

Преподаватель Семенова Ольга Леонидовна

Математика

Группа ТЭК 2/3

29.11.2022

Лекция

Методы интегрирования неопределенного интеграла.

Цели:

1.Образовательная: рассмотреть определение неопределенного интеграла, его свойства и способы интегрирования.

2.Воспитательная: воспитать логическое мышление, внимание.

3.Развивающая: развитие коммуникативных качеств, критического мышления, познавательной активности студентов.

Формируемые общие и профессиональные компетенции: Материал практического занятия на тему: «Методы интегрирования неопределенного интеграла» формирует такие общие компетенции:

- ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.
- ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
- ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.
- ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
- ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.
- ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.
- ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.
- ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.
- ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

Вопросы лекции:

1) Неопределенный интеграл.

2) Свойства неопределенного интеграла.

3) Таблица интегралов.

4) Способы вычисления неопределенного интеграла.

Неопределенный интеграл

Определение 1. Пусть Δ – промежуток действительной оси.

Функция $y=F(x)$ называется первообразной для функции $y=f(x)$ на

промежутке Δ , если $F(x)$ – дифференцируема на Δ и $F'(x) = f(x), \forall x \in \Delta$.
(1)

Пример:

а) $F(x)=x$ – первообразная для $f(x)=1: x' = 1, \forall x \in R$.

б) $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$ – первообразная для $f(x) = x^n$:

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n = x^n,$$

– на любом промежутке из области определения функции $f(x)$.

в) $F(x) = \ln|x|$ – первообразная для $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$. Действительно,

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \ln'|x| = \begin{cases} \ln' x = \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \ln'(-x) = \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

– на любом промежутке, не содержащем точку 0.

Замечание. Первообразная функция определена не однозначно. А именно, $F(x) = x+C$, где C – любая константа также будет первообразной для $f(x)=1: (x+C)' = 1$.

В общем случае верна теорема:

Теорема 1. Две дифференцируемые на промежутке Δ функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ будут первообразными для одной и той же функции $y=f(x)$ тогда и только тогда, когда

$$F_1(x) - F_2(x) = C, \forall x \in \Delta.$$

Доказательство.

$F_1'(x) = F_2'(x) = f(x), \forall x \in \Delta$. Докажем, что они отличаются на константу.

Пусть

$$F(x) = F_1(x) - F_2(x).$$

Тогда $F'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in \Delta$. Пусть

$$x_1, x_2 \in \Delta, x_1 < x_2.$$

По теореме Лагранжа (теорема 4 § 12):

$F(x_2) - F(x_1) = F'(c)(x_2 - x_1)$, где $c \in (x_1, x_2)$. Но $F'(x) = 0, \forall x \in \Delta$, поэтому

$F(x_2) - F(x_1) = 0$, то есть $F(x) = C$ и $F_1(x) - F_2(x) = C$, что и требовалось.

Достаточность. $F_1(x) - F_2(x) = C, F_1(x) = F_2(x) + C$. Обозначим

$$F_2'(x) = f(x).$$

Тогда $F_1'(x) = (F_2(x) + C)' = F_2'(x) = f(x)$, то есть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ -

первообразные

для одной и той же функции $y=f(x)$, что и требовалось доказать.

Определение 2. Множество всех первообразных для функции $y=f(x)$ на промежутке Δ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.

Если $F(x)$ - одна из первообразных, то, согласно теореме 1,

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \quad (2)$$

Свойства неопределенного интеграла

1. Если $F(x)$ - дифференцируема на Δ , то $\int F'(x)dx = F(x) + C$, (3)

или $\int d(F(x)) = F(x) + C$.

2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$, (4) здесь под записью $\int f(x)dx$ подразумеваем одну из первообразных.

3. Если $f(x)$ имеет первообразную на Δ , то $\lambda f(x)$ также имеет

первообразную на Δ и, если $\lambda \neq 0$, то $\int \lambda f(x)dx = \lambda \cdot \int f(x)dx$. (5)

4. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразную на Δ , тогда $f_1(x) \pm f_2(x)$ также имеет первообразную на Δ и:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx. \quad (6)$$

Свойства 1 – 4 легко выводятся из определения первообразной и интеграла и соответствующих свойств производной.

Докажем, например, свойство 3.

Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на промежутке Δ . Тогда

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow (\lambda F(x))' = \lambda f(x), \text{ то есть } \lambda F(x) - \text{первообразная для } \lambda f(x) \Rightarrow$$

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda F(x) + C = \lambda \left(F(x) + \frac{C}{\lambda} \right) = \lambda \cdot \int f(x) dx, \quad \text{что и требовалось}$$

доказать.

Из определений 1,2 следует, что интегрирование – действие обратное дифференцированию (находится функция, производная которой равна данной).

Таблица интегралов

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1); \quad \int 1 \cdot dx = \int dx = x + C;$
2. $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1); \int e^x du = e^x + C;$
4. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
8. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0;$

$$10. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C; a \neq 0;$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C;$$

$$12. \int \frac{du}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C;$$

$$13. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$14. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$15. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$$

$$16. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

При вычислении интегралов в простых случаях применяют свойства 1 – 4.

Пример:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{\sqrt{x^3}}{5} + \frac{3}{x} + 7 \right) dx &= \int \left(5x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{5}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{x} + 7 \right) dx = \\ &= 5 \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{5} \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 3 \ln|x| + 7x + C = 15\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x^5} + 3 \ln|x| + 7x + C. \end{aligned}$$

Пример:

$$\int \frac{dx}{4+3x^2} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\frac{4}{3} + x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{\frac{4}{3}}} \right) + C = \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg} \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} \right) + C.$$

Теорема 1. Если $y=f(x)$ - непрерывна на промежутке Δ , то для нее $\exists$ первообразная функция $y = F(x)$ на этом промежутке.

Способы вычисления неопределенного интеграла

Замена переменной в неопределенном интеграле

Теорема 1. Пусть функция $y = F(t)$ - первообразная для функции $y = f(t)$ на промежутке Δ_t то есть $F'(t) = f(t)$. Пусть $t = \varphi(x)$ - дифференцируема на промежутке Δ_x и $\varphi(\Delta_x) \subset \Delta_t$. Тогда $y = F(\varphi(x))$ - первообразная для

$$y = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x), \text{ то есть } \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + C. \quad (1)$$

Доказательство. $(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Формулу (1) можно переписать в виде

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(t) dt \Big|_{t=\varphi(x)} - \quad (2)$$

формула интегрирования с помощью подстановки $t = \varphi(x)$ или в виде:

$$\int f(\varphi(x)) d(\varphi(x)) = \int f(t) dt \Big|_{t=\varphi(x)} - \quad (3)$$

Формула интегрирования с помощью поднесения под дифференциал, когда подынтегральную функцию $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$ записывают в виде $f(\varphi(x)) d(\varphi(x))$,

занося $\varphi'(x)$ под дифференциал.

Пример:

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \int \sin^3 x d(\sin x) = \int \sin^3 t dt = \frac{1}{4} t^4 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x + C.$$

Пример:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = - \ln |\cos x| + C.$$

Пример:

$$\int \frac{x dx}{1+x^4} = \int \frac{d\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{1+x^4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x^2) + C.$$

При поднесении под дифференциал можно использовать свойства

дифференциала (см. § 6) $dx = d(x + c); dx = \frac{1}{c} d(c \cdot x)$, где c – константа.

Пример:

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Пример:

$$\int \frac{dx}{4+3x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}x)}{4+(\sqrt{3}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}x}{2} \right) + C$$

Пример:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} &= \int \frac{dx}{x \cdot |x| \cdot \sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = \begin{cases} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}; x > 0 \\ -\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}; x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} \\ \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2}{x}\right) + C, x > 0 \\ \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2}{x}\right) + C, x < 0 \end{cases} = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{|x|} + C. \end{aligned}$$

Иногда в формуле (2) легче вычислять левую часть, чем правую:

$$\int f(t) dt = \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx \Big|_{x=\varphi^{-1}(t)}. \quad (5)$$

Формула (5) – формула интегрирования с помощью замены переменной $t = \varphi(x)$; при этом $x = \varphi^{-1}(t)$ – обратная функция.

Пример:

$$\int \sqrt{1-t^2} dt = \left| \begin{array}{l} t = \sin x; x = \arcsin t \\ dt = \cos x dx \\ -1 \leq t \leq 1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2 x} \cos x dx =$$

$$= \int \cos^2 x dx = \left| \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \right| = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_{x=\arcsin t} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\arcsin t + \frac{1}{2} \sin 2(\arcsin t) \right) + C = \frac{1}{2} \arcsin t + \frac{1}{4} \cdot 2 \sin(\arcsin t) \cdot \cos(\arcsin t) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin t + \frac{1}{2} t \sqrt{1-t^2} + C.$$

Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Теорема 1. Пусть функция $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемы на промежутке Δ и на этом промежутке $\exists \int v(x) \cdot u'(x) dx = \int v(x) d(u(x))$. Тогда на этом промежутке

$\exists$ и $\int u(x) d(v(x))$ и $\int u dv = uv - \int v du$, (1) формула интегрирования по частям.

Доказательство. $d(u \cdot v) = u dv + v du$; (см. § 6).

$u dv = d(u \cdot v) - v du$, $\int d(uv) = uv + C$ (по свойству 1 § 18), $\int v du$ существует по условию теоремы, поэтому $\int u dv$ - существует и $\int u dv = \int d(u \cdot v) - \int v du = uv - \int v du$.

Пример:

$$\int (2x+1) \cos 3x dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \\ \cos 3x = dv \Rightarrow v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right| =$$

$$= (2x+1) \cdot \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{2}{3} \int \sin 3x dx = \frac{1}{3} (2x+1) \cdot \sin 3x + \frac{2}{9} \cos 3x + C.$$

Пример:

$$\begin{aligned}
\int (2x+1) \ln 3x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln 3x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = (2x+1) dx \Rightarrow v = x^2 + x \end{array} \right| = \\
&= (x^2 + x) \cdot \ln 3x - \int (x^2 + x) \cdot \frac{1}{x} dx = (x^2 + x) \cdot \ln 3x - \int (x+1) dx = \\
&= (x^2 + x) \cdot \ln 3x - \frac{1}{2} x^2 - x + C.
\end{aligned}$$

Замечание.

1. При интегрировании выражений вида:

$$\int P_n(x) \cdot \sin \alpha x dx, \int P_n(x) \cdot \cos \alpha x dx, \int P_n(x) \cdot e^{\alpha x} dx, \quad \text{где } P_n(x)$$

многочлен степени n полагают:

$$u = P_n(x), dv = \sin \alpha x dx, dv = \cos \alpha x dx, dv = e^{\alpha x} dx. \text{ После}$$

интегрирования по частям степень многочлена уменьшается на 1 (см. пример 1).

2. При интегрировании выражений вида:

$$\int P_n(x) \cdot \ln \alpha x dx, \int P_n(x) \cdot \arcsin \alpha x dx, \int P_n(x) \cdot \arccos \alpha x dx, \int P_n(x) \cdot \arctg \alpha x dx,$$

$$\int P_n(x) \cdot \text{arcctg } \alpha x dx \quad \text{полагают:}$$

$$u = \ln \alpha x, u = \arcsin \alpha x, u = \arccos \alpha x, u = \arctg \alpha x, \quad u = \text{arcctg } \alpha x, dv = P_n(x).$$

($P_n(x)$ - многочлен). После интегрирования по частям интеграл упрощается.

Пример:

$$\int x^2 \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right| = x^2 \cdot \sin x - 2 \int x \sin x dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| = x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \int \cos x dx) = \\
&= x^2 \cdot \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.
\end{aligned}$$

Пример:

$$\begin{aligned}
\int e^{ax} \cdot \cos bxdx &= \left| \begin{array}{l} u = e^{ax} \Rightarrow du = a \cdot e^{ax} dx \\ dv = \cos bxdx \Rightarrow v = \frac{1}{b} \sin bx \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{b} e^{ax} \cdot \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bxdx = \left| \begin{array}{l} u = e^{ax} \Rightarrow du = a \cdot e^{ax} dx \\ dv = \sin bxdx \Rightarrow v = -\frac{1}{b} \cos bx \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{b} e^{ax} \cdot \sin bx - \frac{a}{b} \left(-\frac{1}{b} e^{ax} \cdot \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bxdx \right). \\
\text{То есть } \int e^{ax} \cos bxdx &= \frac{1}{b} e^{ax} \cdot \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cdot \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bxdx.
\end{aligned}$$

Таким образом, проинтегрировав дважды по частям, получили уравнение, содержащее $\int e^{ax} \cos bxdx$ в правой и левой части. Решив его, получим:

$$\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{e^{ax} (b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

Домашнее задание

Ответить на вопросы:

- 1) Определение неопределенного интеграла.
- 2) Свойства неопределенного интеграла.
- 3) Записать таблицу интегралов.

Ответы присылать на электронную почту: teacher-m2022@yandex.ru