

**Correction épreuve Physique (Filière PCSI) Mines Albi, Alès, Douai, Nantes  
Mai 2004.**

Proposée par Christian Giraud (christian.giraud@ac-caen.fr) et Thierry Pré (thierry.pre@prepas.org)

**IA Modélisation d'un résonateur à quartz**

**IA1a)** On applique le principe fondamental de la dynamique à l'élément de masse  $m$  en projection sur le vecteur  $x$  :

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + \beta V \Rightarrow \ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{\beta}{m}V$$

**IA1b)**  $C_p \approx 8 \cdot 10^{-12} \text{ F}$  ;  $q_1 = C_p V$

**IA1c)**  $q_2 = \gamma x \Rightarrow \ddot{q}_2 + \frac{h}{m}\dot{q}_2 + \frac{k}{m}q_2 = \frac{\gamma\beta}{m}V$

**IA1d)** On applique la loi des mailles :  $V = R \frac{dq_2}{dt} + \frac{q_2}{C} + L \frac{d^2 q_2}{dt^2} \Rightarrow \ddot{q}_2 + \frac{R}{L}\dot{q}_2 + \frac{1}{LC}q_2 = \frac{1}{L}V$

$$L = \frac{m}{\gamma\beta}; C = \frac{\gamma\beta}{k}; R = \frac{h}{\gamma\beta}$$

Par identification avec l'équation précédente:

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{\frac{1}{jC_p\omega} (jL\omega + \frac{1}{jC_s\omega})}{\frac{1}{jC_p\omega} + jL\omega + \frac{1}{jC_s\omega}} = \frac{-j}{\alpha\omega} \times \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}} \text{ avec } \begin{cases} \alpha = C_p + C_s \\ \omega_a^2 = \frac{C_s + C_p}{LC_p C_s} \end{cases}$$

**IA2a)** Les deux éléments sont en parallèles :

$$\frac{\omega_a^2}{\omega_r^2} = \frac{C_s + C_p}{C_p} > 1 \Rightarrow \omega_a > \omega_r$$

Et

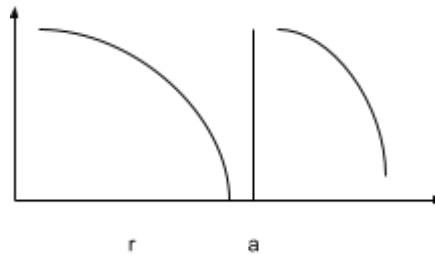
**IA2b)** Application numérique :  $f_a = 2,00 \text{ MHz}$  et  $f_r = 796 \text{ kHz}$ .

$$\underline{Z}_{AB} = jk \text{ avec } k > 0 \text{ssi } -\frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}} > 0 \Rightarrow \omega \in [\omega_r, \omega_a]$$

**IA2c)** Le quartz a un comportement inductif si contraire le comportement est capacitif.

$$Z_{AB} = \frac{1}{\alpha\omega} \left| \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}} \right|$$

**IA2d)**



$$\underline{H} = \frac{Rv}{Rv + \underline{Z}_{AB}}$$

**IA3a)** C'est un diviseur de tension :

$$\|\underline{H}\| = \frac{Rv}{\|Rv + \underline{Z}_{AB}\|} = \frac{Rv}{\sqrt{Rv^2 + Z_{AB}^2}} = \frac{1}{2} \text{ssi } Z_{AB} = Rv\sqrt{3}$$

**IA3b)**

(car  $\underline{Z}$  est imaginaire pure)

**IA3c)**  $Q = 15900$  et  $R = 157 \text{ ohm}$

**IB Principe d'une montre à quartz**

**IB1)** Une impulsion de sortie pour deux à l'entrée d'où  $f = 32768/2 = 16384 \text{ Hz}$

**IB2)**  $32768 = 2^{15}$  donc 15 compteurs sont nécessaires pour répondre à la question.

## IIA Propriétés thermodynamiques du verre

**IIA1a)** A pression constante, c'est la fonction d'état H enthalpie qui est utilisée.

**IIA1b)**  $\Delta H = \Delta H_{\text{eau}} + \Delta H_{\text{calorimètre}} + \Delta H_{\text{verre}} = (M + m_{\text{eq}})(t_{\text{eq}} - t_2)c_{\text{eau}} + m_{\text{verre}}(t_{\text{eq}} - t_1)c_{\text{verre}} = 0$  car il n'y a pas de

$$\text{transferts thermiques d'où } c_{\text{verre}} = \frac{-(M + m_{\text{eq}})(t_{\text{eq}} - t_2)c_{\text{eau}}}{m_{\text{verre}}(t_{\text{eq}} - t_1)c_{\text{verre}}} = 871 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad \text{car}$$

$$m_{\text{verre}} = \rho_{\text{verre}} \text{ Volume}_{\text{verre}} = d\rho_{\text{eau}} 40 \times \frac{4}{3} \pi \cdot 3$$

**IIA1c)**  $dU = TdS - PdV = TdS$  (isochore)  $= dH = CdT$  d'où  $dS = \frac{CdT}{T}$

$$\Delta S = (M + m_{\text{eq}})c_{\text{eau}} \ln \frac{t_{\text{eq}}}{t_2} + m_{\text{verre}}c_{\text{verre}} \ln \frac{t_{\text{eq}}}{t_1} = 0,765 \text{ J K}^{-1}$$

**IIA1d)**  $\Delta S > 0$

Or il n'y a pas d'échange thermique donc cette variation d'entropie est la création d'entropie et son signe positif implique l'irréversibilité de la transformation.

$$P(t) = \frac{U^2(t)}{R} = \frac{2U_{\text{eff}}^2 \cos^2(\omega t + \varphi)}{R} \Rightarrow P_J = \frac{U^2}{R}$$

**IIA2a)** car la moyenne d'un  $\cos^2$  sur une période vaut  $\frac{1}{2}$ .

**IIA2b)**  $P_{\text{th}} = -kS(T - T_0)$

$$\Rightarrow R = \frac{U^2}{kS(T - T_0)} = 432 \Omega$$

**IIA2c)** Le régime est permanent si  $P_{\text{th}} + P_J = 0$

**IIA2d)** Le premier principe de la thermodynamique entre  $t$  et  $t+dt$ :  $dH = CdT = \delta Q = P_{\text{th}} dt + P_J dt = -kS(T - T_0) dt + U^2 dt / R$

$$\text{d'où } \frac{dT}{dt} + \frac{kS}{C} T = \frac{U^2}{CR} + \frac{kS}{C} T_0$$

**IIA2e)** On reconnaît une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants et  $\tau = \frac{kS}{C}$  homogène à un temps et correspond à un ordre de grandeur du temps au bout duquel le régime permanent est établi.  $\tau \approx 1,79 \cdot 10^4 \text{ s}$

$$T(t) = Ke^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{U^2}{kSR} + T_0 = \left( \frac{U^2}{kSR} + T_0 \right) \left( 1 - e^{\frac{-t}{\tau}} \right) + T_0$$

**IIA2f)**

**IIA2g)** Le double vitrage et une isolation optimale permettent de réduire les pertes thermiques.

## IIB Propriétés mécaniques

**IIB1a)** On applique le principe fondamental de la dynamique au morceau de verre de masse  $m$  en équilibre :

$$ma = 0 = R + mg = R_t + R_N + mg(-\cos\alpha \hat{y} - \sin\alpha \hat{x}) \Rightarrow \begin{cases} R_t = mg \sin\alpha \\ R_N = mg \cos\alpha \end{cases}$$

**IIB1b)** Le non glissement tel qu'il est défini dans l'énoncé est donc réalisé ssi :  $\tan\alpha \leq \mu$

**IIB1c)** Application numérique :  $\mu = \tan 35^\circ = 0,7$

$$[E] = \frac{m^3 \text{ kg m s}^{-2}}{m \text{ m}^4} = \text{kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

**IIB2a)**

$$F = \frac{Ed^4}{7l^3} Y = kY$$

**IIB2b) et c)** force de rappel d'un ressort de longueur à vide nulle et de raideur

$$k = \frac{Ed^4}{7l^3} = 2,92 \cdot 10^{-4} \text{ Nm}^{-1}$$

**IIB2d)** L'élément différentiel d'énergie potentielle

$$dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = +FdY = kYdY \Rightarrow E_p = k \frac{Y^2}{2} (+\text{constante} = 0!) = \frac{Ed^4 Y^2}{14l^3}$$

$$E_m = E_p + E_c = \frac{Ed^4 Y^2}{14l^3} + \rho l d^2 \left( \frac{dY}{dt} \right)^2$$

**IIB2e)**

**IIB2f)** L'énergie mécanique se conserve car la seule force qui intervient dérive d'une énergie potentielle et est , donc, conservative. (Théorème de l'énergie mécanique) . Sa dérivée par rapport au temps est donc nulle d'où :

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + \frac{Ed^2}{14l^4 \rho} Y = 0$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Ed^2}{14l^4 \rho}} = 46 \text{ Hz}$$

**IIB2g) et h)**