντρα τους πάνω του, έχοντας γραμμική ταχύτητα μέτρου $|\upsilon| = |\omega| \cdot r$ (σχήμα 2).

Η γωνιακή ταχύτητα και η γωνιακή επιτάχυνση είναι τώρα κοινή κάθε στιγμή για όλα τα σημεία, καθώς και η γωνιακή μετατόπιση σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα.



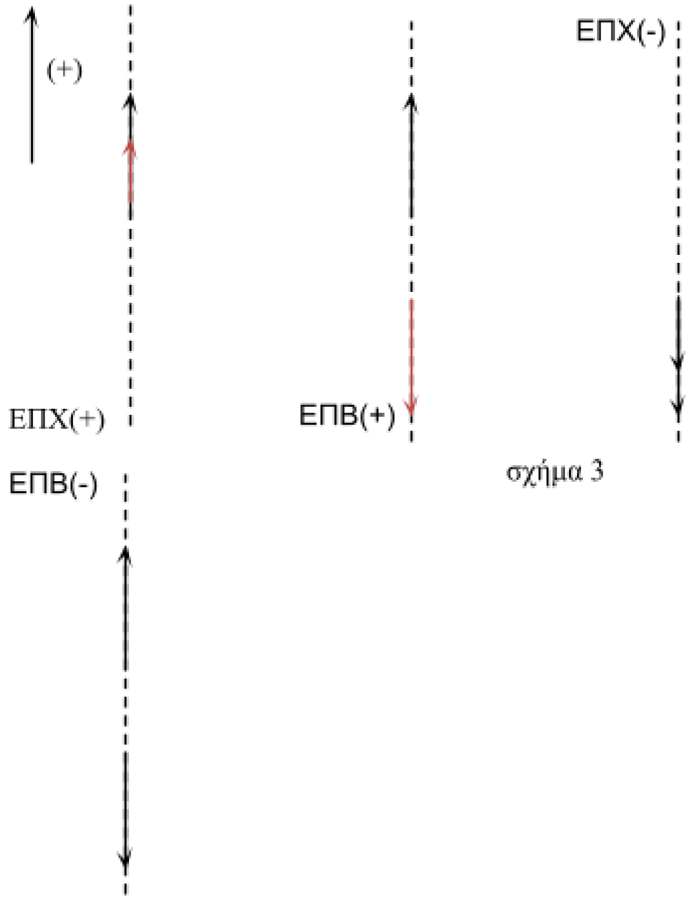
σχήμα 1



σχήμα 2

3) Γωνιακή επιτάχυνση

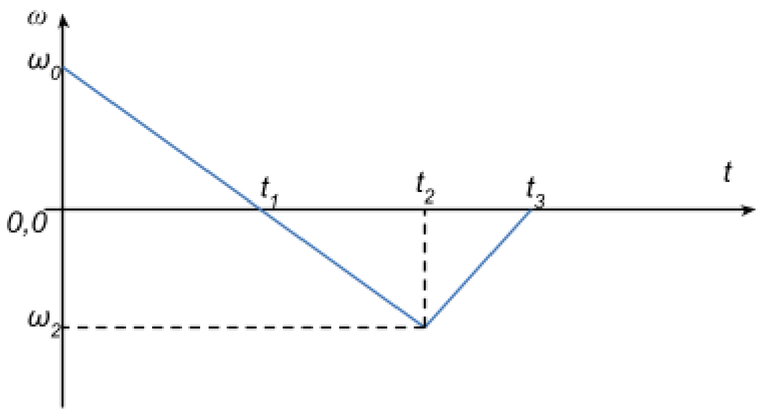
$\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$, με κατεύθυνση πάντα του διανύσματος $d\vec{\omega}$. Στο σχήμα 3 βλέπουμε όλες τις πιθανές περιπτώσεις σχεδίασης των διανυσμάτων $\vec{\omega}, \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}$.



σχήμα 3

Παράδειγμα

Να βρείτε το είδος της κίνησης που περιγράφει το παρακάτω διάγραμμα.



$0 \rightarrow t_1$ Στροφική Ομαλά Επιβραδυνόμενη + φοράς
$t_1 \rightarrow t_2$ Στροφική Ομαλά (επι)ταχυνόμενη − φοράς
$t_2 \rightarrow t_3$ Στροφική Ομαλά Επιβραδυνόμενη − φοράς

Από $0 \rightarrow t_2$ έχουμε την ίδια (αρνητική) γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{\omega_2 - \omega_0}{t_2}$

Από $t_2 \rightarrow t_3$ έχουμε την ίδια (θετική) γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{-\omega_2}{t_3 - t_2}$

4) Εξισώσεις κίνησης

Χρησιμοποιώντας τις αλγεβρικές τιμές των φυσικών μεγεθών…

Α) Ομαλή κίνηση

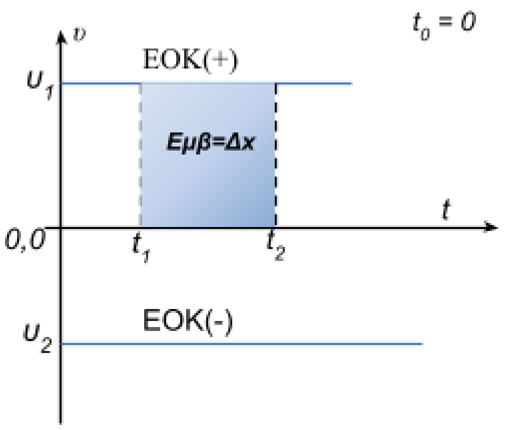
Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση (ΕΟΚ)	Στροφική Ομαλή Κίνηση (ΣΟΚ)
$\vec{\upsilon} = \sigma\tau\alpha\theta.$ $\vec{\alpha} = 0$ $\Delta x = \upsilon \cdot \Delta t$ $x = x_0 + \upsilon \cdot \Delta t$	$\vec{\omega} = \sigma\tau\alpha\theta.$ $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = 0$ $\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t$ $\theta = \theta_0 + \omega \cdot \Delta t$ $\lvert\omega\rvert = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ $N = \frac{\lvert\Delta\theta\rvert}{2\pi}$ $\lvert\upsilon_{\gamma\rho}\rvert = \lvert\omega\rvert \cdot r$

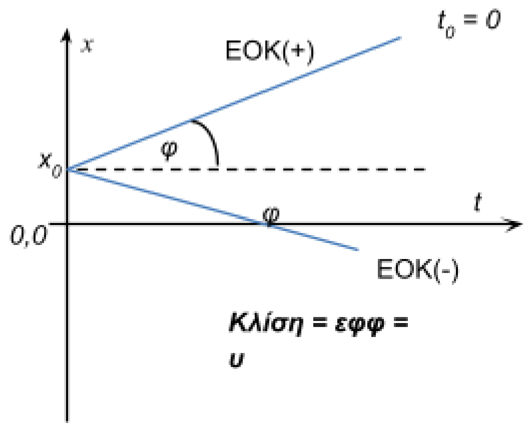
Β) Ομαλά Μεταβαλλόμενη(Επιταχυνόμενη ή Επιβραδυνόμενη)

Ευθύγραμμη Ομαλά Μεταβαλλόμενη (ΕΟΜ)	Στροφική Ομαλά Μεταβαλλόμενη (ΣΟΜ)
$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \sigma\tau\alpha\theta.$ $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha \cdot \Delta t$ $\Delta x = \upsilon_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2$ $x = x_0 + \upsilon_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2$	$\vec{a}_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \sigma\tau\alpha\theta.$ $\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t$ $\Delta\theta = \omega_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t^2$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t^2$ $N = \frac{\lvert\Delta\theta\rvert}{2\pi}$ και $\lvert\upsilon_{\gamma\rho}\rvert = \lvert\omega\rvert \cdot r$

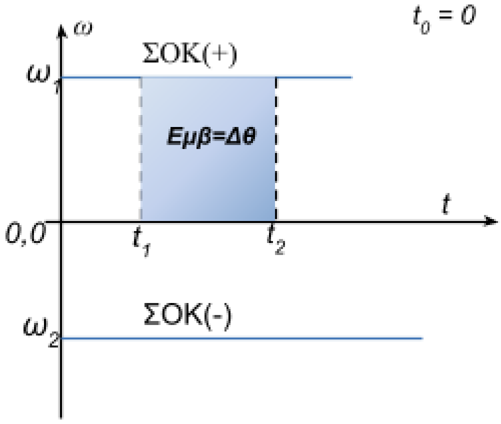
5) Γραφικές παραστάσεις με το χρόνο

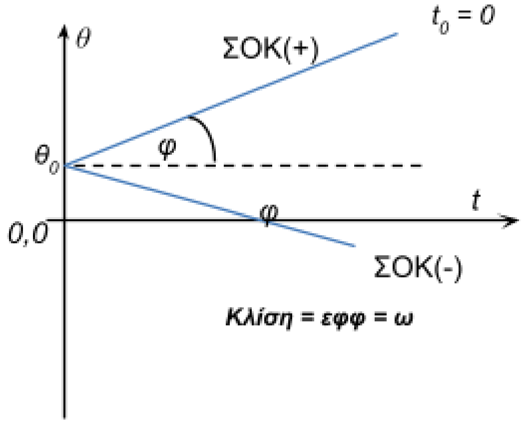
Α) Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση



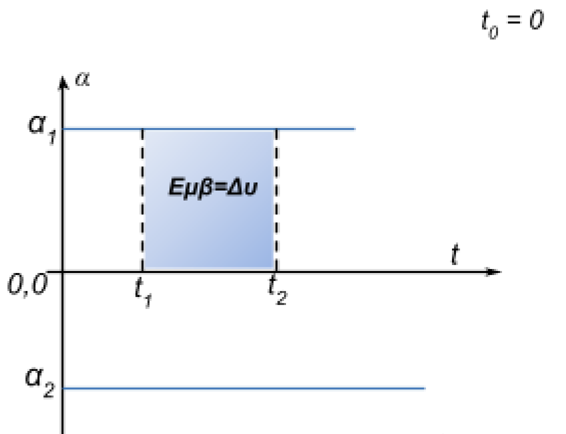


Β) Στροφική Ομαλή Κίνηση

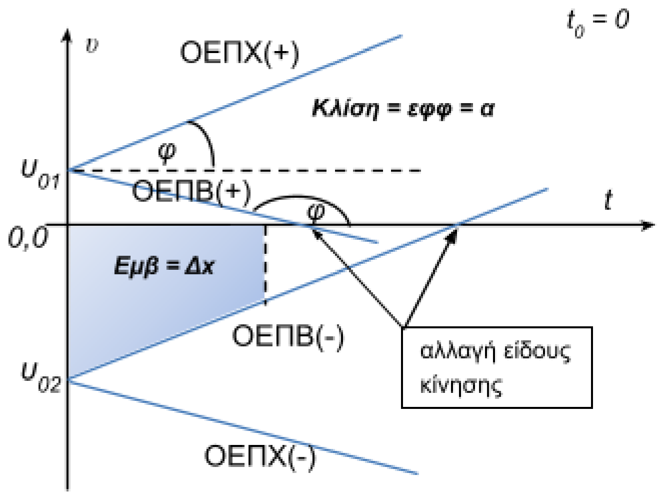


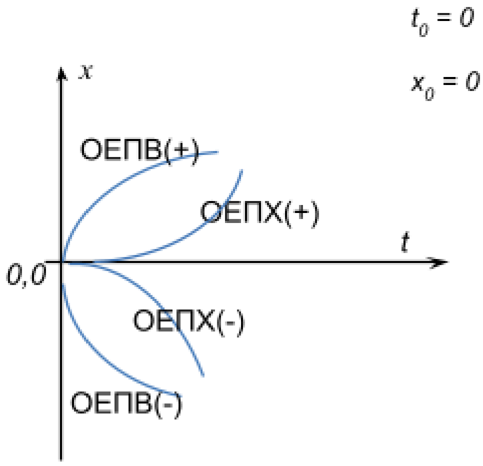


Γ) Ευθύγραμμη Ομαλά Μεταβαλλόμενη(Επιταχυνόμενη ή Επιβραδυνόμενη)

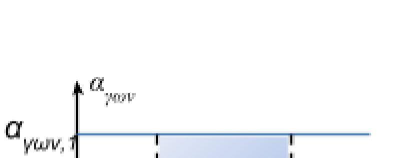


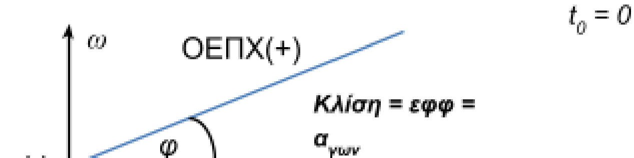
Μόνο από αυτό το διάγραμμα δε μπορούμε να βρούμε το είδος της κίνησης. Πρέπει να γνωρίζουμε και την κατεύθυνση της ταχύτητας.

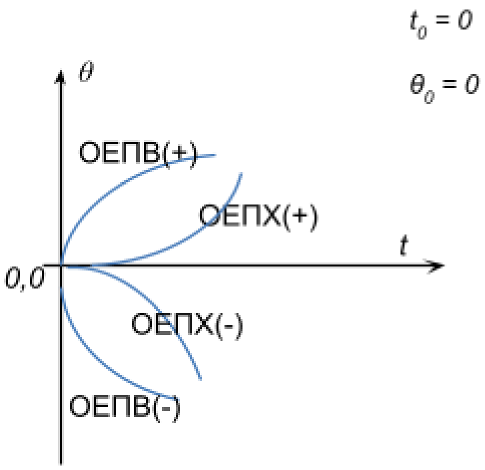




Δ) Στροφική Ομαλά Μεταβαλλόμενη







6) Σύνθετη κίνηση

Όταν ένα στερεό μεταφέρεται και ταυτόχρονα αλλάζει προσανατολισμό (περιστρέφεται), λέμε ότι εκτελεί σύνθετη κίνηση.
Η κίνηση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία μιας μεταφορικής,με την ταχύτητα ενός οποιουδήποτε σημείου Οκαι μιας στροφικής περί άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο.
Στο σχολικό βιβλίο μελετάμε την επίπεδη κίνηση, στην οποία ο άξονας περιστροφής είναι κύριος άξονας αδράνειας του στερεού, έχει σταθερή διεύθυνση και όλα τα διανυσματικά μεγέθη που περιγράφουν τη στροφική του κίνηση έχουν τη διεύθυνση του άξονα.
Ένα σημείο **που εξυπηρετεί** για τη μελέτη της σύνθετης κίνησης είναι το κέντρο μάζας (cm). Τότε η σύνθετη κίνηση μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία
α) μιας μεταφορικής κίνησης, για την περιγραφή της οποίας μελετάμε την κίνηση του κέντρου μάζας του στερεού και
β) μιας στροφικής περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας.

Παράδειγμα:

Κύλιση χωρίς ολίσθηση ομογενούς τροχού με επιτάχυνση κέντρου μάζας $\vec{\alpha}_{cm}$

Το κέντρο μάζας (cm) ομογενούς τροχού συμπίπτει με το γεωμετρικό του κέντρο C. Θεωρούμε την κίνηση ως μεταφορική, με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του C και στροφική γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο του τροχού, που διέρχεταιαπό το C.

Η ταχύτητα οποιουδήποτε σημείου Σ θα είναι

$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$, όπου $\left|\upsilon_{\gamma\rho}\right| = \left|\omega\right| \cdot r$, όπου rη ακτίνα περιστροφής του.

Το μέτρο της ταχύτητας θα είναι $\left|\upsilon\right| = \sqrt{\upsilon_{cm}{}^{2} + \upsilon_{\gamma\rho}{}^{2} + 2\left|\upsilon_{cm}\right| \cdot \left|\upsilon_{\gamma\rho}\right| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}$

όπου θ η γωνία στροφής του τροχού και η διεύθυνση βρίσκεται από τη σχέση

$$\varepsilon\varphi = \frac{|\upsilon_{\gamma\rho}|\eta\mu\theta}{|\upsilon_{\gamma\rho}|\sigma\upsilon\nu\theta + |\upsilon_{cm}|}$$

Η επιτάχυνση οποιουδήποτε σημείου θα είναι

$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_{cm} + \vec{a}_{\varepsilon} + \vec{\alpha}_{\kappa}$, όπου $\left|\alpha_{\varepsilon}\right| = \left|\alpha_{\gamma\omega\nu}\right| \cdot r$ και $\left|\alpha_{\kappa}\right| = \dfrac{\upsilon_{\gamma\rho}{}^{2}}{r} = \omega^{2} \cdot r$

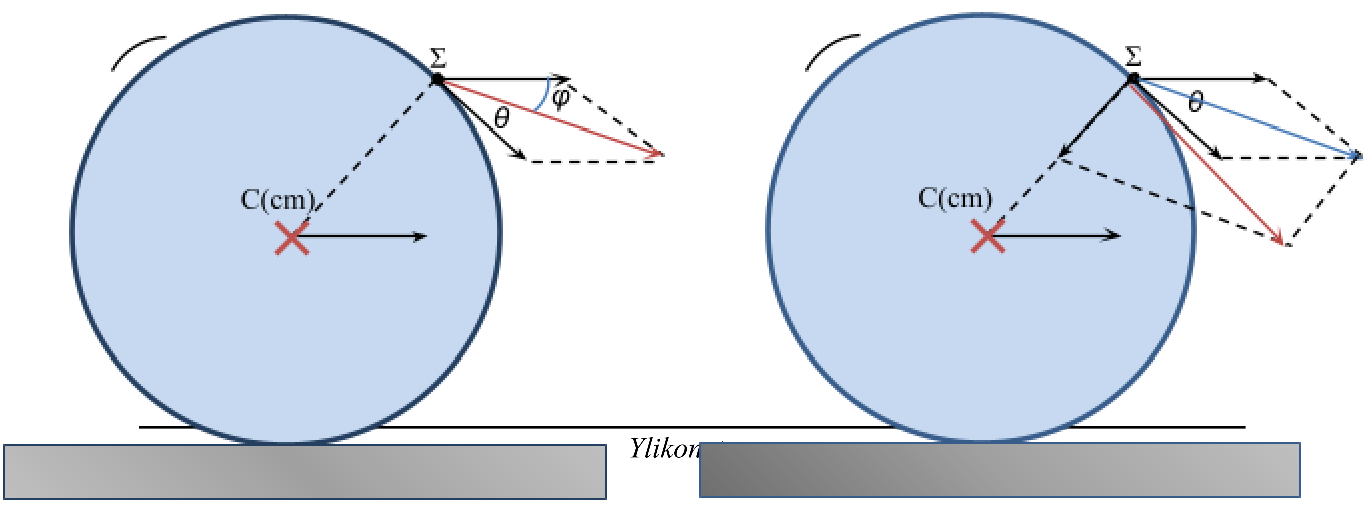
Επιπλέον η κύλιση χωρίς ολίσθηση επιβάλλει το κατώτερο σημείο Α του τροχού να έχει την ταχύτητα της επιφάνειας επαφής. Αν είναι το ακίνητο έδαφος, τότε $\vec{\upsilon}_{A} = 0$.

Η τελευταία σχέση οδηγεί στις εξισώσεις:

$|\Delta x_{cm}| = R \cdot |\Delta\theta|$, $\left|\upsilon_{cm}\right| = \left|\omega\right| \cdot R$ και $\left|\alpha_{cm}\right| = \left|a_{\gamma\omega\nu}\right| \cdot R$ όπου Rη ακτίνα του τροχού.

Στο παρακάτω σχήμα 4 έχει σχεδιαστεί σαν παράδειγμα, μια τυχαία χρονική στιγμή ένας τροχός που κυλίεται επιταχυνόμενος χωρίς ολίσθηση. Φαίνονται τα διανύσματα των ταχυτήτων και επιταχύνσεων, ενός τυχαίου σημείου Σ, που αντιστοιχούν στις συνιστώσες κινήσεις που θεωρήσαμε ότι εκτελεί το στερεό.

σχήμα 4



Συνήθως η θέση που μας ζητούν ταχύτητα ή επιτάχυνση είναι η ανώτερη, η κατώτερη και οι δύο πλαϊνές, οπότε η σύνθεση είναι σαφώς ευκολότερη…

Εφαρμογές-links

Σύνθετη κίνηση οριζόντιου δίσκου
Η σύνθετη κίνηση, η μεταφορική ταχύτητα και η ταχύτητα του κέντρου μάζας
Ένα βαράκι …κυλάει
Η ράβδος πέφτει κατακόρυφα
Η γωνιακή ταχύτητα και το cm ενός στερεού.

και πολύ περισσότερες στην: Κινηματική Στερεού

Ανδρέας Ριζόπουλος