Fonctions : un exemple historique

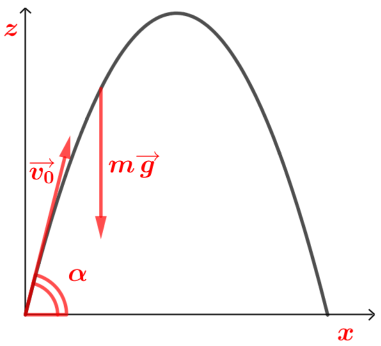
On veut calculer l'altitude $h(x)$ d'un boulet de canon de masse m en fonction de la distance x qu'il a parcourue. On note $x(t)$ la distance parcourue par le boulet au bout de la durée t en s qui s'écoule depuis le tir. On note $z(t)$ l'altitude du boulet au bout de la durée t en s qui s'écoule depuis le tir. On suppose que l'angle de tir avec le sol est α et que la vitesse initiale du boulet est v_0 (en $m \bullet s^{-1}$). On appelle t la durée en s qui s'écoule depuis le tir.

On suppose que

$$x(0) = 0$$
$$z(0) = 0$$

La résistance de l'air est négligée. On appelle g l'accélération de la pesanteur terrestre

$$g = 9,80665\ m{\cdot}s^{-2}$$



La relation fondamentale de la dynamique permet d'écrire que, soit $\vec{v}$ le vecteur vitesse du boulet et $\vec{g}$ le vecteur qui caractérise la pesanteur terrestre,

$$m\vec{g} = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Soit encore

$$\vec{g} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

On en déduit, dans le repère ci-contre, que

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = (0 \ \ - g\ )$$

Remarquons que dans ce repère

$$\vec{v}(0) = \vec{v_0} = \left(v_0 \cos cos\, \alpha \ \ v_0 \sin sin\, \alpha\ \right)$$

En intégrant et en tenant compte des conditions initiales, on obtient

$$\vec{v}(t) = \left(v_0 \cos cos\, \alpha \ \ - gt + v_0 \sin sin\, \alpha\ \right)$$

Et, sachant que

$$\frac{d}{dt}(x(t)\ z(t)\ ) = \vec{v}(t)$$

Et en intégrant, on obtient

$$(x(t)\ z(t)\ ) = \left(v_0 \cos cos\, \alpha\, t \ \ - \frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin sin\, \alpha\, t\right)$$

On déduit que

$$x(t) = v_0 \cos cos\, \alpha\, t\ soit\ t = \frac{x(t)}{v_0 \cos cos\, \alpha}$$

Soit, en substituant dans $z(t)$,

$$z(t) = -\frac{g}{2v_0^2 \alpha}x^2(t) + x(t)\frac{\sin sin\, \alpha}{\cos cos\, \alpha}$$

On déduit que

$$h(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \alpha}x^2 + x \tan tan\, \alpha$$

Soit

$$h(x) = \frac{-g}{2v_0^2 \alpha}x\left(x - \frac{2v_0^2 \cos cos\, \alpha \sin sin\, \alpha}{g}\right)$$

On remarque ainsi que la portée du canon est de

$$x_{max} = \frac{2v_0^2 \cos cos\, \alpha \sin sin\, \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin sin\, 2\alpha}{g}$$

Elle ne dépend pas de la masse du boulet et atteint son maximum si α = 45°. L'altitude maximale est atteinte pour

$$x_h = \frac{v_0^2 \cos cos\, \alpha \sin sin\, \alpha}{g}$$

La hauteur ainsi atteinte est de

$$h_{max} = \frac{v_0^2 \alpha}{2g}$$

Historiquement, la balistique (science qui étudie le mouvement d'un projectile) intéresse les scientifiques depuis l'Antiquité et Aristote. Buridan (1292-1363), Tartaglia (1499-1557), Galilée (1564-1642) et enfin Torricelli (1608-1647) ont permis de montrer les résultats précédents. Malheureusement, négliger la résistance de l'air ne permet pas d'obtenir un modèle réaliste. Il faudra attendre 1742 et le traité de Benjamin Robins intitulé *New Principles of Gunnery* pour obtenir un modèle qui peut s'appliquer concrètement. Malgré tout, c'est seulement en 1840, avec les travaux de la commission de Metz, que l'on établit que, pour les boulets sphériques de l'époque, la forme correcte de la résistance de l'air était de la forme

$$av^2 + bv^3$$

Par ailleurs, pour les projectiles envoyés sur de longues distances et à des altitudes importantes, il faut en plus tenir compte de la force de Coriolis (1792-1843) due à la rotation de la Terre vers l'Est et qui va donc dévier les projectiles vers l'Est et du fait que l'attraction terrestre diminue avec l'altitude. Si l'on tient compte de ces paramètres, la résolution du problème se complique nettement.

Par la suite, reprenons le problème initial en tenant compte de la résistance de l'air, opposée à la vitesse de la fusée, donnée par

$$\vec{f} =- km\|\vec{v}\|\vec{v}$$

Où k est une constante qui dépend du projectile

$$k = \frac{1}{2}C_x \times S$$

S est la surface frontale du projectile (en m^2) et C_x désigne le coefficient de trainée (voir source II).

On obtient alors le schéma ci-contre. La relation fondamentale de la dynamique permet d'écrire que, soit $\vec{v}$ le vecteur vitesse du boulet et $\vec{g}$ le vecteur qui caractérise la pesanteur terrestre,

$$m\vec{g} - km\|\vec{v}\|\vec{v}(t) = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Soit encore

$$\vec{g} - k\|\vec{v}\|\vec{v}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Posons alors

$$\vec{v}(t) = \left(v_x(t)\ v_z(t)\right)$$

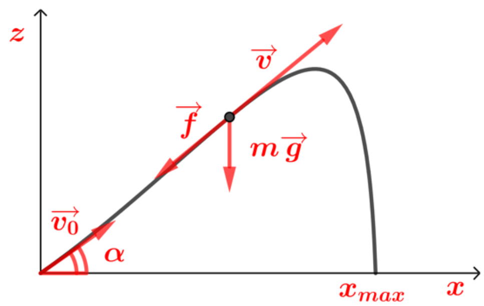
On en déduit, dans le repère ci-contre, que

$$\left(v'_x(t)\ v'_z(t)\right) = \left(-\ kv_x^2(t)\quad -\ g - kv_z^2(t)\right)$$

En intégrant, on obtient,

$$\vec{v}(t) = \left(\frac{1}{kt+c_1}\quad -\sqrt{\frac{g}{k}}\tan tan\left(\sqrt{gk}\left(t - c_2\right)\right)\right)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes qui dépendent des conditions initiales.



Remarquons que, dans ce repère,

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = \left(v_0 \cos cos\ \alpha\ \ v_0 \sin sin\ \alpha\right)$$

On obtient donc

$$c_1 = \frac{1}{v_0 \cos cos\ \alpha}$$

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{gk}}\left(\arctan\ arctan\left(\frac{v_0\sqrt{k}\sin sin\ \alpha}{\sqrt{g}}\right)\right)$$

Et, sachant que

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)\ z(t)\right) = \vec{v}(t)$$

Et, en intégrant et en tenant compte des conditions initiales, on obtient

$$\left(x(t)\ z(t)\right) = \left(\frac{1}{k}\ln ln\left(kt + c_1\right) - \frac{1}{k}\ln ln\left(c_1\right)\quad - \frac{1}{k}\ln ln\left(\cos cos\left(c_2\sqrt{gk}\right)\right) + \frac{1}{k}\ln ln\left(\cos cos\left(\sqrt{gk}\left(t - c_2\right)\right)\right)\right)$$

On peut alors, comme dans le premier cas, exprimer t en fonction de $x((t)$ et remplacer dans $z(t)$. On obtient ainsi

$$x(t) = \frac{1}{k}\ln ln\left(\frac{kt+c_1}{c_1}\right) \Leftrightarrow t = \frac{c_1}{k}\left(e^{kx(t)} - 1\right)$$

Soit

$$z(t) = -\frac{1}{k}\ln ln\left(\cos cos\left(c_2\sqrt{gk}\right)\right) + \frac{1}{k}\ln ln\left(\cos cos\left(\sqrt{gk}\left(\frac{c_1}{k}\left(e^{kx(t)} - 1\right) - c_2\right)\right)\right)$$

On déduit que

$$h(x) = -\frac{1}{k}\ln ln\left(\cos cos\left(c_2\sqrt{gk}\right)\right) + \frac{1}{k}\ln ln\left(\cos cos\left(\sqrt{gk}\left(\frac{c_1}{k}\left(e^{kx} - 1\right) - c_2\right)\right)\right)$$

On remarque ainsi que la portée x_{max} du canon vérifie l'équation

$$c_2 = \frac{c_1}{k}\left(e^{kx_{max}} - 1\right) - c_2 \Leftrightarrow e^{kx_{max}} = \frac{2kc_2}{c_1} - 1$$

Soit

$$x_{max} = \frac{1}{k}\ln ln\left(\frac{2kc_2}{c_1} + 1\right)$$

On peut alors représenter la courbe en s'aidant d'un fichier GeoGebra (source IX).

Remarque

On voit que, dans ce cas, l'angle de 45° n'est pas forcément le meilleur pour avoir la plus grande portée.

Sources

I. http://www.adilca.com/FORCE_DE_CORIOLIS.pdf
II. http://www.adilca.com/AERODYNAMIQUE_AUTOMOBILE.pdf
III. https://fr.wikipedia.org/wiki/Evangelista_Torricelli
IV. https://fr.wikipedia.org/wiki/Balistique_extérieure
V. https://fr.wikipedia.org/wiki/Galilée_(savant)
VI. https://fr.wikipedia.org/wiki/Balistique
VII. https://media.eduscol.education.fr/file/Formation_continue_enseignants/15/8/StFlour2007_Etienne_110158.pdf
VIII. Problèmes résolus de Mécanique du point (H. Lumbroso), 1994 (Dunod)
IX. https://drive.google.com/file/d/1RHJsGulVyk6kySdfKe2o1Od6DM6Aot9C/view?usp=sharing