ESIM 95 Epreuve P'

Premier problème

1.1 Champ gravitationnel au point M(r,λ)

$\vec{g} = -\{\vec{N}v = g_r\vec{u}_r + g_\lambda\vec{u}_\lambda\ g_r = -\frac{GM}{r^2} + \frac{3}{r^4}GM\{e\ 'R^2\left(\frac{1-3sin^2\lambda}{2}\right)g_\lambda = -\ 3GMR^2\frac{e'}{r^4}sin\lambda cos\lambda$

(1)

1.2 Application numérique

pour r = R, $\lambda = 45°$ $\quad \tan\varepsilon = \dfrac{g_\lambda}{g_r}$

$g_r = -9,790244 \quad \text{m.s}^{-2}$

$g_\lambda = -1,591174 \quad \text{m.s}^{-2}$

$\varepsilon = 9,31.10^{-2} \quad \text{rd.s}^{-1}$

2.1 Repère géocentrique

matérialisé par un trièdre d'origine O, centre d'inertie de la Terre, dont les axes ont des directions fixes dans le référentiel de Copernic C.

Il est animé, dans C, d'un mouvement de translation elliptique qui obéit aux lois de Kepler.

Il n'est pas galiléen, mais galiléen approché.

2.2 Altitude de SPOT

dans l'approximation du potentiel de gravitation à symétrie sphérique, le mouvement est circulaire uniforme de période T.

$r^3 = GM\dfrac{T^2}{4\pi^2}$ et h, altitude = r-R.

A.N.: h = 828 km Période T =6 088 secondes

2.3 Ici, on suppose le satellite en mouvement <u>circulaire</u> sur un cercle centré en O, et l'on garde le potentiel V à symétrie sphérique. Dans le référentiel géocentrique, la Terre tourne autour de $\vec{k}$ d'un angle β durant 71 périodes du satellite..

$$\beta = \frac{71}{369} \times 2\pi \times 26$$

, ce qui représente 5,00271 tours.

soit:

$MO_1M_1 = 2,71.10^{-3} \times R\cos\lambda$

$MO_1M_1 = 108,6\cos\lambda \quad \text{km}$

2.4 Choix de la période de révolution..

117 km permet un certain "recouvrement" des zones observées par SPOT au niveau de l'équateur.

Le choix de la période (26/369 jours) permet de survoler tous les points de la Terre à la fréquence d'un passage tous les 26 jours.

3.1 Théorême du moment cinétique dans R_0.

Le satellite est assimilé à un <u>point matériel</u> P de moment cinétique $\vec{\sigma}_0$ dans R_0 (galiléen).

$\frac{d}{dt}s_0^{\rightarrow}]_{R_0} = OP^{\rightarrow}\grave{U}mg^{\rightarrow}_P \qquad \frac{d}{dt}s_0^{\rightarrow}]_{R_0} = OP^{\rightarrow}\grave{U}mg^{\rightarrow}_\lambda$ (2)

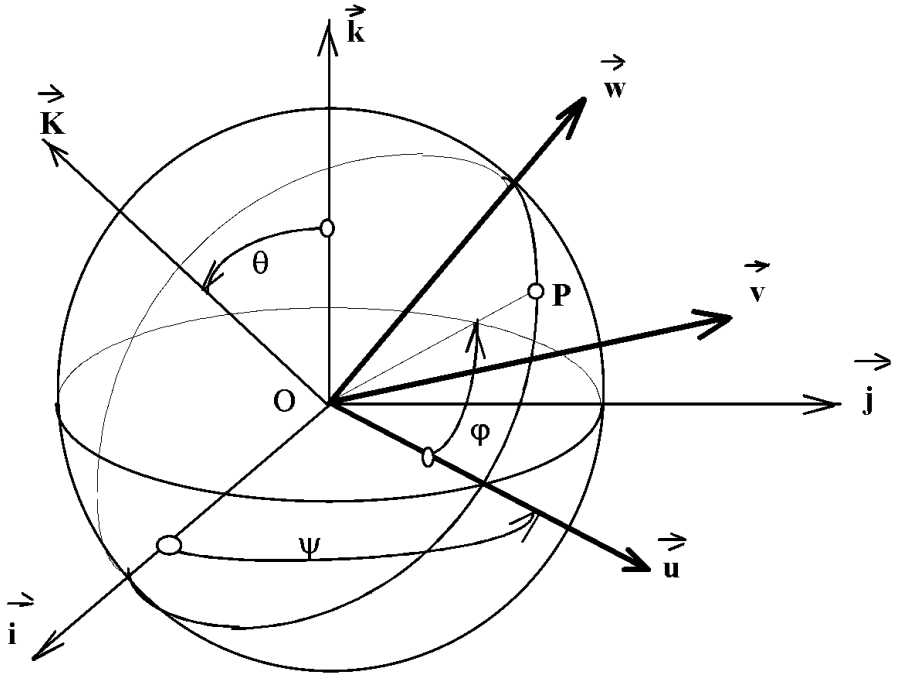
3.2 Trajectoire non perturbée: le terme "correctif" du potentiel est "infiniment" petit; son effet durant

un tour est presque nul, alors:

$$\sigma_0 = cte = mr^2 \dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = cte = \Omega_0$$

3.3 $\vec{\sigma}_0$ porté par $\vec{k}$ de R2 donc normal à $\vec{\mathrm{OP}}$.
Changement de repère:
$\frac{d}{dt}\vec{s}_0]_{R_0} = \frac{d}{dt}\vec{s}_0]_{R_2} + \vec{w} \grave{U} \vec{s}_0$ - $\vec{0}$
(3)



d'où $\vec{\omega} \wedge \vec{\sigma}_0 = \vec{\mathrm{OP}} \wedge m\vec{g}_\lambda$ à multiplier vectoriellement par $\vec{\sigma}_0$
$\vec{w}\vec{s}_{0^2} - \vec{s}_0\left(\vec{w}\cdot\vec{s}_0\right) = \vec{OP}\left(mg_\lambda \cdot \vec{s}_0\right) - m\vec{g}_\lambda\left(\vec{OP}\cdot\vec{s}_0\right)$ - - 0
(4)

$$\vec{\omega} = \vec{\mathrm{OP}}\frac{m\vec{g}_\lambda \bullet \vec{\sigma}_0}{\sigma_0^2}$$

(5)

3.4 $\sigma_0 = mr^2\Omega_0$ par approximation sur un tour si $\dot{\psi} << \dot{\varphi}$

$$\vec{K} \bullet \vec{e}_\lambda = \frac{\cos\theta}{\cos\lambda} \quad \text{et} \quad \sin\lambda = \sin\theta.\sin\varphi$$

$$\vec{u}_r = \frac{\vec{\mathrm{OP}}}{r}$$

$$\vec{\omega} = -\vec{u}_r . \frac{GM}{r^5} . \varepsilon' . R^2 . \frac{1}{\Omega_0} . 3 \sin\theta \cos\theta \sin\varphi \qquad (6)$$

3.5 $\vec{\omega}_{R2/R0}$, par composition des vecteurs-rotation, est:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\vec{k} \qquad (7)$$

3.5.a. Valeur moyenne de $\dot{\theta}$ avec $\vec{u}_r \bullet \vec{u} = \cos\varphi$

$$\vec{\omega} \bullet \vec{u} = \dot{\theta} = -\frac{3}{2}\frac{GM}{r^5} . \varepsilon' . R^2 . \frac{1}{\Omega_0} . \sin 2\theta \sin\varphi \cos\varphi \qquad (8)$$

Or, la valeur moyenne de sin 2 ϕ sur un tour est nulle. Le mouvement de nutation correspond à des oscillations faibles de valeur moyenne nulle.

$< \dot{\theta} >= 0$.

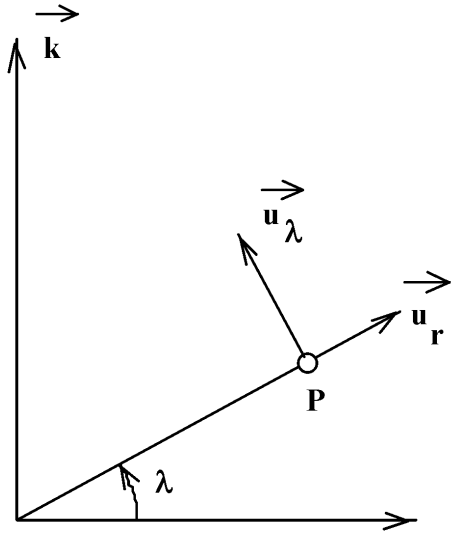
En moyenne, θ est constant.

3.5.b $\vec{\omega} \bullet \vec{K} = 0$, conforme à l'hypothèse $\dot{\varphi} = cte = \Omega_0$.

3.5.c Valeur moyenne de $\dot{\psi}$.

$$\dot{\psi} = \vec{\omega} \bullet \vec{k} \qquad \text{avec} \qquad \vec{u}_r \bullet \vec{k} = \sin\lambda = \sin\theta \sin\varphi$$

$$\dot{\psi} = -\frac{3}{2}\frac{GM}{r^5} . \varepsilon' . R^2 . \frac{1}{\Omega_0} . \sin 2\theta \sin^2\varphi \sin\theta \qquad (9)$$



La valeur moyenne sur un tour de $\sin^2\varphi$ étant 1/2, alors:

$$\dot{\psi} = -\frac{3}{2}\frac{GM}{r^5}.\varepsilon'.R^2.\frac{1}{\Omega_0}.\sin^2\theta\cos\theta \qquad (10)$$

Il y a "précession" du plan de l'orbite du satellite autour de $\vec{k}$, et l'on va choisir $\dot{\psi}$ pour que cette précession, due au terme "perturbateur " du potentiel gravitationnel compense exactement le mouvement apparent du soleil autour de la Terre (on aura noté que le sens de la précession est rétrograde).

3.6.a En prenant l'année de 365,25 jours, $\dot{\psi}$ = 2π/365,25 rd/jour.

permet de calculer l'inclinaison θ pour laquelle le satellite est **héliosynchrone.**

$$\cos\theta\sin^2\theta = -0,152$$

$$\theta = 98,7°$$

3.6.b Il est important pour un satellite d'observation que les points de la Terre photographiés le soient à chaque fois, ici tous les 26 jours, dans les mêmes conditions d'éclairement, ce qui est réalisé dans ce modèle de potentiel gravitationnel du type ellipsoïde.