

Partie I

$$Re = \frac{\mu LV}{\eta} = \frac{LV}{\nu}$$

I.A.1)a) On peut s'aider par exemple de l'expression générale du nombre de Reynolds :

$$\nu = \frac{\eta}{\mu}$$

dimension. La viscosité cinématique ν (η étant la viscosité dynamique) est de la dimension du produit LV : si l'on

admet que ν ne dépend que de l^* et de ν^* , on en déduit par homogénéité que :

$$\nu = \alpha l^* \nu^* = \frac{1}{3} l^* \nu^* \quad (1).$$

b) On sait que l'on a, pour une molécule d'air de masse $m = \frac{M}{N_a}$: $\frac{1}{2} m \nu^{*2} = \frac{3}{2} k_B T_a$ où $k_B = \frac{R}{N_a}$ est la constante de Boltzmann, donc :

$$\nu^* = \sqrt{\frac{3RT_a}{M}} \quad (2). \quad \text{Par ailleurs } \eta = \nu \cdot \mu \quad \text{où la masse volumique } \mu = m \cdot n^* = \frac{M}{N_a} n^* \quad (3).$$

D'après les relations précédentes :

$$\eta = \nu \cdot \mu = \frac{1}{3} l^* \nu \frac{M}{N_a} n^* = n^* l^* \frac{M}{3N_a} \sqrt{\frac{3RT_a}{M}} = n^* l^* \sqrt{\frac{MRT_a}{3N_a^2}} \quad (4), \text{ cqfd.}$$

c) On trouve : $\eta = 2,9 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}$ à $T_a = 300 \text{ K}$.

I.A.2) Si l'écoulement se fait bien selon $\vec{u}_z$, $\frac{dv}{dr} < 0$: ν est maximale (et positive) au centre, en $r = 0$, elle est nulle aux bords (en $r = a$) : $\nu(r)$ est donc bien une fonction décroissante.

Le cylindre considéré, « rapide », est freiné par viscosité par le fluide plus lent externe : $\vec{dF}_v$ est de sens opposé à $\vec{u}_z$.

Comme $\frac{dv}{dr} < 0$, on doit donc avoir : $\vec{dF}_v = + 2\pi r dz \eta \frac{dv}{dr} \vec{u}_z$ (5) soit : $\varepsilon = +1$.

I.A.3) Comme on ne tient pas compte de la pesanteur, l'élément de volume considéré ne subit que les forces de contact :

- la résultante de leurs composantes tangentielles est la résultante des forces de viscosité ;
- la résultante de leurs composantes normales est la résultante des forces de pression $\vec{dF}_p$. Mais, par symétrie, les forces de pression s'annulent sur la face latérale du cylindre, et n'agissent sur les deux bases. Ainsi :

$$\vec{dF}_p = \pi r^2 [P(z) - P(z + dz)] \vec{u}_z = -\pi r^2 \frac{dP}{dz}(z) dz \vec{u}_z \quad (6)$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à ce système (le cylindre élémentaire présenté dans l'énoncé, de masse dm)

donne donc : $dm \vec{a} = \vec{dF}_v + \vec{dF}_p$; or l'accélération est supposée négligeable, donc :

$$\vec{dF}_v + \vec{dF}_p = \vec{0} = \left[+ 2\pi r dz \eta \frac{dv}{dr} - \pi r^2 \frac{dP}{dz}(z) dz \right] \vec{u}_z \Rightarrow 2\eta \frac{dv}{dr} - r \frac{dP}{dz} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dr} = \frac{r}{2\eta} \frac{dP}{dz} \quad (7), \text{ cqfd.}$$

$$\nu(r) = \frac{r^2}{4\eta} \frac{dP}{dz} + cste$$

I.A.4) En prenant une primitive de la relation précédente, ; les phénomènes de viscosité imposent

qu'au contact du tuyau, la vitesse de l'écoulement est nulle, donc $\nu(r = a) = 0$, ainsi $\nu(r) = \frac{1}{4\eta} \frac{dP}{dz} (r^2 - a^2)$ (8).

I.A.5) Le débit volumique à travers une section (S) du tuyau est :

$$D_v = \iint_{(S)} \vec{\nu}(r) \cdot \vec{u}_z dS = \int_{r=0}^a 2\pi r \frac{1}{4\eta} \frac{dP}{dz} (r^2 - a^2) dr = -\frac{\pi a^4}{8\eta} \frac{dP}{dz} \quad (9), \text{ cqfd.}$$

I.A.6) Comme ρD_v est le débit massique, la relation proposée signifie qu'on retrouve le débit volumique d'entrée à travers n'importe quelle section : c'est comme si l'on avait affaire à un écoulement incompressible.

$$\rho = \frac{PM}{RT_a} = \frac{P}{rT_a} \quad (10)$$

I.B.1) On a classiquement :

$$\rho_a D_{va} = \rho(z) \cdot D_v(z) = -\frac{P(z)}{rT_a} \frac{\pi a^4}{8\eta} \frac{dP}{dz}$$

I.B.2) La question I.A.6) a montré que :

d'après les relations (9) et (10) . Ainsi :

$$D_{va} dz = -\frac{1}{\rho_a r T_a} \frac{\pi a^4}{8\eta} P(z) dP$$

; en intégrant cette relation entre la section d'entrée et celle de sortie, et en remarquant que

$$\rho_a r T_a = P_a, \text{ on obtient donc : } D_{va} l = \frac{\pi a^4}{16\eta P_a} (P^2 - P_a^2) \quad (11), \text{ qui donne bien l'expression proposée de } D_{va}.$$

I.B.3) Entre les dates t et $t+dt$, comme le débit est uniforme dans le tuyau, la masse $dm_f = \rho_a D_{va} dt$ quitte le récipient , donc

$$dm_f = \rho_a D_{va} dt = M(t) - M(t+dt) \Rightarrow \frac{dM}{dt} = -\rho_a D_{va} \quad (12).$$

$$M(t) = \rho V = \frac{P}{rT_a} V = \frac{\rho_a}{P_a} V \cdot P(t) \Rightarrow \frac{dM(t)}{dt} = \frac{\rho_a}{P_a} V \frac{dP}{dt} \quad (13).$$

I.B.4) La masse dans le récipient est

$$\frac{V}{P_a} \frac{dP}{dt} = -D_{va} = -\frac{\pi a^4}{16\eta P_a l} (P^2 - P_a^2)$$

I.B.5) En identifiant (12) et (13), on a :

d'après (11). En séparant les variables :

$$\frac{dP}{P_a^2 - P^2} = \frac{\pi a^4}{16\eta V l} dt = \frac{1}{2P_a} \left(\frac{1}{P_a - P} + \frac{1}{P_a + P} \right) dP, \text{ qu'on intègre entre les dates } t=0 \text{ (où } P=P_1) \text{ et } t \text{ (où } P=P_2)$$

):

$$\frac{1}{2P_a} \left(\ln \left(\frac{P_a + P_2}{P_a + P_1} \right) - \ln \left(\frac{P_2 - P_a}{P_1 - P_a} \right) \right) = \frac{1}{2P_a} \ln \left(\frac{P_1 - P_a}{P_2 - P_a} \frac{P_a + P_2}{P_a + P_1} \right) = \frac{\pi a^4}{16\eta V l} t \Rightarrow \eta \ln \left(\frac{P_1 - P_a}{P_2 - P_a} \frac{P_a + P_2}{P_a + P_1} \right) = \frac{\pi a^4 P_a}{8V l} t$$

Cette dernière expression (14) conduit bien à la relation proposée par l'énoncé.

I.C.1) On peut remplir le récipient d'eau, par fioles jaugées de 1 L d'abord, puis de 250 mL, puis de 50 mL, puis compléter à la burette graduée ... On pourrait aussi remplir le récipient d'eau, puis peser cette eau, et déduire le volume connaissant la masse volumique (mais le volume précisé plus loin donne une masse un peu élevée pour les balances usuelles de lycée).

I.C.2) La valeur de la pression atmosphérique est donc $P_a = \rho_m g H_a = 1,016 \cdot 10^5$ Pa.

De même : $P_1 = P_a + \rho_m g (h'_1 - h''_1)$ en Pa ou, plus simplement, $H_a + h'_1 - h''_1 = 98,82$ cm Hg en « cm de mercure » ;

On trouve de la même façon que P_2 correspond à 86,63 cm Hg. On en déduit : $\lambda = 0,7104$.

$$\text{Par ailleurs } K = \frac{\pi a^4 P_a}{8V l} = 1,127 \cdot 10^{-7} \text{ Pa. On en déduit } \eta = \frac{K t}{\lambda} = 1,904 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s.}$$

I.C.3) Alors P_2 correspond maintenant à 86,60 cm Hg, ce qui donne $\lambda = 0,7131$ et donc $\eta = \frac{K t}{\lambda} = 1,897 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s.}$

Il n'est pas raisonnable de garder plus de trois chiffres significatifs (comme g , d'ailleurs...), on affiche donc $\eta = 1,90 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s.}$

Partie II

II.A.1) En coordonnées polaires $\vec{v}(r) = k(a^2 - r^2) \vec{e}_z$ (Cf d'ailleurs l'expression (8))

$$D_v = \iint_{(S)} \vec{v}(r) \cdot \vec{e}_z dS = \int_{r=0}^a 2\pi r k(a^2 - r^2) dr = \frac{\pi a^4}{2} k = \pi a^2 v_m \Rightarrow v_m = \frac{ka^2}{2} \quad (15).$$

II.A.2) Le terme $\vec{v} \wedge \vec{B}$ permet de décrire les phénomènes d'induction qui apparaissent dans ce milieu conducteur mobile dans un champ magnétique stationnaire (Cas de Lorentz : $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est le champ électromoteur de Lorentz.)

II.A.3) Comme $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}V) = \vec{0}$, $\vec{\text{rot}}(\vec{j}) = \vec{\text{rot}}(\gamma \vec{v} \wedge \vec{B})$; or $\vec{v} \wedge \vec{B} = kB_0(a^2 - x^2 - y^2)\vec{e}_y$ (16) et donc :
 $\vec{\text{rot}}(\vec{j}) = \vec{\text{rot}}(\gamma \vec{v} \wedge \vec{B}) = -2\gamma kB_0 x \vec{e}_z$ (17).

II.A.4) L'équation locale de conservation de la charge s'écrit : $\text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$; or, on se place en régime stationnaire, donc $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 = \text{div}(\vec{j})$ (18). Le fait que $\text{div}(\vec{j}) = 0$ indique qu'il existe forcément au moins un champ $\vec{\psi}$ tel que : $\vec{j} = \vec{\text{rot}}\vec{\psi}$.

II.A.4) L'équation (17) impose donc à $\vec{\psi}$: $\vec{\text{rot}}(\vec{j}) = \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{\psi}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{\psi}) - \Delta\vec{\psi} = -2\gamma kB_0 x \vec{e}_z$.

Mais si $\vec{\psi} = \psi(x, y)\vec{e}_z$, alors $\text{div}\vec{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$, on a donc bien par (18) : $\Delta\vec{\psi} = \Delta\psi \vec{e}_z = 2\gamma kB_0 x \vec{e}_z$ (19), cqfd.

II.A.6) Si $\psi = \left(Cr + \frac{\gamma B_0 k r^3}{4}\right) \cos \theta$, alors $\vec{\text{grad}}\psi = \left(C + \frac{3\gamma B_0 k r^2}{4}\right) \cos \theta \vec{e}_r - \left(C + \frac{\gamma B_0 k r^2}{4}\right) \sin \theta \vec{e}_\theta$.

$$\vec{j} = \vec{\text{rot}}\vec{\psi} = \vec{\text{grad}}\psi \wedge \vec{e}_z = \begin{pmatrix} j_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\left(C + \frac{\gamma B_0 k r^2}{4}\right) \sin \theta \\ j_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\left(C + \frac{3\gamma B_0 k r^2}{4}\right) \cos \theta \end{pmatrix} \quad (20).$$

Ainsi :

II.A.7) Or, au niveau du tuyau cylindrique isolant, aucun courant ne rentre, si bien que : $j_r(r=a) = 0 \Rightarrow C = -\frac{\gamma B_0 k a^2}{4}$.

et $\vec{j} = \frac{\gamma B_0 k}{4} \begin{pmatrix} (a^2 - r^2) \sin \theta \\ (a^2 - 3r^2) \cos \theta \end{pmatrix}$ (21).

II.A.8) $\vec{j} = \begin{pmatrix} j_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ j_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{pmatrix}$ est parallèle à $\vec{dM} = \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \end{pmatrix}$ et donc $\begin{vmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} & dr \\ -\frac{\partial \psi}{\partial r} & r d\theta \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \psi}{\partial r} dr = d\psi = 0$.

La fonction $\psi = \frac{\gamma B_0 k}{4} (r^3 - a^2 r) \cos \theta$ (22) est donc uniforme sur une même ligne de courant.

L'équation des lignes de courant est donc de la forme :

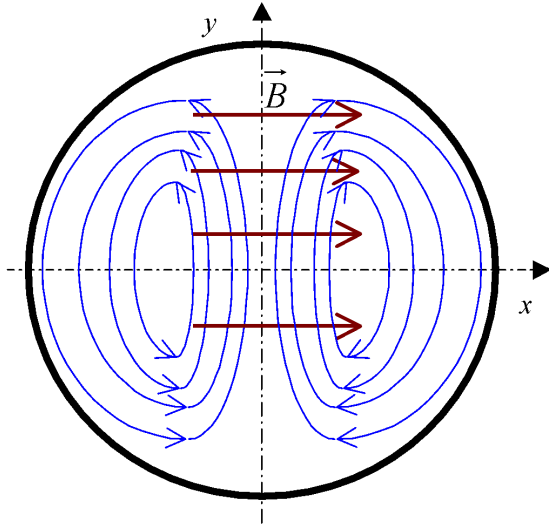
$(a^2 r - r^3) \cos \theta = Cste$, où $Cste$ peut être positive ou négative (d'où le changement de signe par rapport à l'équation (22)).

La fonction $f(r) = a^2 r - r^3$ s'annulant en $r = 0$ et $r = a$, une équation du type $f(r) = m$ a deux (ou zéro) solutions sur $[0, a]$; donc, pour θ donné, il existe deux

valeurs de r telles que $(a^2 r - r^3) \cos \theta = Cste$. Pour la plus petite, $a^2 r \gg r^3$, si bien que pour la partie de la courbe la plus proche de l'origine $a^2 r \cos \theta = a^2 x \approx Cste$.

De plus, la courbe limite pour laquelle $Cste = 0$ est constituée de la réunion du cercle $r = a$ et du diamètre $\theta = \pi/2$.

Ces considérations plus ou moins précises permettent de deviner l'allure des lignes de courant :



Plus physiquement, le champ électromoteur d'induction de Lorentz $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est selon $+\vec{e}_y$, et il est maximum au centre, car c'est là que la vitesse est maximale. C'est ce champ électromoteur qui initie les courants : il n'est donc pas surprenant de trouver les lignes de courant selon $+\vec{e}_y$ au voisinage du centre ; elles se referment sur elles-mêmes au voisinage du tuyau, là où la vitesse, et donc le champ électromoteur est le plus faible.

II.B.1) On a :
$$\vec{j} = \gamma \left(-\vec{\text{grad}}V + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \Rightarrow \vec{\text{grad}}V = \vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{\vec{j}}{\gamma} \quad (23)$$
 Or $\vec{j}$ est donnée par (21) et (16) donne : $\vec{v} \wedge \vec{B} = kB_0(a^2 - r^2)\vec{e}_y$, soit, en coordonnées polaires : $\vec{v} \wedge \vec{B} = kB_0(a^2 - r^2) \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$. (23) donne alors :
$$\vec{\text{grad}}V = \vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{kB_0}{4} \begin{pmatrix} 3(a^2 - r^2)\sin\theta \\ (3a^2 - r^2)\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \end{pmatrix} \quad (24)$$
 qui est l'expression proposée par l'énoncé.

II.B.2) On a par (24) :
$$\vec{\text{grad}}V \cdot \vec{e}_r = \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{3kB_0}{4}(a^2 - r^2)\sin\theta \quad \text{et} \quad \vec{\text{grad}}V \cdot \vec{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{kB_0}{4}(3a^2 - r^2)\cos\theta$$
, on en déduit :
$$V(r, \theta) = \frac{kB_0}{4}(3a^2r - r^3)\sin\theta \quad (25) \Rightarrow V_A - V_B = V(r=a, \theta = -\frac{\pi}{2}) - V(r=a, \theta = \frac{\pi}{2}) = -kB_0a^3 \quad (26)$$

II.B.3) Or, par (15) :
$$v_m = \frac{ka^2}{2} \Rightarrow V_A - V_B = -2aB_0v_m \quad (27)$$
 A.N. : on trouve ainsi : $v_m = 0,21 \text{ m.s}^{-1}$.

II.B.4) Il existe des méthodes purement hydrodynamiques de mesure de la vitesse d'un fluide, fondées en général sur l'effet Venturi : voir par exemple le principe du tube de Pitot.

Si l'écoulement fluide transporte aussi des particules en suspension, on peut aussi envisager la mesure de la vitesse de l'écoulement par effet Doppler.

II.C.1) Voir les questions II.A.7) et 8) : la distribution de courant est symétrique par rapport à l'importe quel plan $z = cste$, le champ magnétique $\vec{B}^*$ créé par ces courants doit donc être perpendiculaire à ces plans de symétrie, il est donc selon $\vec{e}_z$:

$\vec{B}^* = B^*(r, \theta, z) \vec{e}_z$ a priori, mais en fait on a forcément : $\frac{\partial B^*}{\partial z} = 0$: il y a invariance par translation selon $\vec{e}_z$ (et de plus, $\text{div}(\vec{B}^*) = 0$). $\vec{B}^*$ est donc bien de la forme demandée.

II.C.2) On a : $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z + \vec{B}^*$ doit vérifier :

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \Rightarrow \text{div}(\vec{B}^*) = \frac{\partial B^*}{\partial z} = 0 \quad (28) \text{ qui est effectivement vérifiée.}$$

$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \text{rot}(\vec{B}^*) = \mu_0 \vec{j}$ (29) (on est en régime permanent, il n'y a donc pas de courants de déplacement). Or, Cf. le II.A.) : $\mu_0 \vec{j} = \mu_0 \text{rot}(\psi \vec{e}_z) = \text{rot}(B^* \vec{e}_z)$

Donc $\vec{B}^* = \mu_0 \psi(r, \theta) \vec{e}_z$ est une solution qui peut convenir : elle a la « bonne » géométrie, et elle vérifie les deux équations locales (28) et (29).

II.C.3) On a vu (15) : $v_m = \frac{ka^2}{2} \Rightarrow k = \frac{2v_m}{a^2}$ et (22) : $\psi = \frac{\gamma B_0 k}{4} (r^3 - a^2 r) \cos \theta$

$$\Rightarrow \vec{B}^* = \frac{\mu_0 \gamma B_0 v_m}{2a^2} (r^3 - a^2 r) \cos \theta \vec{e}_z \quad (30) : \text{on en déduit qu'en ordre de grandeur : } \|\vec{B}^*\| \approx \mu_0 \gamma B_0 v_m a \quad (31)$$

Donc $\|\vec{B}^*\| \ll B_0 \Rightarrow \mu_0 \gamma v_m a \ll 1$ (32) : le calcul précédent est alors valide.

Vérification de l'homogénéité de (32) : on sait que l'épaisseur de peau d'un conducteur de conductivité γ à la pulsation ω est :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} \Rightarrow \mu_0 \gamma = \frac{2}{\omega \delta^2} : \text{donc } \mu_0 \gamma \text{ se mesure en s.m}^{-2} ; \text{or, dans (32), } v_m a \text{ se mesure en m}^2.\text{s}^{-1}, \text{ le produit } \mu_0 \gamma \cdot v_m a \text{ est donc sans dimension, (32) est donc bien homogène.}$$

Application numérique : dans le cas du sang : $\mu_0 \gamma \cdot v_m a = 5.10^{-8} \ll 1$, le critère est largement vérifié.

Partie III

III.A.1) Une particule de fluide de volume $d\tau$ et de masse $dm = \rho_0 d\tau$ subit dans le référentiel (R) en rotation uniforme les forces d'inertie :

· d'entraînement : $\vec{df}_{ie} = -dm \vec{a}_e = +dm \omega^2 x \vec{e}_x$, de densité volumique : $\vec{\varphi}_{ie} = \frac{d\vec{f}_{ie}}{d\tau} = +\rho_0 \omega^2 x \vec{e}_x$ (33)

· de Coriolis : $\vec{df}_{ic} = -dm \vec{a}_c = -2dm \omega \vec{e}_z \wedge \vec{v}$: elle ne se fait sentir que dans la partie « horizontale » OB (sinon $\vec{v}$ est

colinéaire à $\omega \vec{e}_z$), sa densité volumique est : $\vec{\varphi}_{ic} = \frac{d\vec{f}_{ic}}{d\tau} = -2\rho_0 \omega \vec{e}_z \wedge v \vec{e}_x = -2\rho_0 \omega v \vec{e}_y$ sur (OB) (34).

III.A.2) Il faut établir une relation de Bernoulli. Le principe fondamental « volumique » (équation de Navier-Stokes) s'écrit, forces de viscosité et de pesanteur négligées :

$$\rho_0 \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho_0 \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \text{rot} \vec{v} \wedge \vec{v} \right] = -\text{grad}(P) + \rho_0 \omega^2 x \vec{e}_x - 2\rho_0 \omega \vec{e}_z \wedge \vec{v} \quad (35) . \text{ Or :}$$

$$\diamond \text{ l'écoulement est stationnaire dans (R), donc : } \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$

◆ le fluide est incompressible, donc :

$$\rho_0 \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\rho_0 \frac{v^2}{2}\right)$$

◆

$$\rho_0 \omega^2 x \vec{e}_x = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\rho_0 \frac{\omega^2 x^2}{2}\right)$$

En regroupant ces gradients, on obtient à partir de (35) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\rho_0 \frac{v^2}{2} + P - \rho_0 \frac{\omega^2 x^2}{2}\right) = -\rho_0 \left[\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v} + 2\omega \vec{e}_z \right] \wedge \vec{v} \quad (36)$$

Notons : $Be(M) = \rho_0 \frac{v^2(M)}{2} + P(M) - \rho_0 \frac{\omega^2 x_M^2}{2}$ et effectuons une intégration spatiale de (36) entre deux points quelconques N et Q d'une même ligne de courant :

$$\int_N^Q \overrightarrow{\text{grad}}(Be) \cdot d\vec{l} = Be(Q) - Be(N) = - \int_N^Q \rho_0 \left[\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v} + 2\omega \vec{e}_z \right] \wedge \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0$$

car $d\vec{l}$, colinéaire à $\vec{v}$, est orthogonal à $\left[\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v} + 2\omega \vec{e}_z \right] \wedge \vec{v}$: donc, pour deux points quelconques d'une même ligne de courant : $Be(Q) = Be(N)$ et donc la

quantité $Be(M) = \rho_0 \frac{v^2(M)}{2} + P(M) - \rho_0 \frac{\omega^2 x_M^2}{2}$ est bien uniforme sur une même ligne de courant.

III.A.3) On peut appliquer la relation précédente entre les points A et B de la même ligne de courant (L) : $Be(A) = Be(B)$;

$$Be(A) = P_0 = Be(B) = \rho_0 \frac{v_0^2}{2} + P_0 - \rho_0 \frac{\omega^2 l^2}{2} \Rightarrow v_0 = \omega l \quad (37)$$

on en déduit :

III.A.4) La conservation du débit impose que $v_0(x) = v_0 = \omega l$ soit uniforme dans tout le tuyau.
La relation de Bernoulli peut toujours s'écrire entre A et le point M de l'axe Ox d'abscisse x :

$$Be(A) = P_0 = Be(M) = \rho_0 \frac{v_0^2}{2} + P(x) - \rho_0 \frac{\omega^2 x^2}{2} \Rightarrow P(x) = P_0 + \rho_0 \frac{\omega^2 (x^2 - l^2)}{2} \quad (38)$$

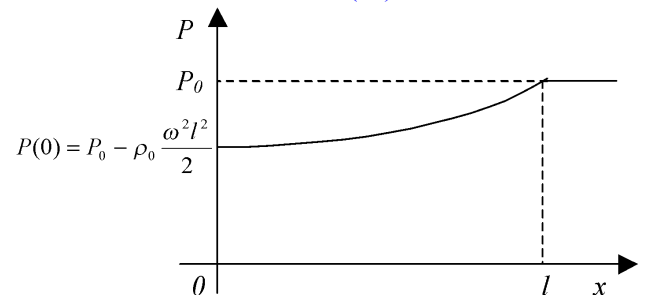
La pression est donc minimale au coude, où elle vaut :

$$P(0) = P_0 - \rho_0 \frac{\omega^2 l^2}{2} \quad (39)$$

La forme est parabolique ...

Rem : le calcul précédent, qui suppose l'écoulement incompressible, n'est valable que si l'écart de pression

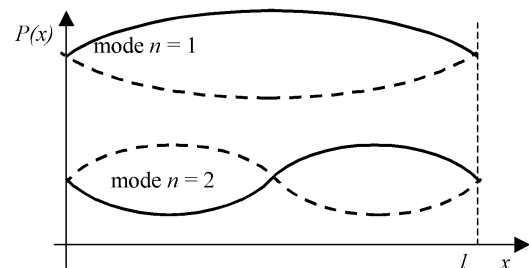
$\rho_0 \frac{\omega^2 l^2}{2}$ est très inférieur à la pression atmosphérique.



III.B.1) Un tuyau ouvert aux deux extrémités vibre en un nombre entier de fuseaux :

$$l = n \frac{\lambda_n}{2} = n \frac{c}{2f_n} \Rightarrow f_n = n \frac{c}{2l} \quad (40)$$

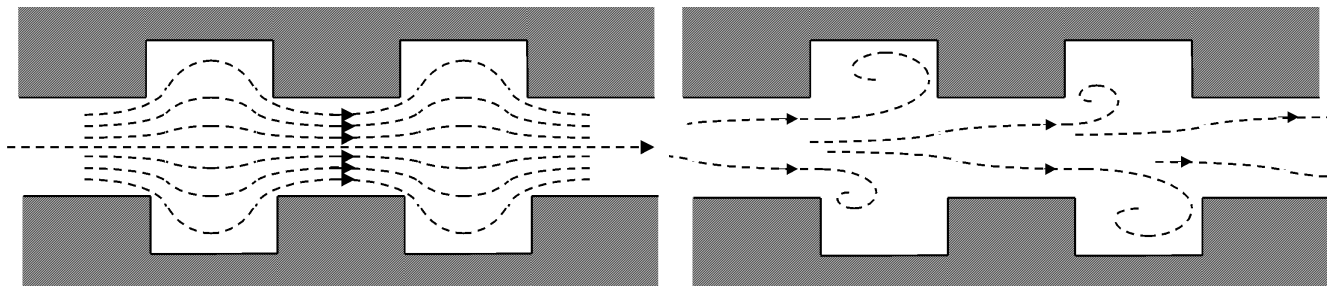
Aux extrémités, la surpression est nulle et la vitesse est extrême : l'allure des graphes donnant la pression pour les deux premiers modes d'ondes stationnaires est donc comme ci-contre :



$$\tau = \frac{d}{v_0} \quad f = \frac{v_0}{d} = \frac{1}{\tau} \quad (41)$$

III.B.2) La durée du passage de l'air dans un créneau est

III.B.3) a) Si l'écoulement est laminaire, les lignes de courants sont vraisemblablement stationnaires et régulières ; s'il est turbulent, il devient instationnaire, tourbillonnaire ... :



Ecoulement laminaire : $Re < Re_{\min}$

Ecoulement turbulent : $Re > Re_{\min}$

$$Re = \frac{\mu LV}{\eta} = \frac{LV}{\nu}$$

III.B.3)b) Le nombre de Reynolds : , où L est une longueur caractéristique et V une vitesse caractéristique :

il est indiqué de choisir ici $L = d$ et $V = v_0$: $Re = \frac{v_0 d}{\nu}$; mais $v_a = df$ par (41) , donc $Re = \frac{d^2 f}{\nu}$; pour que l'écoulement devienne turbulent, il faut que le nombre de Reynolds soit supérieur à une valeur minimale $Re_{\min}$ (qui serait $\approx 10^3$ pour un tuyau

lisse, sans doute plus faible ici, dans cette structure favorisant la turbulence ...) : donc $f > f_m = \frac{Re_{\min} \nu}{d^2}$ (42).

$$Re = Re_{\min} = \frac{f_m d^2}{\nu}$$

III.B.4)a) Donc $\nu = 880$, conforme à la valeur attendue .

$$n = \frac{2lf}{c}$$

III.B.4)b) Célérité du son $c \approx 340 \text{ m.s}^{-1}$ à l'ambiante , et par (40) : $c = 2,89 c$ c'est donc vraisemblablement le mode $n=3$ qui est le premier excité.

$$Re \approx \frac{\|\rho \vec{v} \cdot \text{grad}(\vec{v})\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|}$$

III.B.4)c) Le nombre de Reynolds est justement une évaluation du rapport : $880 =$; le terme négligé (force volumique de viscosité) est donc environ 10^3 plus faible que le terme d'accélération convective.

$$\rho(x,t) \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}(\vec{v}) \right] = -\text{grad}P$$

III.C.1) a) Equation d'Euler : (43) toujours en négligeant la pesanteur.

T étant la période temporelle de l'onde acoustique et $\lambda = cT$ sa longueur d'onde, V_1 une évaluation de la norme de $\vec{v}_1(x,t)$ on

peut évaluer : $\left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\| \approx \frac{V_1}{T}$ et $\left\| \vec{v} \cdot \text{grad}(\vec{v}) \right\| \approx \frac{V_0 V_1}{\lambda}$. Ainsi : $\left\| \vec{v} \cdot \text{grad}(\vec{v}) \right\| / \left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\| \approx \frac{V_0 T}{\lambda} = \frac{V_0}{C}$. L'accélération convective est

négligeable devant l'accélération locale si $\frac{V_0}{C} \ll 1$ (en évaluant $V_0 = 2 \text{ m.s}^{-1}$ par (41) on estime $\frac{V_0}{C} \approx 6.10^{-3} \ll 1$ de fait).

L'équation d'Euler linéarisée et projetée sur $\vec{e}_x$ s'écrit donc : $\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}$ (44)

III.C.1)b) $\underline{Q}_1(x,t) = S(x) \cdot \underline{v}_1(x,t)$ (45) ; avec (44) : $\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -i\omega \rho_0 \underline{v}_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial x}$, (45) devient :

$$\underline{Q}_1(x) = S(x) \cdot \underline{v}_1(x) = \frac{S(x)}{i\omega \rho_0} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial x} \quad (46)$$

III.C.2)a) Il y a des réflexions partielles à chaque changement de section, d'où la présence simultanée d'ondes progressives et régressives ; les amplitudes respectives de ces ondes changent à chaque changement de section.

En utilisant $k = \omega/c$, on trouve :

$$\cdot x < -d/4 : \quad \underline{Q}_1 = \frac{S_1}{\rho_0 c} [\underline{A} \exp(ikx - i\omega t) - \underline{B} \exp(-ikx - i\omega t)]$$

$$\cdot -d/4 < x < d/4 : \quad \underline{Q}_1 = \frac{S_1}{\rho_0 c} [\underline{C} \exp(ikx - i\omega t) - \underline{D} \exp(-ikx - i\omega t)]$$

$$\cdot x > d/4 : \quad \underline{Q}_1 = \frac{S_1}{\rho_0 c} [\underline{E} \exp(ikx - i\omega t) - \underline{F} \exp(-ikx - i\omega t)]$$

Continuités de la pression :

$$\blacklozenge \text{ en } x = -d/4 : \quad \underline{A} \exp(-\frac{ikd}{4}) + \underline{B} \exp(\frac{ikd}{4}) = \underline{C} \exp(-\frac{ikd}{4}) + \underline{D} \exp(\frac{ikd}{4}) \quad (47)$$

$$\blacklozenge \text{ en } x = d/4 : \quad \underline{C} \exp(\frac{ikd}{4}) + \underline{D} \exp(-\frac{ikd}{4}) = \underline{E} \exp(\frac{ikd}{4}) + \underline{F} \exp(-\frac{ikd}{4}) \quad (48)$$

Continuités des débits :

$$\blacklozenge \text{ en } x = -d/4 : \quad S_1 [\underline{A} \exp(-\frac{ikd}{4}) - \underline{B} \exp(\frac{ikd}{4})] = S_2 [\underline{C} \exp(-\frac{ikd}{4}) - \underline{D} \exp(\frac{ikd}{4})] \quad (49)$$

$$\blacklozenge \text{ en } x = d/4 : \quad S_2 [\underline{C} \exp(\frac{ikd}{4}) - \underline{D} \exp(-\frac{ikd}{4})] = S_1 [\underline{E} \exp(\frac{ikd}{4}) - \underline{F} \exp(-\frac{ikd}{4})] \quad (50)$$

II.C.3)a) La n ème cellule est comprise dans l'intervalle $[-d/4 + nd ; 3d/4 + nd]$, pour l'étude de l'onde dans cette cellule, on prend en fait un repère local, d'origine O_n (d'abscisse nd dans le repère d'origine), dans ce repère local, l'abscisse d'un point peut être noté ξ_n , avec $\xi_n = x - nd$ (51), d'où l'expression de l'amplitude complexe de la pression donnée par l'énoncé :

$$\underline{p}_n(x) = \underline{A}_n \exp[ik(x - nd)] + \underline{B}_n \exp[-ik(x - nd)] = \underline{A}_n \exp(ik\xi_n) + \underline{B}_n \exp(-ik\xi_n) \quad (52)$$

Examinons les conséquences de ces repérages, quand on passe d'une cellule à l'autre :

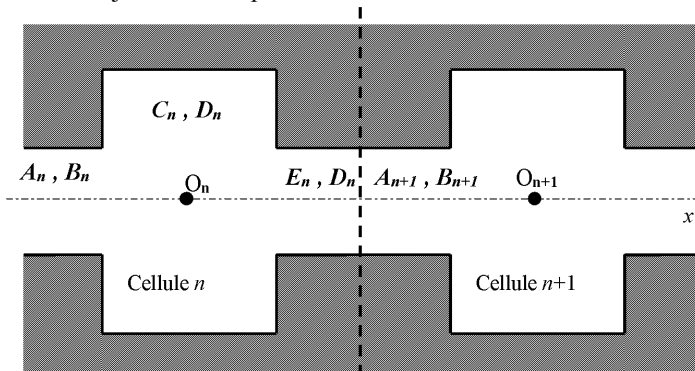
La frontière en $x = d/2 + nd$ ne correspond à aucune discontinuité ! Du côté gauche de la frontière, l'onde est notée :

$$E_n \exp(ik\xi_n - i\omega t) + F_n \exp(-ik\xi_n - i\omega t)$$

et de l'autre

$$A_{n+1} \exp(ik\xi_{n+1} - i\omega t) + B_{n+1} \exp(-ik\xi_{n+1} - i\omega t)$$

Comme il n'y a pas de discontinuité, on a donc égalité entre ces deux ondes dans la portion de tuyau de section S_1 qui entoure la jonction. En particulier donc :



$$A_{n+1} \exp(ik\xi_{n+1} - i\omega t) = E_n \exp(ik\xi_n - i\omega t) \Rightarrow E_n = A_{n+1} \exp[ik(\xi_{n+1} - \xi_n)] = A_{n+1} \exp(-ikd) \quad (53), \text{ d'après (51).}$$

$$\text{De même, on trouve : } F_n = B_{n+1} \exp(ikd) \quad (54). \text{ On obtient donc :}$$

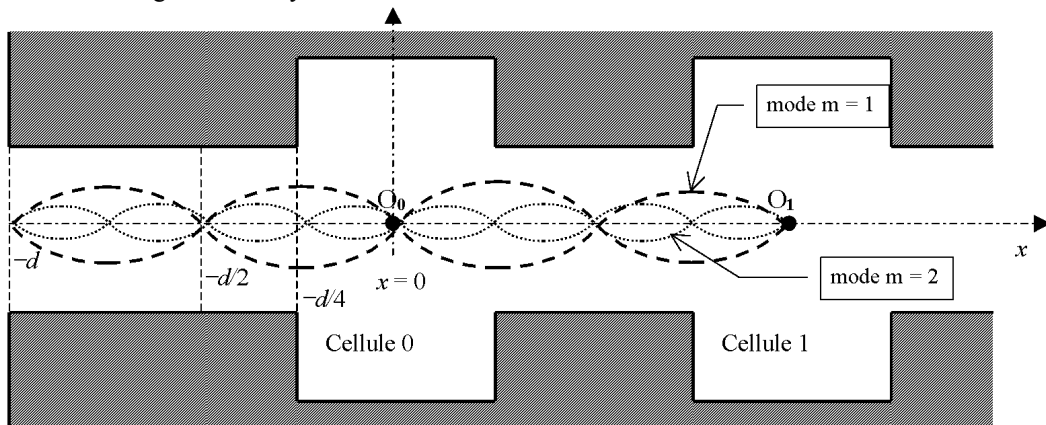
$$\begin{pmatrix} E_n \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(-ikd) & 0 \\ 0 & \exp(ikd) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix}; \text{ or l'énoncé donne : } \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s^* & r^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n \\ F_n \end{pmatrix}; \text{ en effectuant le produit de ces matrices de transfert, on trouve bien : } \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \exp(-ikd) & s \cdot \exp(ikd) \\ s^* \cdot \exp(-ikd) & r^* \cdot \exp(ikd) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix}$$

III.C.3)b) Voir cours de mathématique.

III.C.4) L'expression générale de la pression :

$$\underline{p}_0(x = -d) = \underline{A}_0 \exp(-ikd) + \underline{B}_0 \exp(ikd) \quad (55) \text{ ou [4 énoncé] et } \underline{p}_N(x = Nd) = \underline{A}_N + \underline{B}_N \quad (56) \text{ ou [5 énoncé]}$$

III.C.5) Si $\sin(kd/2) = 0$, alors $\frac{kd}{2} = \frac{\pi d}{\lambda} = m\pi \Rightarrow d = m\lambda_m$, m entier, ou encore : $\frac{d}{2} = m \frac{\lambda_m}{2}$ (57), ce qui signifie, pour ces modes-là, qu'une même portion de section constante vibre en un nombre entier de « fuseaux ». Intéressons-nous à l'extrémité gauche du tuyau :



En raisonnant sur le schéma ci-dessus, il est facile de constater que les nœuds de pressions se situent toujours aux milieux de chaque portion (les ventres de pression se situent aux changements de section uniquement pour les harmoniques impaires).

$$\frac{d}{2} = m \frac{\lambda_m}{2} \Rightarrow d = m \frac{c}{f'_m} \Rightarrow f'_m = m \frac{c}{d} \quad (58)$$

La relation (57) donne la suite des fréquences possibles :

Le fondamental ($m = 1$) : $f'_1 = 5.10^4$ Hz, supérieure à 20 kHz, est donc déjà inaudible pour une oreille humaine, a fortiori les harmoniques. Ce ne sont donc pas les excitations de ces modes qui expliquent le son émis.

III.C.6) Pour ces six premières valeurs de k , on peut remarquer que l'on a : $k_n = nK$ avec un coefficient de corrélation : $r = 0,9999996 \dots$ dont l'écart par rapport à 1 n'a guère de sens vu la précision de l'écriture (3 chiffres) !

Comme $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = nK$, on en déduit : $\lambda_n = \frac{2\pi}{nK} = \frac{3,78}{n}$ ou encore $n \frac{\lambda_n}{2} = \frac{3,78}{2} = 1,89 \approx l$ (59) : finalement, on n'est pas loin de retrouver la suite des fréquences des modes propres d'un tuyau « lisse » ouvert aux deux bouts de l'expression (40) !

A la question III.B.4), on avait trouvé un mode « 2,89 » avec l'expression simple du tuyau lisse ; ici la donnée de k_3 permet de

calculer la fréquence correspondante au mode 3 : $f_3 = \frac{\omega_3}{2\pi} = \frac{ck_3}{2\pi} = 270$ Hz qui est effectivement la valeur mesurée ...

III.C.7) Les différentes fréquences propres de ce tuyau sont :

$$\cdot \text{ modes propres de III.C.5) : } f'_m = m \frac{c}{d} = m.3400 \quad (\text{Hz})$$

$$\cdot \text{ modes propres de III.C.6) : } f_n \approx n \frac{c}{2l} = n \frac{c}{2Nd} = n \frac{1700}{N} \quad (\text{Hz}) : \text{ ce sont ces modes propres qui donnent les ondulations rapides de la courbe du coefficient de transmission.}$$

La caractéristique principale est l'existence d'une bande fréquence coupée , autour de $1700 \text{ Hz} = f_l'/2$, de longueur d'onde égale à $20 \text{ cm} = 2.d$. Pour une telle fréquence, un motif devrait vibrer en un unique fuseau, ce qui entre en forte contradiction avec les considérations du III.C.5) : il y a une forte antirésonance à cette fréquence.

On peut utiliser ce phénomène pour réaliser un filtre acoustique réjecteur de la fréquence $f_0 = \frac{c}{2d}$
– FIN –

Corrigé proposé par Alain Monange, Lycée Paul Cézanne, Aix en Provence alain.monange@wanadoo.fr