

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель председателя
Оргкомитета III (областного)
этапа республиканской олимпиады,
заместитель начальника управления
образования Могилевского
облисполкома

С.В. Леонова
«30» ноября 2009 г.

Задания для II этапа республиканской олимпиады
по математике
12 декабря 2009 года

8 класс

1. В треугольнике ABC известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $CA = 6$. На BC взята точка M так, что $CM = 1$. Прямая, проходящая через точку M перпендикулярно биссектрисе угла ACB , пересекает AC в точке N , а прямая, проходящая через точку N перпендикулярно биссектрисе угла BAC , пересекает прямую AB в точке K . Найдите BK и AK .
2. Найти все наборы ненулевых цифр a, b, c , для которых выполняется равенство $\overline{a,b} \cdot c = a + b + c$ (здесь $\overline{a,b}$ означает число « a целых и b десятых»).
3. Имеется прямоугольная полоска 1×100 клеток. Три девочки: Катя, Лена и Надя по очереди закрашивают клетки этой полоски. За один ход Катя закрашивает 5 подряд идущих клеток, Лена – 4, Надя – 3. Закрашивать ранее закрашенные клетки нельзя. Первой ходит Катя, второй – Лена, третьей – Надя. Девочка, которая не может сделать ход, выбывает из игры, а право хода переходит к следующей. Побеждает та, которая сделает последний ход. Доказать, что Надя может выиграть независимо от игры соперниц.
4. Докажите, что $13 + 13^2 + 13^3 + 13^4 + \dots + 13^{2009} + 13^{2010}$ делится на 7.
5. В компьютер попал вирус. Действие вируса заключается в следующем. На жестком диске он создает 9 папок. Далее, случайным образом выбирает несколько из них (количество выбранных папок каждый раз может меняться) и создает в каждой из выбранных папок еще по 9 папок. Остальные папки остаются пустыми. С вновь созданными папками вирус поступает аналогично. Данная процедура повторилась несколько раз, пока вирус не был заблокирован антивирусом. В результате действия вируса на диске было создано 2009 пустых папок. Сколько непустых папок создал вирус?

Указания к решению
8 класс

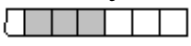
1. Ответ: $AK = 5$, $BK = 2$.

Пусть CD – биссектриса $\angle ACB$. По условию $MN \perp CD$. Тогда $\triangle OMC = \triangle ONC$ (прямоугольные, OC – общая, $\angle 1 = \angle 2$). Из равенства треугольников следует $MC = NC = 1$. Тогда $AN = 6 - 1 = 5$. Пусть AL – биссектриса $\angle BAC$. Тогда $\angle 3 = \angle 4$. По условию $NK \perp AL$. Тогда $\triangle AKL = \triangle ANL$ (прямоугольные, AL – общая, $\angle 3 = \angle 4$). Из равенства треугольников следует, что $AN = AK = 5$. $BK = 5 - 3 = 2$.

2. Ответ: $a = 6$, $b = 5$, $c = 2$ или $a = 2$, $b = 6$, $c = 5$.

Из условия: $ac + 0,1bc = a + b + c$ или $0,1bc = a + b + c - ac$, а значит, $0,1bc$ – целое число. Тогда bc делится на 10, что возможно лишь в тех случаях, когда одна из этих цифр – 5, а другая – четная (2; 4; 6; 8). Перебрав все 8 случаев, получим два ответа: $a = 6$, $b = 5$, $c = 2$ или $a = 2$, $b = 6$, $c = 5$.

3. Доказательство:

Свой первый ход Надя делает, отступив на 3 клетки от края полоски или ранее закрашенной клетки:  или . Очевидно, что пропущенные 3 белые клетки (назовем их резервными) может впоследствии закрасить только Надя. В дальнейшем Надя не должна закрашивать резервные клетки пока есть возможность закрасить какую-либо другую тройку клеток. Когда же такой возможности не будет (а в этом случае и другие девочки тем более не смогут сделать свои ходы), тогда Надя закрашивает резервную тройку клеток. Это будет последний ход в игре.

4. Проведем цепочку преобразований

$$13 + 13^2 + 13^3 + 13^4 + \dots + 13^{2009} + 13^{2010} =$$

$$13(1 + 13) + 13^3(1 + 13) + 13^5(1 + 13) + \dots + 13^{2009}(1 + 13) = 14(13 + 13^3 + 13^5 + \dots + 13^{2009}).$$

Так как 14 делится на 7, то и все число делится на 7.

5. Ответ: 250 папок.

Пусть вирус создал x пустых папок. Заметим, что создание в пустой папке девяти новых папок увеличивает общее количество пустых папок на 8 (1 пустая папка исчезает и появляются 9 новых). Связь между количеством непустых и пустых папок отобразим в таблице.

Число непустых папок	Число пустых папок
0	9
1	$9 + 8 = 17$
2	$9 + 8 \cdot 2 = 25$
3	$9 + 8 \cdot 3 = 33$
...	...
X	$9 + 8x = 2009$

Итак, имеем уравнение: $9 + 8x = 2009$. Откуда $x = 250$