SciencesPo

STATISTIQUES APPLIQUÉES AUX SCIENCES HUMAINES & SOCIALES

Niveau introductif

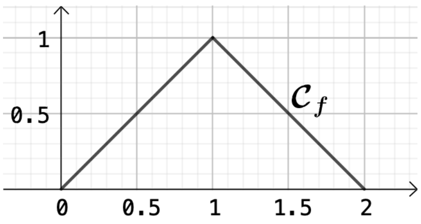
EXERCICES Séances 5 et 6

VARIABLE ALÉATOIRES RÉELLES CONTINUES

DENSITÉS

Exercice 1

Soit la fonction f une fonction nulle en dehors de l'intervalle $[0; 2]$ et sa représentation graphique C_f ci-contre.



1. Justifier que f est une densité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer les probabilités suivantes.

$P(0 \leq X \leq 1)$ $P(1 \leq X \leq 2)$ $P(X = 1)$ $P(0,5 < X < 1,5)$

Solution

1. f est clairement **positive**. Il faut donc montrer que son intégrale sur R égale 1 pour montrer que f est une densité.

$$\int_R f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx = \frac{2\times1}{2} = 1$$

En utilisant la formule pour calculer l'aire d'un triangle.

Remarque

On aurait pu aussi calculer l'expression de f et calculer plus rigoureusement son intégrale.

$$f(x) = \{x\ si\ 0 \leq x \leq 1\ 2 - x\ si\ 1 \leq x \leq 2\ 0\ sinon$$

On en déduit que

$$\int_R f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 (2 - x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$

$$\int_R f(x)dx = \frac{1}{2} + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} = 1$$

2. Soit X une variable aléatoire de densité f.

$$P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 (2 - x)dx = \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = (4 - 2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 1) = \int_1^1 f(x)dx = 0$$

$$P(0,5 < X < 1,5) = \int_{0,5}^{1,5} f(x)dx = \int_{0,5}^1 xdx + \int_1^{1,5} (2 - x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0,5}^1 + \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^{1,5}$$

$$P(0,5 < X < 1,5) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + 3 - \frac{9}{8} - 2 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{10}{8} = \frac{8}{4} - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

Remarque

On aurait pu trouver tous ces résultats (plus facilement) avec des arguments géométriques.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur R par

$$f(x) = \{\frac{1}{2}x \; si \; x\in[0; 2] \; 0 \; sinon$$

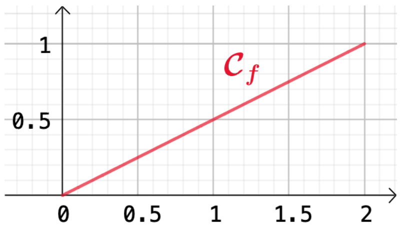
1. Représenter f et montrer que f est une densité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer les probabilités suivantes.

$P(X\leq 1)$ $P(X > 1)$ $P(0,5 < X < 1,5)$

3. Donner une expression la fonction de répartition F_X de X (On rappelle que, soit x un réel, $F_X(x) = P(X\leq x)$).

Solution



1. Montrer que f est une densité. f est clairement **positive**.

$$\int_R f(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{2}xdx = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^2 = 1$$

f est donc bien une densité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f.

$$P(X\leq 1) = \int_0^1 \frac{1}{2}xdx = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X\leq 1) = \frac{3}{4}$$

$$P(0,5 < X < 1,5) = \int_{0,5}^{1,5} \frac{1}{2}xdx = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_{0,5}^{1,5} = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

3. La fonction de répartition F_X de X est définie sur R par

$$F_X(x) = \{0 \; si \; x\leq 0 \; \frac{1}{4}x^2 \; si \; 0\leq x\leq 2 \; 1 \; si \; x\geq 2$$

LOI UNIFORME

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle [1; 5].

1. Donner l'expression d'une densité de X.

2. Calculer $P(X < 2)$, $P(2\leq X\leq 4)$ et $P(X > 3)$.

3. Quelle est l'espérance mathématique de X ?

4. Quelle est la probabilité que X soit supérieur à 3 sachant que X est supérieur à 2 ?

Solution

1. La densité f de X est définie sur R par

$$f(x) = \{\frac{1}{5-1} = \frac{1}{4} \; si \; x\in[1; 5] \; 0 \; sinon$$

2. Je calcule

$$P(X < 2) = \int_1^2 \frac{1}{4}dx = \left[\frac{1}{4}x\right]_1^2 = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(2\leq X\leq 4) = \int_2^4 \frac{1}{4}dx = \left[\frac{1}{4}x\right]_2^4 = \frac{4}{4} - \frac{2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(X > 3) = \int_3^5 \frac{1}{4}dx = \left[\frac{1}{4}x\right]_3^5 = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

3. L'espérance mathématique de X égale

$$E(X) = \frac{1+5}{2} = 3$$

4. La probabilité que X soit supérieur à 3 sachant que X est supérieur à 2 égale

$$P_{X\geq 2}(X\geq 3) = \frac{P((X\geq 3)\cap(X\geq 2))}{P(X\geq 2)} = \frac{P(X\geq 3)}{P(X\geq 2)} = \frac{\int_3^5 \frac{1}{4}dx}{\int_2^5 \frac{1}{4}dx} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Exercice 4

On note X le temps d'attente, en minutes, avant l'arrivée du métro dans une certaine station et on suppose que X suit la loi uniforme sur $[0; 6]$.

1. Déterminer l'expression d'une densité de la variable aléatoire X.

2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit compris entre 2 et 5 minutes ?

3. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes ?

4. Quelle est le temps d'attente moyen dans cette station ?

Solution

1. La densité f de X est définie sur R par

$$f(x) = \{\frac{1}{6-0} = \frac{1}{6}\ si\ x\in[0; 6]\ \ 0\ sinon$$

2. La probabilité que le temps d'attente soit compris entre 2 et 5 minutes est de

$$P(2\leq X\leq 5) = \int_2^5 \frac{1}{6}dx = \left[\frac{1}{6}x\right]_2^5 = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3. La probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes est de

$$P(X\geq 3) = \int_3^6 \frac{1}{6}dx = \left[\frac{1}{6}x\right]_3^6 = \frac{6}{6} - \frac{3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

4. Le temps d'attente moyen dans cette station est de **3 minutes**.

$$E(X) = \frac{0+6}{2} = 3$$

Exercice 5

Charline a invité Jérôme chez elle. Mais sa mère doit arriver dans les 10 minutes. Charline et Jérôme vont continuer à regarder des vidéos 3 minutes. Ensuite, ils vont goûter pendant 2 minutes. Enfin, ils discuteront pendant 5 minutes. Le temps T que va mettre la mère de Charline à arriver suit une loi uniforme.

1. Quelle est la probabilité qu'elle arrive après qu'ils aient goûté ?

2. Quelle est la probabilité qu'elle arrive pendant leur goûter ?

3. En moyenne, dans combien de minutes la mère de Charline arrive-t-elle ?

Solution

$T\sim U([0; 10])$

1. La probabilité qu'elle arrive après qu'ils aient goûté est de

$$P(T\geq 5) = \int_5^{10} \frac{1}{10}dx = \left[\frac{1}{10}x\right]_5^{10} = \frac{10}{10} - \frac{5}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

2. La probabilité qu'elle arrive pendant leur goûter est de

$$P(3\leq T\leq 5) = \int_3^5 \frac{1}{10}dx = \left[\frac{1}{10}x\right]_3^5 = \frac{5}{10} - \frac{3}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

3. En moyenne, la mère de Charline arrive au bout de **5 minutes**.

$$E(T) = \frac{0+10}{2} = 5$$

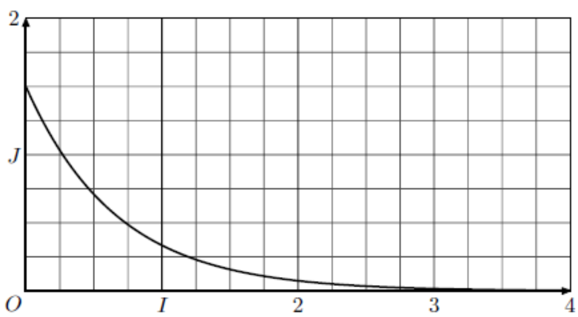
LOI EXPONENTIELLE

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. On rappelle que la fonction de densité de la variable X est définie sur R par

$$f(x) = \{\lambda e^{-\lambda x}\ si\ x\in[0; +\infty[\ 0\ sinon$$

La courbe donnée ci-contre représente la fonction densité f.



1. Interpréter graphiquement $P(X\leq 1)$.

2. Indiquer comment trouver λ sur le graphique.

3. Calculer $E(X)$.

Solution

1. Graphiquement, $P(X\leq 1)$ représente l'aire sous la courbe de f comprise entre les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

2. $f(0) = \lambda\approx 1,5$ d'après le graphique.

3. $E(X) = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{1}{1,5} \approx \frac{2}{3}$

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 0,2.

1. Calculer les probabilités suivantes.

$P(0\leq X\leq 1)$ $P(X\leq 2)$ $P(X > 2)$ $P(1\leq X\leq 10)$

2. Déterminer $E(X)$.

Solution

1. Je calcule les probabilités suivantes.

$P(0\leq X\leq 1) = e^{-0,2\times 0} - e^{-0,2\times 1} = 1 - e^{-0,2}\approx 0,181$

$P(X\leq 2) = 1 - e^{-0,2\times 2} = 1 - e^{-0,4}\approx 0,330$

$P(X > 2) = 1 - P(X\leq 2) = e^{-0,4}\approx 0,670$

$P(1\leq X\leq 10) = e^{-0,2\times 1} - e^{-0,2\times 10} = e^{-0,2} - e^{-2}\approx 0,683$

2. $E(X) = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{1}{0,2} \approx 5$

Exercice 8

La durée de vie T en année, d'un appareil avant la première panne suit une loi exponentielle de paramètre

$$\lambda = 0,3$$

1. Quelle est la probabilité que l'appareil ne connaisse pas de panne au cours des trois premières années ?

2. Quelle est la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la deuxième année ?

Solution

1. La probabilité que l'appareil ne connaisse pas de panne au cours des trois premières années est de

$$P(T\geq 3) = e^{-0,3\times 3} = e^{-0,9}\approx 0,407$$

2. La probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la deuxième année est de

$$P(T\leq 2) = 1 - e^{-0,3\times 2} = 1 - e^{-0,6}\approx 0,451$$

Exercice 9

A un standard téléphonique, on entend : « Votre temps d'attente est estimé à 5 minutes ». Ce temps d'attente en minute, noté T, est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle et l'estimation annoncée correspond à l'espérance de T. Vous avez déjà attendu plus d'une minute.

Quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 minutes au total ?

Solution

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = 5\Leftrightarrow\lambda = \frac{1}{5} = 0,2\Leftrightarrow T\sim E(0,2)$$

La probabilité d'attendre plus de 10 minutes au total sachant que l'on a déjà attendu une minute est

$P_{T\geq 1}(T\geq 10) = \frac{P((T\geq 10)\cap(T\geq 1))}{P(T\geq 1)} = \frac{P(T\geq 10)}{P(T\geq 1)} = \frac{e^{-0,2\times 10}}{e^{-0,2\times 1}} = e^{-0,2\times(10-1)} = e^{-0,2\times 9} = e^{-1,8}\approx 0,933$

Remarque

On retrouve la même valeur que si l'on avait attendu 9 minutes : c'est une propriété de la loi exponentielle.

Exercice 10

Un astronome effectue des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes. Il modélise ensuite ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda = 0,2$. L'astronome a prévu d'observer le ciel pendant deux heures.

Estimer le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie.
Solution
Le temps d'attente moyen entre deux étoiles filantes est de 5 minutes. L'astronome peut donc espérer voir **24 étoiles filantes** lors d'une sortie de $2h = 120\ min$.

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = 5\ \frac{120}{5} = 24$$