

2004 MINES PONTS

Première épreuve de Physique (remplacement)

Filière PC

OSCILLATIONS MÉCANIQUES DE MOMENTS MAGNÉTIQUES

I Sur la notion de moment magnétique

□ 1 M s'exprime en $A.m^2$. Pour une distribution volumique: $\mathbf{M} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \wedge \mathbf{j} d\tau$.

□ 2 Le plan $(Q, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courants, donc $\mathbf{B}(Q)$ appartient à ce plan. $\mathbf{B}(Q)$ est donc dans le plan $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$.

□ 3 Les potentiels scalaire et vecteur ne sont pas uniques, la jauge de Lorentz permet de rajouter une condition supplémentaire et de simplifier les expressions obtenues, ici: $\text{div } \mathbf{A} = 0$.

Le rappel de l'énoncé est faux: $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \sin\theta \mathbf{e}_\phi$.

On note $(a, \theta_p = \pi/2, \phi_p)$ et (r, θ, ϕ) les coordonnées sphériques de P sur le cercle et de Q (on choisit l'origine de ϕ tel que $\phi_Q = 0$).

$\mathbf{OP} = a (\cos\phi_p \mathbf{e}_x + \sin\phi_p \mathbf{e}_\phi)$, $d\mathbf{P} = a d\phi_p \mathbf{e}_{\phi P}$, $\mathbf{OQ} = r \mathbf{e}_r$.

Donc $\mathbf{PQ} = (r - a \cos\phi_p \sin\theta) \mathbf{e}_r - a \cos\phi_p \cos\theta \mathbf{e}_\theta - a \sin\phi_p \mathbf{e}_\phi$.

On calcule alors PQ^2 , puis $r/PQ = 1 + \frac{a}{r} \cos\phi_p \sin\theta$ au premier ordre en $\frac{a}{r}$.

Alors: $\mathbf{A}(Q) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{P}}{r} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \left(\frac{a}{r} \cos\phi_p \sin\theta \right) d\phi_p$, avec

$\mathbf{e}_{rP} = \cos\phi_p \mathbf{e}_x + \sin\phi_p \mathbf{e}_\phi$.

En utilisant $\int_0^{2\pi} \sin\phi_p d\phi_p = 0$, $\int_0^{2\pi} \cos\phi_p d\phi_p = 0$, $\int_0^{2\pi} \cos^2\phi_p d\phi_p = \pi$ et $\int_0^{2\pi} \sin\phi_p \cos\phi_p d\phi_p = 0$, il vient:

$\mathbf{A}(Q) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\pi a^2}{r^2} \sin\theta \mathbf{e}_\phi$, qui est bien de la forme $\mathbf{A}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{M} \wedge \mathbf{e}_r}{r^2}$.

□ 4 $\mathbf{B}(Q)$ se déduit de $\mathbf{A}(Q)$ par $\mathbf{B}(Q) = \text{rot } \mathbf{A}(Q)$.

L'expression demandée est hors programme PC: $E_p = -I \varphi$.

$\varphi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \approx \mathbf{B}(O) \cdot \mathbf{e}_z a^2$, ce qui donne $E_p = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}(O)$.

□ 5 $dE_p = -d\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}(O) = -(\boldsymbol{\Omega} dt \times \mathbf{M}) \cdot \mathbf{B}(O) = -(\mathbf{M} \times \mathbf{B}(O)) \cdot \boldsymbol{\Omega} dt$.

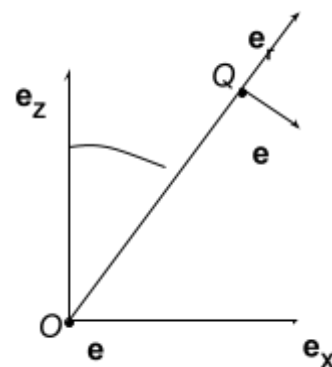
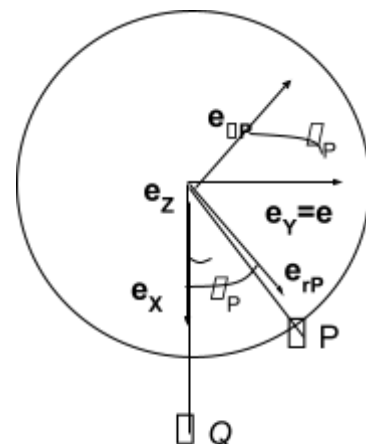
Pour une rotation, avec un moment $\boldsymbol{\Gamma}$, nous avons: $\delta W = -dE_p = \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\Omega} dt$. On en déduit donc: $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{M} \times \mathbf{B}(O)$.

II Mouvement sur support circulaire d'un disque magnétisé

II-1 Mouvement en l'absence de frottement

L'angle ϕ proposé n'est pas très pratique, mais on fera avec, il aurait été plus judicieux de prendre $(-\mathbf{e}_x, \mathbf{M})$

Dans cette partie, $f=0$, donc θ reste égal à 0.



□ 6 R^* est le référentiel lié à G (qu'on peut prendre comme d'origine) et en translation par rapport au référentiel du laboratoire.

Théorème du moment cinétique dans R^* : la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un système dans le référentiel barycentrique est égal à la somme des moments en G des actions extérieures.

□ 7 $\sigma^* = J \Omega^* = -J \dot{\phi} \mathbf{e}_z$. Comme il n'y a pas de frottement, la réaction passe par G , son moment en G est nul. De même le moment en G du poids est nul. Il reste: $-J \dot{\phi} \mathbf{e}_z = \mathbf{M} \wedge \mathbf{B}$, donc: $J \dot{\phi} = -MB \cos \phi$. En multipliant par $\dot{\phi}$ puis en intégrant, on trouve l'équation qui suit.

Avec le théorème de la puissance: $\frac{dE_m^*}{dt} = P_{non\ conservatives}^* = 0$.

Donc: $cste = \frac{1}{2} J \dot{\phi}^2 - \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} J \dot{\phi}^2 + MB \sin \phi$, puisque $\mathbf{M} = M(\cos \phi \mathbf{e}_x - \sin \phi \mathbf{e}_y)$ et $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_y$.

La dérivée de la cste puis la simplification par $\dot{\phi}$ redonne bien la même équation.

□ 8 $\frac{1}{2} J \dot{\phi}^2 + MB \sin \phi = cste = 0$, car à $t = 0$, $\phi = -\pi$,

donc: $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \dot{\phi}^2 + MB \sin \phi \right) = -\frac{2MB}{J} \sin \phi = -2 \omega_R^2 \sin \phi$. Pour une demi-période, ϕ varie de $-\pi$ à 0 (par exemple), avec

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \dot{\phi}^2 + MB \sin \phi \right) = -\frac{2MB}{J} \sin \phi$, donc: $dt = \frac{1}{\sqrt{2} \omega_R} \frac{d\phi}{\sqrt{-\sin \phi}}$.

$\frac{T}{2} = \frac{1}{\sqrt{2} \omega_R} \int_{-\pi}^0 \frac{d\phi}{\sqrt{-\sin \phi}} = \frac{1}{\sqrt{2} \omega_R} \int_0^{\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin \phi}}$, donc: $T = 5,24 \frac{\sqrt{2}}{\omega_R} = \frac{7,41}{\omega_R}$.

□ 9 Tracé ci-contre:

□ 10 Il n'y a pas de frottement en I , donc G reste fixe au cours du mouvement.

II-2 Mouvement en présence de frottement

□ 11 $\mathbf{0} = \mathbf{v}(I) = \mathbf{v}(G) + \Omega \wedge \mathbf{GI} = (R-r) \mathbf{e}_\theta - \dot{\phi} \mathbf{e}_z \wedge r \mathbf{e}_r$, donc: $(R-r) \dot{\theta} = r \dot{\phi}$.

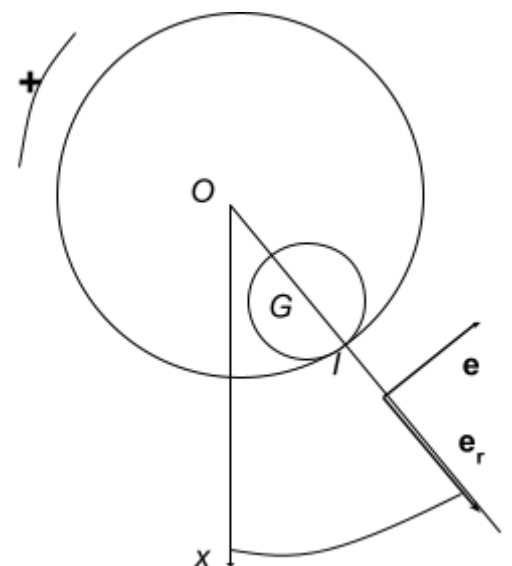
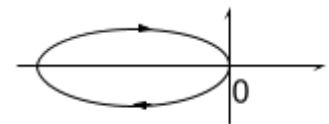
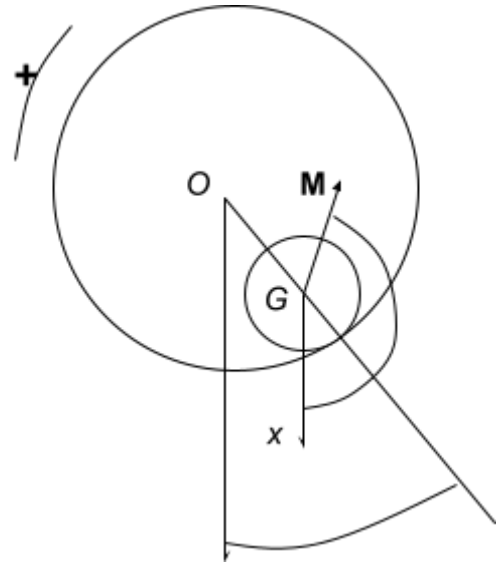
Si θ augmente, $|\dot{\phi}|$ diminue, or $\dot{\phi} < 0$, donc ϕ augmente, c'est cohérent.

□ 12 $E_{p,pesanteur} = -mgx_G = -mg(R-r) \cos \theta$, l'origine est prise pour qu'à $t = 0$, soit $\theta = 0$, on ait $-mg(R-r)$.

$E_{p,Laplace} = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}(O) = MB \sin \phi$.

Donc: $E_p = -mg(R-r \cos \theta) + MB \sin \phi$.

De plus $\dot{\phi} = \frac{R-r}{r} \dot{\theta}$, avec à $t = 0$: $\phi = -\pi$ et $\theta = 0$, donc:



$$\phi + \pi = \theta, \text{ ce qui donne:}$$

$E_p = -m g (R - r) \cos \theta + M B \sin \theta$, qui ne peut pas se mettre sous la forme demandée: un problème de signe avec le sinus qui provient de la définition de ϕ . Ce problème est éliminé en prenant $\phi = (-\mathbf{e}_x, \mathbf{M})$.

Dans ces conditions, on trouve: $B_0 = \frac{m g (R - r)}{M}$, $\alpha = \frac{R}{r} - 1$ et $a = \frac{M B}{m g (R - r) B_0}$.
 $\alpha = 1$ donne bien $R = 2 r$.

□ 13 Pour $a = 1$, $\frac{E_p}{M B} = -(\cos \theta + \sin \theta) = -\sqrt{2} \cos(\theta - \pi/4)$
 Tracé ci-contre pour $a = 1$ et $a = 1,5$.

On note les points communs ($\theta = -\pi$, $\theta = 0$ et $\theta = \pi$)

$$\frac{dE_p}{d\theta} = -M B (-\sin \theta + a \cos \theta).$$

L'équilibre existe pour $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$, donc $\tan \theta_{\text{eq}} = a$. Entre $-\pi$ et π , il y a deux positions d'équilibre:

$\theta_{1\text{eq}} = \arctan(a)$ entre 0 et π , avec $\cos \theta_{1\text{eq}} > 0$

$\theta_{2\text{eq}} = \arctan(a) - \pi$ entre $-\pi$ et 0, avec $\cos \theta_{2\text{eq}} < 0$.

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = -M B (-\cos \theta - a \sin \theta) = M B \cos \theta (1 + a \tan \theta).$$

$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} \bigg|_{\theta=\theta_{\text{eq}}} = M B \cos \theta_{\text{eq}} (1 + a^2)$ est du signe de $\cos \theta_{\text{eq}}$, donc positif pour $\theta_{1\text{eq}}$ et négatif pour $\theta_{2\text{eq}}$.

L'équilibre est stable pour $\theta_{1\text{eq}}$, instable pour $\theta_{2\text{eq}}$.

Si $B \rightarrow \infty$, $a \rightarrow \infty$, $\tan \theta_{\text{eq}} \rightarrow \infty$, donc $\theta_{1\text{eq}} \rightarrow \pi/2$ et $\theta_{2\text{eq}} \rightarrow -\pi/2$.
 On peut remarquer que la position d'équilibre stable passe de 0 à $\pi/2$ lorsque B augmente.

□ 14 À l'équilibre stable: $\theta_{1\text{eq}} = \arctan(a)$.

$$0 = N + T + m g.$$

Suivant $\mathbf{e}_r$: $N = m g \cos \theta_{1\text{eq}}$

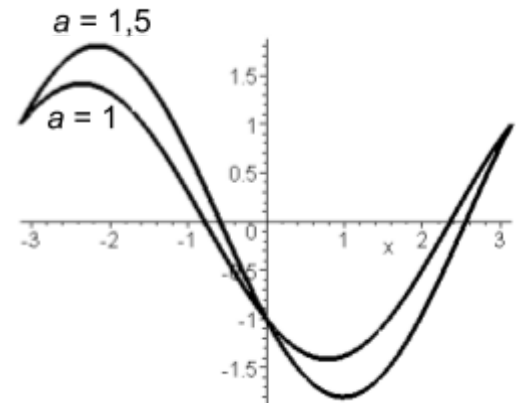
Suivant $\mathbf{e}_\theta$: $T = m g \sin \theta_{1\text{eq}}$

Le non glissement existe si $|T| \leq f N$, donc $\tan \theta_{1\text{eq}} \leq f$ et donc:
 $a \leq f$.

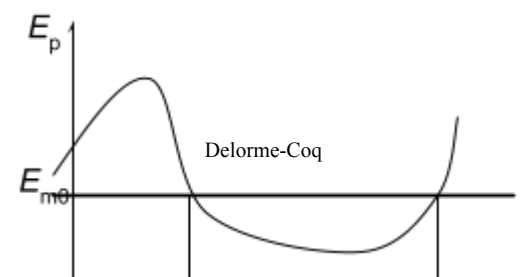
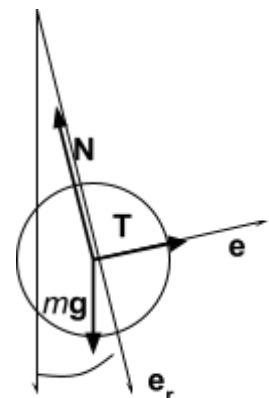
□ 15 D'après le théorème de König: $E_{\text{cin}} = E_c^* + \frac{1}{2} m v(O)^2$.

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} J_G \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m (R - r)^2 \dot{\theta}^2, \text{ avec } r^2 \dot{\phi}^2 = (R - r)^2 \dot{\theta}^2, \text{ ce qui donne:}$$

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2 \text{ avec } J_1 = \frac{3}{2} m (R - r)^2 \text{ et, compte-tenu de } R = 2 r: J_1 = 3 J.$$



$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} \bigg|_{\theta=\theta_{\text{eq}}} = M B \cos \theta_{\text{eq}} (1 + a^2)$$



□ 16 Le poids est conservatif, l'action de contact en I ne travaille pas à cause du non glissement ($P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_{\text{glissement}}$) et les actions intérieures d'un solide ne travaillent pas, donc: le système est conservatif, son énergie mécanique se conserve.

$E_{\text{cin}} + E_p = E_m = \text{cste} = E_{m0}$, avec $E_{\text{cin}} \geq 0$, donc: $E_p \leq E_{m0}$.

L'intervalle de θ accessible est celui pour lequel $E_p \leq E_{m0}$.

□ 17 $E_m = E_{\text{cin}} + E_p = \frac{3}{4} m r^2 \dot{\theta}^2 - M B (\cos\theta + a \sin\theta) = E_{m0} = -m g r$, donc:

$r \dot{\theta}^2 = \frac{4}{3} g (-1 + \cos\theta + a \sin\theta)$. En dérivant $\frac{d}{dt} (r \dot{\theta}^2) = \frac{4}{3} g (-\sin\theta + a \cos\theta)$ en simplifiant par $r \dot{\theta}$, il vient:



Le théorème de la résultante appliqué au solide s'écrit: $m \mathbf{a}(G) = m \mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{T}$, avec $\mathbf{OG} = (R - r) \mathbf{e}_r = r \mathbf{e}_r$,

$\mathbf{a}(G) = r \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_r$, et en projection sur $\mathbf{e}_r$, puis $\mathbf{e}_\theta$ (en posant $\mathbf{N} = -R_N \mathbf{e}_r$ et $\mathbf{T} = R_T \mathbf{e}_\theta$):

$-m r \dot{\theta}^2 = m g \cos\theta - R_N$ et $m r \ddot{\theta} = -m g \sin\theta + R_T$.

Ceci conduit à: $R_N = \frac{1}{3} m g (7 \cos\theta - 4 + 4 a \sin\theta)$ et $R_T = \frac{1}{3} m g (2 a \cos\theta + \sin\theta)$. (il manque m dans les variables proposées par l'énoncé).

□ 18 Vérification avec le graphe: ce graphe ne correspond pas aux expressions précédentes, les vérifications demandées ne sont pas valables non plus: $\alpha_n(0) = f = 0,6 \neq 0,8$ et $\alpha_t(0) = (2/3) a$.

Interprétons le graphe donné (qui est faux):

La courbe qui commence le plus haut est $\alpha_n(\theta)$ car $\alpha_n(0) = 0,8$;

si $\theta < 1$ rad, $\alpha_t < \alpha_n$ donc le roulement sans glissement est possible;

à $\theta \approx 1$ rad (intersection des deux courbes), le glissement commence;

$\alpha_n(\theta)$ coupe l'axe des abscisses pour $\theta \approx 1,6$ rad correspondant à la fin du contact entre le disque et le cercle. De toutes façons, ces courbes ne sont valables que jusqu'à leur intersection, après il faut reprendre l'étude en supposant un glissement.

Remarque: les valeurs que nous avons trouvées donnent $\alpha_n(0) < \alpha_t(0)$ donc le glissement commence dès le départ et l'étude est à reprendre entièrement.

III LA BOUSSOLE DE CROQUETTE

III-1 Cas des petites oscillations, en présence de frottement

□ 19 Le système [1] est obtenu en appliquant le théorème du moment cinétique à chacun des dipôles, par

exemple pour le 1: $\frac{d\sigma_1}{dt} = \mathbf{M}_1 \wedge \mathbf{B}_0 + \mathbf{M}_1 \wedge \mathbf{B}_{2 \rightarrow 1}$

où $\mathbf{B}_{2 \rightarrow 1}$ est donné par la question 4. Ce système est invariant par permutation des deux dipôles ($1 \leftrightarrow 2$).

D'après le texte, lorsque $\theta_2 = 0$, $B_{2 \rightarrow 1} = B_0$, ce qui donne d'après la question 4: $B_0 = \frac{\mu_0 M}{4 \pi d^3}$.

Pour les petites oscillations, avec $J_1 = J_2 = J$, $M_1 = M_2 = M$:

$J \ddot{\theta}_1 = -B_0 M (\theta_2 + 3 \theta_1)$ et $J \ddot{\theta}_2 = -B_0 M (\theta_1 + 3 \theta_2)$.

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{B_0 M}{J}} = \sqrt{\frac{\mu_0 M^2}{4 \pi d^3 J}}$, alors: $\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2 (\theta_2 + 3 \theta_1) = 0$ et $\ddot{\theta}_2 + \omega_0^2 (\theta_1 + 3 \theta_2) = 0$.

On cherche des solutions, en régime sinusoïdal, en représentation complexe, de la forme $\underline{\theta}_i = \underline{a}_i \exp(j\omega t)$ et

$\underline{\theta}_2 = \underline{\alpha}_2 \exp(j\omega t)$. Alors: $\underline{\alpha}_1 (-\omega^2 + 3\omega_0^2) + \underline{\alpha}_2 \omega_0^2 = 0$ et $\underline{\alpha}_1 \omega_0^2 + \underline{\alpha}_2 (-\omega^2 + 3\omega_0^2) = 0$.

Ce système homogène admet des solutions non nulles si son déterminant est nul, ce qui donne:

$(-\omega^2 + 3\omega_0^2)^2 = \omega_0^4$, donc: $-\omega^2 + 3\omega_0^2 = \pm \omega_0^2$ et donc deux solutions:

$\omega_- = \sqrt{2} \omega_0$ et $\omega_+ = 2 \omega_0$.

□ 20 Une paire de Helmholtz d'axe Ox , parcourue par un courant d'intensité $I_m \cos(\Omega t)$ permet de créer un champ magnétique de la forme $\mathbf{B}_1 = B_m \cos(\Omega t) \mathbf{u}_x$. On utilise une deuxième paire de Helmholtz, d'axe Oy , parcourue par un courant d'intensité $I_m \sin(\Omega t)$ (on déphase le premier de $-\pi/2$ par exemple avec un circuit RC série tel que $RC\Omega \ll 1$) qui crée $\mathbf{B}_2 = B_m \sin(\Omega t) \mathbf{u}_y$. La somme des deux donne un champ $\mathbf{B}$ dont la direction $(\cos(\Omega t) \mathbf{u}_x + \sin(\Omega t) \mathbf{u}_y)$ tourne autour de Oz à la vitesse angulaire $\Omega = \Omega \mathbf{u}_z$.

(L'énoncé parle de champ tournant et sinusoïdal: c'est contradictoire. Les composantes sont sinusoïdales, le champ tournant est de module constant.)

III-2 Portrait de phase, en l'absence de frottement

□ 21 $\mathbf{B}_1$ et $\mathbf{B}_0$ sont nuls: $\dot{\theta} = 0$, donc: $\theta = \text{cste}$: la trajectoire de phase est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

□ 22 $\mathbf{B}_1 = \mathbf{0}$. Alors: $J \ddot{\theta} = -M B_0 \sin \theta$. En multipliant par $\dot{\theta}$ puis en intégrant, on obtient:

$\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = M B_0 \cos \theta + \text{cste}$. (l'expression « trajectoires oscillantes » de l'énoncé est vague : la trajectoire ne bouge pas (ni dans l'espace des phases ni dans l'espace des positions). C'est le mouvement qui est oscillant).

Pour des petites oscillations autour de $\theta = 0$: $J \ddot{\theta} = -M B_0 \theta$ qui est l'équation d'un oscillateur harmonique

de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{B_0 M}{J}}$: trajectoires de phases elliptiques au centre.

L'énergie mécanique est $E_m = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - M B_0 \cos \theta = \text{cste} = E_{m0}$, donc: $\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = E_{m0} - M B_0 \cos \theta$.

Pour un oscillateur (pas forcément harmonique), il faut que $\dot{\theta}$ puisse s'annuler, donc que: $M B_0 \geq |E_{m0}|$.

Dans la partie oscillante du graphe, E_{m0} varie de $-M B_0$ à $+M B_0$. Donc : $\frac{1}{2} J \dot{\theta}_{\max}^2$

$\dot{\theta}_{\max} = \sqrt{\frac{4 M B_0}{J}} = 2 \omega_0$.

θ varie donc entre $-2 \omega_0$ et $2 \omega_0$, d'où une **plage de largeur $4 \omega_0$** , conforme à la donnée du 24.

□ 23 $\mathbf{B}_0 = \mathbf{0}$. On pose $\mathbf{B}_1 = B_1 \mathbf{u}_\alpha$ avec $\mathbf{u}_\alpha$ un vecteur unitaire faisant l'angle Ωt avec $\mathbf{u}_x$.

L'énergie potentielle est: $E_{p,\text{Lap}} = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_1 = -M B_1 \cos(\Omega t - \theta)$, et donc: $E_m = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - M B_1 \cos(\Omega t - \theta)$.

On pose: $\phi = \theta - \Omega t$, alors: $\dot{\phi} = \dot{\theta} - \Omega$, et $E_m = \frac{1}{2} J (\dot{\phi} + \Omega)^2 - M B_1 \cos \phi$, ce qui donne une courbe décalée de Ω selon l'axe des $\dot{\theta}$, donc centrée sur Ω au lieu de 0.

□ 24 Il n'y a pas de chevauchement si $\Omega > 2 \omega_0 + 2 \omega_1$ donc si $S < 1$.

Le recouvrement se produit si S augmente, par exemple en diminuant Ω ou J , ou en augmentant M ou B_0 ou B_1 .

□ 25 La formule [2] proposée est cohérente avec les résultats des questions 22 et 23.

À l'ordre 0: $\dot{\theta} = 0$, on pose: $\theta_0(t) = \omega t + \phi$.

On reporte cette expression dans [2] et on ne garde que les termes en ε :

$\dot{\theta}_1 = -\frac{M B_0}{J} \sin \omega t + \phi + \frac{M B_1}{J} \sin(\omega t - \Omega t + \phi)$, qui s'intègre en:

$$\theta_1(t) = \frac{M B_0}{J \omega^2} \sin(\omega t + \varphi) + \frac{M B_1}{J(\omega - \Omega)} \sin((\omega - \Omega)t + \varphi) + \text{cste, cette cste étant déterminée avec } \theta_1(0) = 0.$$

Remarque: cette expression suppose bien sûr que $\omega \neq \Omega$.

On voit donc apparaître une nouvelle pulsation: $\omega' = |\omega - \Omega|$.

□ 26 À l'ordre 2, les pulsations seront 2ω , $2|\omega - \Omega|$, $\omega + \omega' = 2\omega - \Omega$ ou Ω et $\omega - \omega' = \Omega$ ou $2\omega - \Omega$.

Une pulsation nulle apparaît à l'ordre 2 si $2\omega = \Omega$.

□ 27 L'accrochage n'existe pas si σ est irrationnel, c'est-à-dire si on ne peut pas le mettre sous la forme d'un rapport de deux entiers.

On peut consulter ce site sur le sujet:

<http://www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/croquette/ch3e.pdf>