

УТВЕРЖДАЮ

Начальник главного управления
по образованию
Могилевского облисполкома

_____ А.Б.Заблоцкий
«___» ноября 2020 г.

ЗАДАНИЯ

для проведения второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»

Дата проведения: 28 ноября 2020 г.

Время выполнения заданий: 10.00 – 15.00.

Х класс

1. Вершины трапеции $ABCD$ лежат на графике функции $y = x^2$. Основания AD и BC параллельны оси абсцисс, а диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке, ордината которой равна m . Найти площадь трапеции.
2. Существует ли функция $f(x)$, определенная на множестве действительных чисел такая, что для любого действительного x верно равенство $f(x^2) + f(4 - 2x) = x$?
3. Биссектрисы четырех внутренних углов трапеции $ABCD$ (AD и BC – основания) пересекаются в точке O . При этом $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, $OD=d$. Найти площадь трапеции.
4. Имеется 20 карточек, на которых написаны числа от 1 до 20. Сколькими способами можно выбрать три карточки так, чтобы сумма квадратов чисел, записанных на них, была кратна 5?
5. Доска 20×21 клеток (20 строк, 21 столбец) замощена плитками размера 1×3 клетки. Каждая плитка закрывает ровно 3 клетки. Плитки не перекрывают друг друга. Доказать, что независимо от способа замощения, количество вертикальных плиток кратно трем, а количество горизонтальных плиток при делении на 3 дает остаток 2.

Пользоваться калькулятором не разрешается

Математика
X класс. Решения.

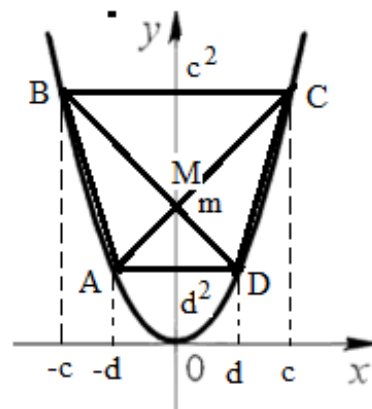
Решения учащихся могут отличаться от авторских!

1. **Решение:**

Так как, график функции $y = x^2$ симметричен относительно оси ординат и основания трапеции параллельны оси абсцисс (т.е. перпендикулярны оси ординат), то трапеция $ABCD$ – равнобедренная. Положим, что $AD < BC$ (другой случай рассматривается аналогично). Поскольку основания трапеции параллельны оси абсцисс, то будем считать, что вершины трапеции имеют координаты:

$A(-d; d^2)$, $B(-c; c^2)$, $C(c; c^2)$, $D(d; d^2)$, где $c > d > 0$. Тогда $AD = 2d$, $BC = 2c$, высота трапеции $h = c^2 - d^2$.

Пусть M – точка пересечения диагоналей. Так как трапеция $ABCD$ – равнобедренная, то $BM = CM$. Отсюда следует, что точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC , т.е. на оси ординат и имеет координаты $(0; m)$.



Пусть прямая AC имеет уравнение $y = k_1x + b_1$. Точка $M(0; m)$ лежит на прямой AC , откуда $b_1 = m$. Точки A и C являются точками пересечения прямой AC и параболы $y = x^2$. Тогда числа $-d$ и c являются корнями уравнения $x^2 = k_1x + m$ или $x^2 - k_1x - m = 0$. Отсюда по теореме Виета имеем: $-d + c = k_1$; $-dc = -m$ или $c - d = k_1$; $dc = m$.

Пусть прямая BD имеет уравнение $y = k_2x + b_2$. Точка $M(0; m)$ лежит на прямой BD , откуда $b_2 = m$. Точки B и D являются точками пересечения прямой BD и параболы $y = x^2$. Тогда числа $-c$ и d являются корнями уравнения $x^2 = k_2x + m$ или $x^2 - k_2x - m = 0$. Отсюда по теореме Виета имеем: $-c + d = k_2$; $-cd = -m$ или $d - c = k_2$; $dc = m$.

Так как прямые AC и BD перпендикулярны, то $k_1 \cdot k_2 = -1$, $(c - d) \cdot (d - c) = -1$ или $(c - d)^2 = 1$. С учетом того, что $c > d$, заключаем, что $c - d = 1$.

Площадь трапеции $ABCD$:

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot h = \frac{2c + 2d}{2} \cdot (c^2 - d^2) = (c + d)(c + d)(c - d) = (c + d)^2 = (c - d)^2 + 4cd = 1 + 4m$$

Ответ: $1 + 4m$.

2. **Решение:**

Подставим в равенство $f(x^2) + f(4 - 2x) = x$ значение $x = 0$: $f(0) + f(4) = 0$.

Подставим в равенство $f(x^2) + f(4 - 2x) = x$ значение $x = 2$: $f(4) + f(0) = 2$.

Получили противоречие. Следовательно, такой функции не существует.

Ответ: не существует.

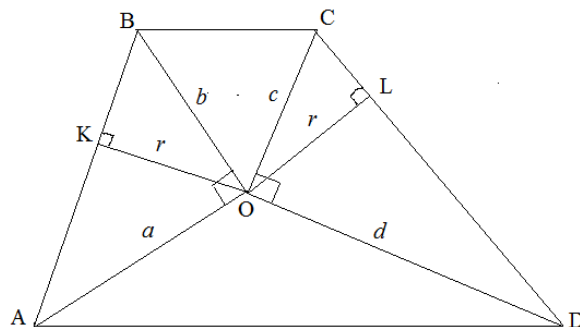
3. **Решение:**

Так как точка O является точкой пересечения биссектрис внутренних углов трапеции, то точка O равноудалена от всех сторон трапеции, т.е. является центром вписанной окружности.

Тогда $AB + CD = AD + BC$, высота трапеции $h = 2r$, где r – радиус вписанной окружности.

Площадь трапеции:

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot 2r = (AD + BC) \cdot r = (AB + CD) \cdot r = AB \cdot r + CD \cdot r = 2S_{\triangle AOB} + 2S_{\triangle COD}$$



$$\text{Итак, } S_{ABCD} = 2S_{\triangle AOB} + 2S_{\triangle COD} \quad (1)$$

$\angle C + \angle D = 180^\circ$ (внутренние односторонние при параллельных прямых AD и BC и секущей CD).

$\angle OCD + \angle ODC = \frac{1}{2} \angle C + \frac{1}{2} \angle D = 90^\circ$, откуда $\angle COD = 90^\circ$. Т.е. треугольник COD – прямоугольный. Аналогично, треугольник AOB также прямоугольный.

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle AOB} + 2S_{\triangle COD} = 2 \cdot \frac{1}{2} AO \cdot BO + 2 \cdot \frac{1}{2} CO \cdot DO = ab + cd$$

Из (1) получаем

Ответ: $S = ab + cd$.

4. Решение:

Рассмотрим, какие остатки могут давать квадраты натуральных чисел при делении на 5.

Остаток числа n при делении на 5	Остаток числа n^2 при делении на 5
0	0
1	1
2	4
3	4
4	1

Разобьем числа от 1 до 20 на три группы в соответствии с тем, какой остаток дают квадраты этих чисел при делении на 5. Обозначим эти группы как А, В, С.

В группу А войдут числа кратные 5: 5, 10, 15, 20. Всего таких чисел 4.

В группу В войдут числа, квадраты которых при делении на 5 дают остаток 1. Это числа, которые при делении на 5 дают остатки 1 или 4: 1, 4, 6, 9, 11, 14, 16, 19. Таких чисел 8.

В группу С войдут числа, квадраты которых при делении на 5 дают остаток 4. Это числа, которые при делении на 5 дают остатки 2 или 3: 2, 3, 7, 8, 12, 13, 17, 18. Таких чисел 8.

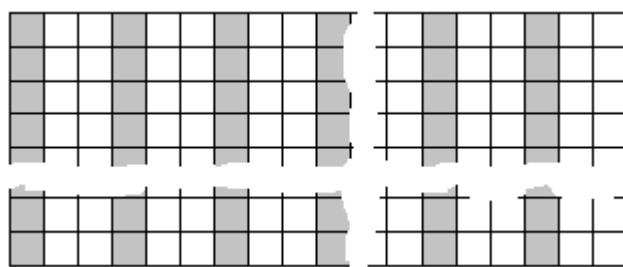
Чтобы сумма трех чисел была кратна пяти, сумма их остатков от деления на 5 также должна быть кратна пяти. Суммируя, три остатка, каждый из которых равен 0, 1 или 4, число кратное пяти можно получить следующим способом $0+1+4$, т.е. нужно взять по одному числу из каждой группы. Из группы А число можно выбрать 4 способами, из групп В и С числа можно выбрать 8 способами. Всего способов будет $4 \cdot 8 \cdot 8 = 256$.

Ответ: 256 способов.

5. Доказательство:

Доска имеет 20 строк и 21 столбец. Всего на доске поместится $20 \cdot 21 : 3 = 140$ плиток 1×3 .

Закрасим черным цветом столбцы с номерами: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19. Всего будет закрашено $7 \cdot 20 = 140$ клеток. Каждая вертикально лежащая плитка закрывает либо 3, либо 0 закрашенных клеток – в любом случае число клеток, кратное 3. Каждая горизонтально лежащая плитка закрывает одну закрашенную клетку. Пусть при замощении доски использовано n горизонтальных плиток, а из вертикальных плиток ровно m плиток закрывают 3



клетки. Общее число закрытых закрашенных клеток равно 140.

$$\text{Имеем: } 3m + n = 140.$$

Так как число 140 при делении на 3 дает остаток 2, то и n при делении на 3 дает остаток 2. Пусть общее число вертикальных плиток равно k . Тогда $n + k = 140$, $k = 140 - n$. Числа 140 и n при делении на 3 дают остаток 2. Тогда их разность кратна трем.

Что и требовалось доказать.