

Міністерство освіти та науки України
Державний вищий навчальний заклад
«Приазовський державний технічний університет»
Кафедра фізики

Федун В.І.

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ФІЗИЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ

Методичні вказівки
з виконання лабораторного практикуму
за курсом «Фізика»
для здобувачів вищої освіти усіх спеціальностей
всіх форм навчання

Маріуполь

2022

УДК 53.088

Математичні методи обробки результатів фізичних вимірювань: методичні вказівки щодо виконання лабораторного практикуму за курсом «Фізика» для здобувачів вищої освіти усіх спеціальностей усіх форм навчання // Укл. В.І. Федун. – Маріуполь: ПДТУ, 2022 – 30 с.

У методичному посібнику викладено основні принципи математичної обробки результатів вимірювань фізичних величин, які необхідні під час виконання лабораторних робіт з фізичного практикуму. Наведено основні поняття теорії ймовірностей та математичної статистики, що дозволяють освоїти необхідні елементи теорії помилок. У доступній формі сформульовані принципи отримання точкових та інтервальних оцінок істинних значень вимірюваних величин.

Укладач:

доц. Федун В.І.

Рецензент

доц. Цветкова О.В.

Затверджено
на засіданні кафедри фізики,
протокол № від 2022р.

Затверджено
на засіданні методичної комісії
факультету інформаційних технологій,
протокол № від 2022 р.

©ДВНЗ «ПДТУ», 2022

Зміст

	стр
<u>Вступ</u>	4
1 Вірогідні властивості серії спостережень.....	5
2 Гістограма та функція розподілу.....	6
3 Точкова та інтервальна оцінка вимірюваної величини.....	9
4 Обчислення помилок при прямих вимірах.....	11
5 Обчислення помилок при непрямих вимірах.....	15
6 Підготовка та проведення вимірювань.....	16
7 Правила заокруглення чисельного результату.....	17
8 Приклади.....	19
8.1 Обробка результатів прямих вимірів.....	19
8.2 Обробка результатів непрямих вимірювань.....	21
9 Графічне представлення результатів	22
10 Висновки до лабораторної роботи.....	27
Список рекомендованих джерел	28
Додаток 1 Значення коефіцієнтів Стюдента та Лапласа	29
Додаток 2 Відбір промахів за критерієм Шовене.....	30

ВСТУП

Основною задачею фізичного експерименту є вимірювання чисельних значень величин, що спостерігаються. Вимірюванням називається операція порівняння досліджуваної величини з еталоном або з одиницею виміру даної величини. У фізиці у системі СІ лише сім величин мають еталони: одиниця маси – кілограм, [кг]; одиниця довжини – метр [м]; одиниця часу – секунда [с]; одиниця сили струму – Ампер [А]; абсолютна температура – градус за шкалою Кельвіна [Т]; кількість речовини – моль [моль]; сила світла – кандела [кд]. Інші величини виражаються через основні.

Всі вимірювання поділяються на дві групи: прямі і непрямі.

При прямому вимірі виконується безпосереднє визначення значення шуканої величини за показаннями вимірювального приладу. Непрямий вимір базується на вимірі кількох прямих величин з подальшим обчисленням шуканої величини за відповідними формулами. Наприклад, об'єм паралелепіпеда визначають шляхом вимірювання трьох його ребер, електричний опір – за вимірюванням сили струму та напруги тощо. У всіх цих випадках шукане значення невідомої вимірюваної величини утворюється шляхом розрахунків.

Метою будь-якого виміру є визначення істинного значення (скорочено – ІЗ) шуканої величини, що практично неможливо досягти у зв'язку з існуванням помилок, похибок. Передбачити усі похибки неможливо.

Похибки при вимірі фізичних величин поділяються на грубі, систематичні та випадкові.

Грубі помилки, або промахи, можуть виникнути в результаті неправильного запису показання приладу, зміщення нульової точки або через неправильну установку приладу. Грубі похибки викликані постійними факторами, тому багаторазово повторюються в одних і тих самих вимірах.

Систематичні похибки приховані в неточності самого приладу та неврахованих факторів методу вимірювань. Зазвичай

величина систематичної похибки приладу вказується у його технічному паспорті. Що ж до методу вимірів, то тут все залежить від кваліфікації експериментатора. Сумарна систематична похибка завжди спотворюватиме результат в один бік. Але знак цієї похибки невідомий. На цю похибку не можна внести виправлення, вона завжди включена до остаточного результату вимірювань.

Слід зазначити, що багато грубих і систематичних помилок можуть бути усунені при детальному аналізі результатів вимірювань і контрольної перевірки вимірювальної техніки.

Випадкові похибки виникають у результаті прояву багатьох випадкових, неконтрольованих факторів. Вони зумовлені помилкою вимірювальних приладів, недосконалістю органів чуття, психофізичним станом дослідника. Випадкові помилки, зазвичай, не повторюються при повторенні вимірів. Однак існують методи, що дозволяють їх упевнено оцінити і зменшити у кожному конкретному випадку. Ці методи засновані на теорії ймовірностей та законах математичної статистики.

1 Вірогідні властивості серії спостережень

В основі теорії похибок лежать три припущення, які підтверджені дослідом:

1. Відхилення значень від істинного значення приймають безперервний ряд.

2. Похибки, які мають однакові абсолютні значення, але різні знаки, зустрічаються однаково часто.

3. Чим більше значення похибки, тим рідше воно трапляється.

Практика вивчення випадкових явищ показує, що хоча результати окремих спостережень, навіть проведених в однакових умовах, можуть сильно відрізнятись, у той же час середні результати для достатньо великої кількості спостережень стійкі і слабо залежать від результатів окремих спостережень. Теоретичним обґрунтуванням цієї чудової властивості випадкових явищ є закон великих чисел та теореми, що

встановлюють стійкість середніх результатів великої кількості випадкових явищ та пояснюють причину цієї стійкості.

2 Гістограма та функція розподілу

Існування випадкових помилок призводить до необхідності повторення n однорідних вимірів (серії вимірів), внаслідок чого отримують сукупність значень (вибірка) $x_1, x_2, \dots, x_n$. Результати цих вимірювань можна наочно уявити, побудувавши діаграму, яка показує, як часто виходять ті чи інші значення цієї серії. Таку діаграму називають **гістограмою** і будують в такий спосіб.

Нехай усі значення результатів x_i серії вимірювань лежать між мінімальним $x_{\min}$ та максимальним $x_{\max}$ значеннями $(x_{\min} \leq x_i \leq x_{\max})$. Розіб'ємо проміжок $[x_{\min}, x_{\max}]$ на деяке число k (рекомендується $k \gg \sqrt{n}$) однакових інтервалів (див. рис. 1). Ширина кожного інтервалу при цьому виходить рівною $b = (x_{\max} - x_{\min}) / k$.

За результатами серії вимірювань підрахуємо, скільки результатів потрапило до кожного інтервалу. Нехай n_m – число результатів, що потрапили в m -ий інтервал $(1 \leq m \leq k)$. Тоді n_m / n – частка всіх вимірювань серії, що потрапили в m -ий інтервал. Побудуємо тепер на цих k інтервалах прямокутники з висотою, що дорівнює n_m / n . Східчаста діаграма, що отримується таким чином, і називається гістограмою. Приклад гістограми наведено на рис.1.

Величина $P_m = n_m / n$ називається **ймовірністю** попадання результату вимірювання в m -ий інтервал. Вона дорівнює площі

прямокутника, побудованого на цьому інтервалі. Зауважимо, що площа під гістограмою (тобто сумарна площа всіх прямокутників) дорівнює 1.

Якщо збільшити кількість вимірювань n та кількість інтервалів k , то ширина інтервалів b буде зменшуватися. У ліміті, коли $n \rightarrow \infty$, а $b \rightarrow 0$, гістограми наближаються до деякої плавної кривої. Функцію, графіком якої є ця крива, називають **густиною розподілу** результатів вимірювань (див. рис.2) і позначають як $p(x)$.

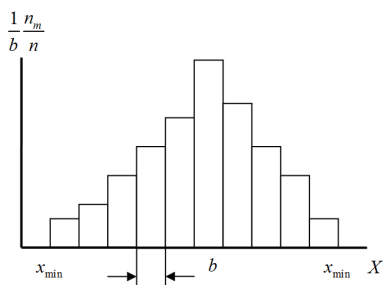


Рисунок 1 – Гістограма

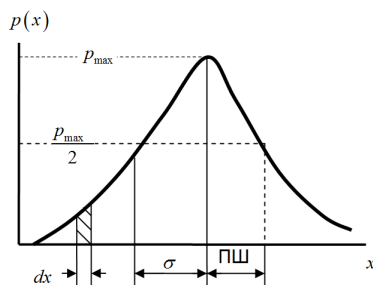


Рисунок 2 – Щільність ймовірності

При цьому, ймовірність попадання результату окремого виміру в інтервал від x до $x + dx$ дорівнює $p(x)dx$ (на рис. 2 цієї ймовірності відповідає площа заштрихованої криволінійної трапеції).

Тоді $P_{x_1 < x < x_2}$ — ймовірність отримання результату спостереження у будь-якому кінцевому інтервалі x_1, x_2 дорівнює площі під кривою $p(x)$ між відповідними абсцисами x_1 та x_2 . Тому функцію $p(x)$ називають ще **функцією розподілу ймовірностей** або **щільністю ймовірності**. Функція

$p(x)$ пов'язана з $P_{x_1 < x < x_2}$ таким чином:

$$P_{x_1 < x < x_2} = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx \quad (1)$$

Щільність ймовірності характеризується набором параметрів – моментів розподілу, два з яких в теорії похибок мають головне значення.

Математичне очікування μ – це число, в околиці якого концентруються значення випадкової величини:

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \quad (2)$$

Дисперсія s^2 – це число, що характеризує ступінь розсіювання значень випадкової величини навколо її математичного очікування:

$$s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 p(x) dx \quad (3)$$

Величина S називається середнім (стандартним) квадратичним відхиленням.

Часто, як одну з характеристик розкиду окремих X_i , беруть половину ширини графіка функції розподілу на половині його висоти (напівширина на піввисоті, скорочено – ПШ), як показано на рисунку 2. Значення цієї величини легко визначається при графічній обробці даних. Слід зазначити, що значення ПШ і S можна порівняти за величиною.

Розподіл Гауса. З припущень теорії похибок і закону великих чисел випливає, що розподіл ймовірності відліків вимірюваної величини підпорядковується так званому нормальному розподілу (закону розподілу Гауса). Тому **багато статистичних методів обробки даних засновані на законі нормального розподілу.**

Щільність ймовірності нормального розподілу описується функцією Гауса:

$$p(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}} \quad (4)$$

Легко показати, що у виразі (4) m є математичне очікування, а s^2 – дисперсія.

Кілька кривих Гаусса для $m = 4$ та різних значень параметра σ зображені на рис.3. Як очевидно з представлених графіків, параметр m визначає положення максимуму розподілу, а σ визначає ширину розподілу.

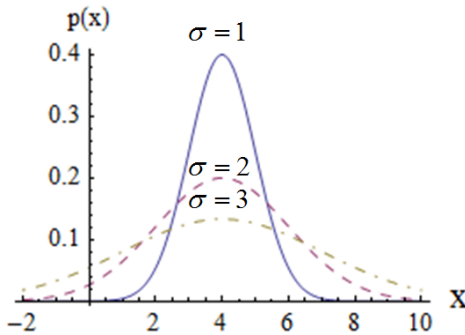


Рисунок 3 – Нормальний розподіл

3 Точкова та інтервальна оцінки вимірюваної величини

Точкова оцінка. При проведенні вимірів виникає питання – яку виміряну величину взяти як її справжнє значення X_0 ? Теорія ймовірностей та математична статистика стверджують, що із X_0 величини може бути отримано при дуже великій

кількості вимірювань ($n \in \mathbb{N}$) і дорівнює воно математичному очікуванню:

$$x_0 = m_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (5)$$

При кінцевій кількості (вибірці) вимірів як оцінки істинного значення можна використовувати точкову оцінку, виражену у вигляді одного числа. В цьому випадку як оцінка істинного значення приймається його **вибіркове середнє** (середнє арифметичне величини, що спостерігається), яке визначається за формулою:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (6)$$

де n – число вимірів, x_i – результат i – того виміру.

Слід зазначити, що точне визначення ІЗ x_0 неможливе, оскільки це потребувало б нескінченної кількості вимірювань. Можливо лише, по-перше, знайти вибіркове середнє (ВС) $\langle x \rangle$ і, по-друге, оцінити, на скільки відрізняється $\langle x \rangle$ від x_0 .

Інтервальна оцінка. Суть інтервальної оцінки вимірюваної величини полягає в тому, щоб вказати інтервал значень (**довірчий інтервал**), який із заданою надійністю (довірчою ймовірністю) покривав справжнє значення вимірюваної величини. Тобто, шукана величина задається не числом, яке є точкою на числовій осі, а інтервалом $[\bar{x} - D_x, \bar{x} + D_x]$. Тут запроваджено нову величину D_x – абсолютну помилку вимірювань, а $\bar{x}$ – точкову оцінку величини x , отриману, як результат середнього за формулою (6). Іншими словами, **довірчим інтервалом** називається інтервал $[\bar{x} - D_x, \bar{x} + D_x]$, який із заданою довірчою ймовірністю

(надійністю) покриває невідоме справжнє значення X_0 вимірюваної величини.

Тоді також справедливе визначення: **надійністю (довірчою ймовірністю P)** оцінки вимірюваної величини X за вибіркоvim середнім $\bar{x}$ називають ймовірність g , з якою виконується нерівність $|m - \bar{x}| < D_x$. Тобто,

$$P(\bar{x} - D_x < m < \bar{x} + D_x) = g \quad (7)$$

Це співвідношення стверджує наступне: ймовірність того, що інтервал $[\bar{x} - D_x, \bar{x} + D_x]$ містить у собі невідоме справжнє значення X_0 вимірюваної величини x дорівнює g .

Підсумовуючи, пояснімо зміст понять **довірчий інтервал** і **довірча ймовірність** наступним прикладом: нехай $g = 0,955$, тоді можна стверджувати, що з досить великої кількості вимірів в 95,5% випадків значення вимірюваної величини x належить інтервалу $[\bar{x} - D_x, \bar{x} + D_x]$, і лише 4,5% випадків виходить за межі зазначеного інтервалу.

Таким чином, шукана невідома вимірювана величина може бути визначена у вигляді інтервальної оцінки (при наперед заданої надійності g) наступним чином:

$$\boxed{x = \bar{x} \pm D_x} \quad , \text{ при } g = \dots \quad (8)$$

Тобто, абсолютна помилка характеризує відхилення обчисленого середнього значення вимірюваної величини від її істинного значення та визначає точність вимірювань.

4 Обчислення помилок при прямих вимірах

Обчислення помилок. Нехай усунуті всі грубі помилки, а

вимірювальні прилади ідеальні. Як було зазначено вище, у результаті повторення n однорідних вимірів виходить сукупність значень $x_1, x_2, \dots, x_n$. Дані значення дозволяють отримати за формулою (6) середнє арифметичне вимірюваної величини або середнє вибіркове $\bar{x}$.

В цьому випадку для оцінки відзнаки ВС $\bar{x}$ від ІЗ x_0 треба спочатку знайти «розкид» результатів окремих вимірювань, інакше кажучи, визначити, наскільки у вибірці окреме значення x_i відрізняється («в середньому») від ВС $\bar{x}$.

За наявності лише випадкових помилок кількісною характеристикою розкиду x_i від $\bar{x}$ є так зване **середньоквадратичне вибіркове відхилення** (скорочено – СКВВ) $S_{x,n}$:

$$S_{x,n} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2} \quad (9)$$

Можна довести (методами математичної статистики), що при прагненні числа вимірів до нескінченності вибіркове СКВ прагне до певної межі – середнього (стандартного) квадратичного відхилення S :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{x,n} = S \quad (10)$$

Якщо розглядати декілька серій вимірювань, у кожній з яких буде отримано індивідуальне значення ВС $\bar{x}$, то отримані значення у сукупності також представляють деяку вибірку, що має також деяке розсіювання значень. Це розсіювання характеризується у математичній статистиці

величиною, що називається **середнім квадратичним відхиленням середнього** (скорочено – СКВС) $S_{(x)}$ і визначається за формулою:

$$S_{(x)} = \frac{S_{x,n}}{\sqrt{n}} \quad \text{або} \quad S_{(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n(n-1)}} \quad (11)$$

Очевидно, що абсолютна величина різниці вибіркового середнього та істинного значення $|\bar{x} - x_0|$ та СКВС $S_{(x)}$ при досить великій кількості дослідів n у серії є величинами одного порядку, тобто:

$$|\bar{x} - x_0| : S_{(x)}, \text{ при } n \gg 1.$$

Такий підхід дозволяє визначити абсолютну помилку вимірювань Dx_{cl} , спричинену випадковими процесами. Як свідчить математична статистика

$$Dx_{cl} = t_{g,n} \times S_{(x)}, \quad (12)$$

де величина $t_{g,n}$ – називається коефіцієнтом Стюдента.

Для визначення коефіцієнта Стюдента необхідно вказати величину довірчої ймовірності γ і кількість вимірювань n . Шуканий коефіцієнт визначається з таблиці, яка наведена в додатку 1.

Щоб остаточно встановити межі довірчого інтервалу, необхідно розширити його з урахуванням абсолютної систематичної похибки $\Delta x_{сист}$. Для цього необхідно знати середнє квадратичне відхилення приладу $S_{пр}$, яке, як правило, можна знайти в паспорті, а в найпростіших випадках прийняти рівним половині ціни поділу молодшого розряду шкали.

Тоді $\Delta x_{сист}$ визначається із співвідношення:

$$\boxed{D x_{\text{сист}} = t_g S_{\text{Пр}}} \quad (13)$$

Тут запроваджено коефіцієнт t_g – коефіцієнт Лапласа, який також визначається із наведеної у додатку 1 таблиці при значенні $n = \infty$.

Зазвичай (хоча, не дуже суворо) можна покласти, що сумарна похибка $D x$ визначається як корінь квадратний із суми квадратів випадкової та систематичної похибок:

$$\boxed{D x = \sqrt{D x_{\text{сл}}^2 + D x_{\text{сист}}^2}} \quad (14)$$

Для оцінки величини абсолютної похибки по відношенню до самої вимірюваної величини вводиться відносна помилка, яка дорівнює:

$$\boxed{d = D x / \bar{x} \tilde{n}} \quad (15)$$

Очевидно, що формулами (6) ÷ (15) можна користуватися в тих випадках, якщо дані, що піддаються обробці, не містять промахів. Тому обробку прямих вимірів рекомендується розпочинати з перевірки результатів на наявність промахів. Існує багато критеріїв виявлення та відкидання промахів, але жоден з них не є універсальним. Вибір критерію залежить від мети вимірів, але рішення відкинути якісь дані, зрештою, завжди суб'єктивно.

Сформулюємо найчастіше застосовуваний, так званий, **критерій Шовене**. З отриманого ряду, що містить n вимірювань, вибирається аномальний (максимальний) відлік x_k і обчислюється модуль його відхилення від середнього значення в частках вибіркового середнього квадратичного вибіркового відхилення:

$$Z = \frac{|x_k - \langle x \rangle|}{S_x} \quad (16)$$

Потім, по таблиці додатка 2 знаходимо очікуване число M відліків, серед яких буде хоча б один аномальний. Якщо $M > n$, то відлік x_k вважається промахом.

Таким чином, алгоритм обробки прямих вимірювань є наступною послідовністю дій.

<i>Алгоритм обробки прямих вимірів</i>		
пункт	дія	формула
1	Обчислити вибіркове середнє $\langle x \rangle$ серії вимірів.	(6)
2	Обчислити СКВВ $S_{x,n}$. Якщо промахи усунуті, перейти до п.4 або до п.3.	(9)
3	Перевірити відліки на наявність промахів: • відібрати аномальний відлік; • обчислити його відносне відхилення; • визначити очікуване число відліків, серед яких може бути аномальний; • якщо це число більше за число відліків, то виключити аномальний відлік і перейти до 1; інакше перейти до 4.	(16) <u>додаток 2</u>
4	Обчислити СКВС	(11)
5	Визначити коефіцієнти Лапласа та Стюдента для заданої надійності та отриманого числа відліків	<u>додаток 1</u>

6	Обчислити випадкову похибку	(12)
7	Обчислити повну похибку	(14)
8	Після заокруглень результат обробки вимірювань записати у формі: $x = \bar{x} \pm D_x$, при $g = \dots$ і $d = D_x / \bar{x}$	(8) (15)

5 Обчислення помилок при непрямих вимірах

Нехай y – опосередковано вимірювана величина є функцією кількох змінних, безпосередньо вимірюваних величин $a, b, \dots, c$, тобто.

$$y = f(a, b, \dots, c) \quad (17)$$

Середнє значення $\bar{y}$ можна знайти шляхом підстановки у формулу (17) як аргументи усереднених значень безпосередньо виміряних величин:

$$\bar{y} = f(\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{c}) \quad (18)$$

Тоді абсолютна похибка Δy визначається за формулою

$$Dy = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial a} Da\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial b} Db\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial c} Dc\right)^2} \quad (19)$$

де $\frac{\partial y}{\partial a}$ – значення часткової похідної функції y за змінною a .

Часткова похідна – це похідна, яка обчислюється від функції y за аргументом a , у припущенні, що інші аргументи вважаються постійними. У цій формулі часткові похідні

розраховуються при підстановці до неї середніх арифметичних значень всіх аргументів $\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{c}$ – отриманих як результат прямих вимірів, а $D a, D b, \dots, D c$ – абсолютні помилки цих величин. Потім обчислюється відносна похибка опосередковано вимірюваної величини:

$$d = \frac{D y}{\bar{y}} \quad (20)$$

Таким чином, алгоритм обробки непрямих вимірів є наступною послідовністю дій.

Алгоритм обробки непрямих вимірів		
пункт	дія	
1.	За відомою залежності непрямо вимірюваної величини від її аргументів, середні значення яких знайдені за допомогою прямих вимірів, обчислити дійсне значення функції	<u>формула (18)</u>
2.	Обчислити числові значення часткових похідних функції, прирівнявши значення всіх аргументів середнім вибіркоvim $\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{c}$	
3.	Обчислити абсолютну похибку опосередковано вимірюваної величини (ВАЖЛИВО: довірчі інтервали аргументів мають бути знайдені з тією самою надійністю, тобто довірчою ймовірністю)	<u>формула (19)</u>
4.	Після заокруглень результат обробки вимірювань записати у формі: $y = \bar{y} \pm D y$ при $y =$	

	$d = \frac{Dy}{\dot{a}y\ddot{n}}$ та	
--	--------------------------------------	--

6 Підготовка та проведення вимірювань

Перед проведенням вимірювань необхідно:

1) ознайомитися з принципом роботи вимірювального приладу, правилами його експлуатації та діапазоном вимірюваних величин;

2) встановити клас точності приладу (наведену похибку) – це виражена у відсотках відносна похибка при вимірі ним найбільшого значення вимірюваної величини, зазначеної на шкалі. Тоді абсолютна систематична похибка виявляється однаковою по всій шкалі приладу. Наприклад, нехай є амперметр класу 1,5 зі шкалою 20 А. При вимірі ним будь-якого значення струму абсолютна систематична похибка дорівнюватиме $0,015 \cdot 20 = 0,3$ А. Неважко бачити, що при вимірюваннях в кінці шкали відносна похибка виявляється меншою, і яка наближається до наведеної. Клас точності зазвичай вказується на шкалі приладу відповідною цифрою. Якщо на шкалі такого позначення немає, то даний прилад є позакласним, і його наведена похибка більше 4%;

3) у разі відсутності класу точності середнє квадратичне відхилення приладу можна прийняти рівним половині ціни поділу молодшого розряду шкали;

4) перевірити встановлення нуля приладу.

Під час проведення вимірювань слід:

5) виконати необхідну кількість однорідних вимірів, що призведе до формування вибіркової сукупності спостережуваних величин $x_1, x_2, \dots, x_n$;

6) результати всіх вимірювань (показів приладів) обов'язково повинні бути записані в робочому журналі без

будь-яких перерахунків на множник шкали або систему одиниць;

7) у робочому журналі також необхідно записати множник та ціну поділу шкали приладу.

7 Правила округлення чисельного результату

В результаті вимірювань, і навіть під час проведення математичних операцій виходять наближені значення шуканих величин. При записі наближеного числа слід враховувати, що цифри, що становлять його, можуть бути вірними, сумнівними та невірними. *Цифра вірна*, якщо абсолютна похибка числа менше однієї одиниці розряду цієї цифри (ліворуч від неї всі цифри вірні). *Сумнівною* називають цифру, що стоїть праворуч від правильної, а цифри справа сумнівної *невірні*. Їх необхідно відкинути у результаті, та й у вихідних даних. Наприклад, у відомого досить точно числа $\pi = 3,14159\dots$, але певного з абсолютною помилкою 0,002, цифра 4 буде вірною, наступна за нею (цифра 1) - сумнівна, а решта невірних, тоді правильний запис $\pi = 3,141 \pm 0,002$.

Можливі варіанти, коли у розрахунках має місце число з невизначеною абсолютною похибкою. У цьому випадку похибка визначається як половина останнього розряду числа, що вводиться в розрахунок. Наприклад універсальна газова стала $R = 8,31 \text{ Дж/моль К}$ повинна мати вигляд $R = (8,310 \pm 0,005) \text{ Дж/моль К}$.

Округлення виробляються лише в остаточному результаті, проте попередні розрахунки – з одним-двома зайвими порядками. Якщо розкид виміряних значень порівняний з половиною останнього розряду, то середньому арифметичному можна залишити число порядків теж саме. При цьому невірні цифри відкидаються без заокруглення сумнівного числа.

Наприклад, при ряді чисел 3, 2, 1, 3, 2 середнє 2,2 не можна округлити до 2, а в ряді 2.3, 2.2, 2.1, 2.3, 2.2 у середнього 2,22 можна залишити той самий порядок, записавши його як 2.2 внаслідок того, що відносна похибка першого ряду на порядок вища за похибку другого ряду і це очевидно навіть без розрахунків.

З урахуванням вищезазначених правил при розрахунках як прямих, так і непрямих вимірів необхідно:

1. Виконати попередній запис кінцевого результату вимірювання у вигляді $x = \bar{x} \pm D x$, при цьому винести за загальну дужку однакові порядки середнього та похибки, тобто множник виду 10^k , де k – ціле число. Числа в дужках переписати в десятковому вигляді з використанням коми, прибравши тим самим порядкові множники, що залишилися.

2. Округлити число, що відповідає похибці, залишивши не більше 2-х значних цифр. При цьому керуватися такими правилами: при малих відносних похибках ($\delta < 5\%$) – дві, при великих – одна цифра. Причому остання цифра округляється зазвичай до нуля чи п'яти.

3. За правилами округлення округлити у дужках число, що відповідає середньому значенню: при цьому врахувати, що числове значення результату вимірювань має закінчуватися цифрою того ж розряду, що значення похибки.

4. Остаточнo записати $x = \bar{x} \pm D x$ з урахуванням виконаних заокруглень. Загальний порядок та одиниці виміру величини наводять за дужками. Вказати значення відносної похибки та довірчої ймовірності.

Приклади округлення та запису остаточних результатів

Попередній робочий запис	Стандартна вірна форма запису
--------------------------	-------------------------------

$U = (528,112 \pm 152,4) \cdot 10^4 \text{ мВ}$	$U = (5,3 \pm 1,5) \cdot 10^3 \text{ мВ}$
$I = (0,418 \pm 0,042) \text{ А}$	$I = (0,42 \pm 0,04) \text{ А}$
$R = (0,03643 \pm 0,00021) \text{ Ом}$	$R = (36,43 \pm 0,21) \cdot 10^3 \text{ Ом}$
$f = (125,3 \pm 41) \text{ Гц}$	$f = (0,13 \pm 0,04) \cdot 10^3 \text{ Гц}$
$t = (8,72 \cdot 10^2 \pm 30) \cdot 10^{-1} \text{ мс}$	$t = (87 \pm 3) \cdot 10^{-1} \text{ мс}$

8 Приклади

8.1 Обробка результатів прямих вимірів

Ціль: визначити висоту h , яка буде використана в наступному розділі для визначення прискорення вільного падіння. Дані вимірювання записані в таблицю. Вимірювання проводили за допомогою звичайної швацької мірної стрічки (рулетки з ціною поділу $C=0,01\text{м}$) в умовах поривчастого вітру, що призвело до значного розкиду результатів, як через розтягування стрічки, так і внаслідок впливу поривів вітру. Розкид, що вийшов, добре помітний в таблиці.

Обчислення.

1. Обчислюємо середнє значення висоти

$$\langle h \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^9 h_i = \frac{260,17}{9} = 28,91(\text{м}).$$

2. Заповнюємо комірки другої та третьої колонок таблиці.

Номер вимірювання, i	Висота h_i , м	Відхилення $h_i - \langle h \rangle$, м	$(h_i - \langle h \rangle)^2$, м ²
1	28,30	-0,61	0,3721
2	29,38	0,47	0,2209
3	28,60	-0,31	0,0961
4	28,95	0,04	0,0016
5	29,90	0,99	0,9801

6	28,71	-0,2	0,04
7	28,17	-0,74	0,5476
8	29,50	0,59	0,3481
9	28,66	-0,25	0,0625

3. Обчислюємо виправлену середньоквадратичну похибку

$$S_h = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (h_i - \langle h \rangle)^2} = \sqrt{\frac{2,669}{8}} = 0,5776 \quad (м).$$

За формулою (16) обчислюємо Z для найбільшої похибки. Видно, що для всіх значень величина Z не перевищує 1,71 (для 5-го виміру $Z=1,72$); за додатком 2 знаходимо значення $M=6$. Оскільки $M < n=9$, то серед вимірів промахів немає.

4. Для заданої довірчої ймовірності $g=0,683$ та кількості вимірювань $n=9$ за таблицею визначаємо коефіцієнти Стьюдента $t_{g,n}=1,08$ та Лапласа $t_g=1,0$.

5. Обчислюємо випадкову складову похибки:

$$Dh_{сл} = \frac{t_{g,n} S_h}{\sqrt{n}} = \frac{1,08 \times 0,5776}{\sqrt{9}} = 0,208 \quad (м).$$

6. Обчислюємо абсолютну систематичну похибку приладу. Для цього визначаємо середньоквадратичне відхилення приладу, яке дорівнює половині ціни поділу

$$S_{np} = \frac{C}{2} = \frac{0,01}{2} = 0,005 \quad (м).$$

Знаходимо систематичну помилку приладу за формулою

$$Dh_{сист} = t_n S_{np} = 1 \times 0,005 = 0,005 \quad (м)$$

7. Обчислюємо повну похибку:

$$Dh = \sqrt{Dh_{сл}^2 + Dh_{сист}^2} = \sqrt{0,208^2 + 0,005^2} = 0,208 \quad (м).$$

У цьому прикладі $Dh_{\text{сист}} \ll Dh_{\text{сл}}$, тому без обчислення можна було вважати, що $Dh = Dh_{\text{сист}}$.

8. Обчислюємо відносну похибку:

$$d = \frac{Dh}{\langle h \rangle} = \frac{0,208}{28,91} = 0,007 \quad , \quad \text{або} \quad d = 0,7 \%$$

Після заокруглення за правилами, результат вимірювання висоти записуємо у вигляді:

$$h = (28,91 \pm 0,21) \text{ м} \quad , \quad d = 0,7\% \quad \text{при } \gamma = 0,683.$$

8.2 Обробка результатів непрямих вимірів

Ціль: вимірюючи час t падіння тіла з висоти h , визначити прискорення вільного падіння для широти Маріуполя.

Функціональна залежність: $g = 2h/t^2$.

При прямих вимірах (див. Приклад 1) отримано:

$$h = (28,91 \pm 0,21) \text{ м},$$

висота падіння

$$t = (2,43 \pm 0,05) \text{ с}.$$

час падіння

Обчислюємо арифметичне середнє прискорення вільного падіння

$$g = \frac{2 \times 28,91}{2,43^2} = 9,792 \quad (\text{м/с}^2).$$

Знаходимо часткові похідні: $\frac{\partial g}{\partial h} = \frac{2}{t^2}$; $\frac{\partial g}{\partial t} = -2 \frac{2h}{t^3}$.

Перш ніж розраховувати абсолютну похибку непрямой величини зробимо перетворення:

$$Dg = \sqrt{\frac{a^2 g}{c^2 h} D h \frac{\sigma^2}{\delta} + \frac{a^2 g}{c^2 t} D t \frac{\sigma^2}{\delta}} = \sqrt{\frac{a^2 2}{c^2 \langle t \rangle^2} D h \frac{\sigma^2}{\delta} + \frac{a^2 2}{c^2} \frac{2h}{\langle t \rangle^3} D t \frac{\sigma^2}{\delta}};$$

$$Dg = \frac{2\langle h \rangle}{\langle t \rangle^2} \sqrt{\frac{a^2 D h \frac{\sigma^2}{\delta}}{c^2 \langle h \rangle} + \frac{a^2 D t \frac{\sigma^2}{\delta}}{c^2 \langle t \rangle}}$$

Зверніть увагу на остаточне перетворення:

$$Dg = a \tilde{g} \sqrt{\frac{a^2 D h \frac{\sigma^2}{\delta}}{c^2 a \tilde{h} \tilde{\delta}} + \frac{a^2 D t \frac{\sigma^2}{\delta}}{c^2 a \tilde{t} \tilde{\delta}}} = a \tilde{g} \sqrt{d_h^2 + 4d_t^2}$$

Воно визначається середнім арифметичним непрямого виміру та відносними помилками величин, що входять до виміру. (Для простих функцій це є за правило)

Проводимо обчислення:

$$Dg = 9,792 \sqrt{\frac{a^2 0,21 \frac{\sigma^2}{\delta}}{c^2 28,91 \tilde{\delta}} + \frac{a^2 0,05 \frac{\sigma^2}{\delta}}{c^2 2,43 \tilde{\delta}}} = 0,409 \quad (\text{м/с}^2).$$

Записуємо попередній результат

$$g = (9,792 \pm 0,409) \text{ м/с}^2$$

Обчислюємо відносну похибку

$$d_g = \frac{Dg}{a \tilde{g}} = \frac{0,409}{9,792} = 0,04.$$

За відповідними правилами записуємо остаточний результат

$$g = (9,79 \pm 0,41) \text{ м/с}^2, \quad d_g = 4\% \text{ при } \gamma = 0,683.$$

9 Графічне представлення результатів

Більш наочними, ніж таблиці, є графіки залежностей досліджуваних фізичних величин. Графіки дають візуальне уявлення про зв'язок між величинами, що дуже важливо при інтерпретації отриманих даних, так як графічна інформація легко сприймається, викликає більше довіри, має значну ємність.

На основі графіка легше зробити висновок про відповідність теоретичних уявлень даних експерименту. Нижче викладено рекомендації щодо побудови графіків.

Вибір паперу. Графіки будують лише на папері, що має координатну сітку. Це може бути звичайна міліметрівка з лінійним масштабом по осях або логарифмічний папір. Розмір графіка зазвичай приблизно один зошитовий лист (і у будь-якому разі не менше половини листа).

Розподіл осей. Графіки, за рідкісним винятком, будують у прямокутній системі координат. По горизонтальній осі (осі абсцис) зазвичай відкладають незалежну величину (аргумент), значення якої задає експериментатор, а величину (функцію), значення якої вимірюються в ході дослідів, по вертикалі (осі ординат). Інакше висловлюючись, по горизонталі відкладається причина, а, по вертикалі слідство.

Для перевірки теоретичної залежності на осях графіка зазвичай відкладають такі величини, щоб графік вийшов у вигляді прямої лінії. Наприклад, нехай на початку нерухоме тіло, прискорено починає сковзати по крутій похилій площині. Маємо визначити залежність шляху S від часу t . Припустимо, можна поставити значення інтервалів часу t від початку руху і вимірювати пройдені за ці інтервали часу шлях S . Залежність між цими величинами, як відомо з теорії, повинна мати вигляд $S = at^2/2$. Тоді, щоб одержати пряму, слід будувати графік, на осях якого відкладено не t і S , а t^2 і S .

Вибір масштабів. Зазвичай графік будують виходячи з таблиці експериментальних даних, звідки легко встановити інтервали, у яких змінюються аргумент та функція. Їхнє найменше і найбільше значення задають значення масштабів, що відкладаються вздовж осей. Масштаб графіка повинен бути вибраний так, щоб нанесені на координатну площину графіка точки займали весь аркуш, а не зливалися один з одним. Якщо ж, наприклад, горизонтальної осі точки розташовані далеко, а вертикальної осі близько, то графік побудований неправильно,

так як при цьому кут нахилу проведеної через них прямий виходить близьким до нуля або до 90 градусів. У цих випадках графік не має наочності і витягти з нього будь-яку інформацію важко, або зовсім неможливо.

При побудові графіка початок відліку графіку не обов'язково має збігатися з початком координат (точкою $x = y = 0$). Однак якщо перевіряється залежність типу $y = ax$, то точка $x = y = 0$ має бути присутньою на графіку.

Для експериментальних графіків масштаби по обох осях вибирають незалежно один від одного і, як правило, співвідносять з похибкою вимірювання аргументу та функції: бажано, щоб ціна найменшого розподілу кожної шкали приблизно дорівнювала відповідній похибці.

Масштабна шкала повинна легко читатися, а для цього необхідно вибрати зручну для сприйняття ціну розподілу шкали: одній клітці має відповідати кратна 10 кількість одиниць фізичної величини, яка відкладається: 10^n , $2 \cdot 10^n$ або $5 \cdot 10^n$, де n – будь-яке ціле число, позитивне чи негативне. Так, числа 2; 0,5; 100; 0,02 - підходять, а числа 3; 7; 0,15 - не підходять для цієї мети.

При необхідності масштаб по одній і тій же осі для позитивних і негативних значень величини, що відкладається, може бути обраний різним, але тільки в тому випадку, якщо ці значення відрізняються не менш ніж на порядок, тобто у 10 разів. Прикладом може бути вольт амперна характеристика діода, коли прямий і зворотний струми відрізняються щонайменше, ніж у тисячу разів: прямий струм становить міліампери, зворотний – мікроампери.

Нанесення шкал. Стрілки, що задають позитивний напрямок, на координатних осях зазвичай не вказують, якщо обрано прийнятий позитивний напрямок осей: знизу - вгору і зліва - праворуч. Осі підписують: вісь абсцис – справа вниз, вісь ординат – ліворуч угорі. Проти кожної осі вказують назву або символ величини, що відкладається по осі, а через кому – одиниці її вимірювання, причому всі одиниці вимірювання

наводять в українському написанні в системі СІ. Числовий масштаб вибирають як рівновіддалених за значенням «круглих чисел», наприклад: 2; 4; 6; 8 ... або 1,82; 1,84; 1,86 ... Десятковий множник масштабу, як у таблицях, відноситься до одиниць виміру, наприклад, замість 1000; 2000; 3000... вийде 1; 2; 3 ... із загальним множником 10^3 , вказаним перед одиницею виміру.

Масштабні риси проставляють по осях на однаковій відстані одна від одної, щоб вони виходили на полі графіка. По осі абсцис цифри числового масштабу пишуть під рисками, по осі ординат – ліворуч від рисок.

Нанесення точок. Експериментальні точки акуратно відмічають на полі графіка олівцем. Їх завжди проставляють так, щоб вони були чітко помітні. Якщо в одних осях будують різні залежності, які отримані, наприклад, за змінених умов експерименту або різних етапах роботи, то точки таких залежностей повинні відрізнятися один від одного. Їх слід відзначати різними значками (квадратами, кружечками, хрестиками тощо) або наносити олівцями різного кольору.

Розрахункові точки, отримані шляхом обчислень, розміщують на графіку рівномірно. На відміну від експериментальних, вони повинні злитися з теоретичною кривою після її побудови. Розрахункові точки, як і експериментальні, наносять олівцем – при помилці неправильно поставлену точку легше стерти.

Виносні координатні лінії при нанесенні точок не використовують, тому що для цих цілей існує сітка міліметрівки, а зайві лінії засмічують графік, роблячи його незручним для сприйняття та роботи з ним.

Відображення похибок вимірювань на графіку. Результати вимірювань, за якими будують експериментальні залежності, містять похибки. Щоб вказати їх значення на графіку, використовують два основних способи.

Перший згадувався під час обговорення питання вибору масштабів. Він полягає у виборі ціни розподілу масштабної

шкали графіка, яка повинна дорівнювати похибки, яка відкладається по цій осі величини. У такому разі точність вимірів не потребує додаткових пояснень.

Якщо досягти відповідності похибки та ціни поділу не вдається, використовують другий спосіб, що полягає у прямому відображенні похибок на полі графіка. А саме, навколо проставленої експериментальної точки будують два відрізки, паралельні осям абсцис та ординат. У вибраному масштабі довжина кожного відрізка повинна дорівнювати величини подвоєної похибки, що відкладається по паралельній осі. Центр відрізка має припадати на експериментальну точку. Навколо точки утворюються ніби "вуса", що задають область можливих значень величини, що вимірюється. Похибки стають зримими, хоча "вуси" можуть мимоволі засмітити поле графіка. Зазначимо, що цей спосіб найчастіше застосовують тоді, коли похибки змінюються від виміру до виміру.

Проведення кривих. Експериментальні точки за допомогою олівця з'єднують плавною кривою, щоб вони в середньому були однаково розташовані по обидва боки проведеної кривої (процедура згладжування результатів вимірювань). Якщо математичний опис спостережуваної залежності відомий, то теоретична крива проводиться так само. Немає рації прагнути провести криву через кожен експериментальну точку – адже крива є лише інтерпретацією результатів вимірів, відомих із експерименту з похибкою. Власне, є лише експериментальні точки, а крива – довільне, необов'язково вірне, мислення експерименту. Уявимо, що експериментальні точки з'єднані і на графіку вийшла ламана лінія. Вона не має нічого спільного із справжньою фізичною залежністю! Це впливає з того, що форма отриманої лінії не відтворюватиметься при повторних серіях вимірювань.

Навпаки, теоретичну залежність будують на графіку таким чином, щоб вона плавно проходила по всіх розрахункових точках. Ця вимога очевидна, так як теоретичні значення координат точок можуть бути обчислені як завгодно точно.

Завершення роботи з графіком. Графік нумерують, йому дають назву, яка коротко відображає зміст побудованої залежності. Усі графічні символи, використані під час побудови, пояснюють у підписі до графіка, яку надають під графіком чи на незайнятій кривою частини поля.

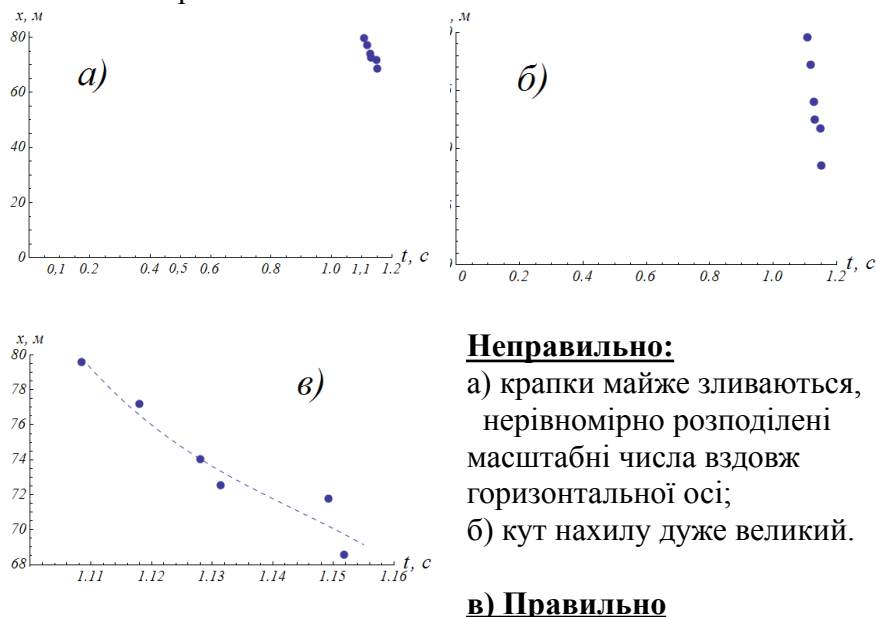


Рисунок 4 - Приклади графіків (а-і б - неправильно, в – правильно).

10 Висновки до лабораторної роботи

У цьому пункті коротко формулюються результати виконання лабораторної роботи відповідно до цілей роботи.

Наприклад, якщо метою роботи було вимірювання деякої фізичної величини, то у висновках наводиться знайдене в результаті вимірювань та обробки результатів вимірювань значення фізичної величини із зазначенням похибки вимірювань. Обов'язковим є аналіз дійсності вимірюваної

величини і порівняння її з відомим значенням теорії чи з таблиць.

Якщо метою роботи було встановлення певної залежності фізичних величин та порівняння з теоретичною залежністю, то висновок може полягати в тому, що встановлена в лабораторній роботі залежність величин з урахуванням похибок вимірів не суперечить очікуваній теоретичній залежності.

Якщо експериментально встановлена залежність, або вимірювана величина не відповідає очікуваній теоретичній залежності, то у висновках необхідно провести аналіз і вказати на можливе джерело такої розбіжності.

Список рекомендованих джерел

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. - Москва, «Высшая школа».-2000.-479с.
2. Гутер Р.С.Элементы численного анализа и математической обработки результатов опытов / Р.С. Гутер, Б.В. Овчинский.-Москва, «Наука».-1970.-432с.
3. Кондрашев А.П. Основы физического эксперимента и математическая обработка результатов измерений / А.П. Кондрашев, Е.В. Шестопапов -М.,Атомиздат,-1977, 200с.
4. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок / Дж. Тейлор - М.: Мир, -1985, 272с.

Додаток 1
Таблиця 11.1

Значення коефіцієнтів Стьюдента та Лапласа

$g = 0,683$		$g = 0,955$		$g = 0,998$	
n	$t_{\gamma,n}$	n	$t_{\gamma,n}$	n	$t_{\gamma,n}$
2	2,0	2	12,7	2	63,7
3	1,35	3	4,73	3	12,0
4	1,22	4	3,35	4	6,98
5	1,16	5	2,94	5	5,27
6	1,13	6	2,70	6	4,6
7	1,11	7	2,57	7	4,2
8	1,09	8	2,48	8	3,92
9	1,08	9	2,40	9	3,72
10	1,07	10	2,35	10	3,48
¥	1.0	¥	2.0	¥	3.0

Відбір промахів за критерієм Шовене

<i>Z</i>	<i>M</i>	<i>Z</i>	<i>M</i>	<i>Z</i>	<i>M</i>
від 1,00 до 1,28	2	від 1,60 до 1,68	5	від 1,84 до 1,88	8
від 1,30 до 1,46	3	від 1,70 до 1,76	6	від 1,90 до 1,92	9
від 1,48 до 1,58	4	від 1,78 до 1,82	7	від 1,94 до 1,98	10

$$Z = \frac{|x_k - \langle x \rangle|}{S_x}$$

відносне відхилення випадкової величини x від її середнього значення в одиницях середнього квадратичного відхилення,

M – кількість очікуваних вимірів, з яких відхилення не може вважатися промахом.