

Préambule

a) Équations de Maxwell dans le vide ($\rho = 0; \vec{j} = \vec{0}$) :

$$(1) \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 ; \quad (2) \operatorname{div}(\vec{E}) = 0 ; \quad (3) \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ;$$

$$(4) \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} .$$

En utilisant le formulaire, on établit les équations de propagation des champs :

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} ; \quad \Delta \vec{B} = \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} .$$

b) L'onde est *plane*, parce que la phase ne dépend que de t et de x .
L'onde est *uniforme* parce que l'amplitude E_0 est une constante.

L'onde est *progressive*, parce qu'elle ne contient qu'une fonction de $(t - \frac{x}{v})$.

L'onde se propage vers les x croissants ; son vecteur d'onde est : $\vec{k} = k \vec{u}_x$.

L'onde est *polarisée rectilignement*, parce que $\vec{E}$ est partout parallèle à $\vec{u}_y$.

c) Équation de *dispersion* : $k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$; avec $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$, célérité des ondes dans le vide.

La vitesse de phase des ondes est : $v_\phi = \frac{\omega}{k} = c$, indépendante de ω ; donc le vide n'est pas dispersif.

d) Pour une onde plane progressive, $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{w} \wedge \vec{E}$; donc : $\vec{B}(M, t) = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_z$.

e) L'onde considérée est idéale, donc *non réalisable expérimentalement* :

ω : elle est rigoureusement monochromatique (les ondes physiques ne le sont pas) ;

$\vec{k}$: elle est parfaitement directive (les ondes physiques ne le sont pas) ;

elle est infiniment étendue (les ondes physiques ne le sont pas) ;

elle est parfaitement uniforme (les ondes physiques ne le sont pas).

Partie I ; propagation d'ondes électromagnétiques dans un plasma

IA position du problème.

1) $n = \frac{\rho_{Cu} N_A}{M_{Cu}}$, par analyse dimensionnelle, n est une densité volumique de particules (m^{-3}) ;
numériquement $n = 8,46 \cdot 10^{28} m^{-3}$, très supérieure à n_0 .

Le conducteur métallique est un milieu dense, dans lequel les électrons non liés aux cations interagissent par chocs avec ces derniers ; on modélise cette interaction par une force de freinage analogue à une force de viscosité.

2) Forces appliquées à un électron libre :

force de pesanteur (négligeable en électromagnétisme) ;

force de Lorentz : $\vec{f} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$; pour des électrons non relativistes, $v \ll c$, donc la force magnétique est négligeable.

- 3) L'accélération est : $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{v})$; $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est la *dérivée locale*, $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{v})$ est la *dérivée convective*. Le fluide électronique est *globalement au repos*, puisque l'onde exerce sur chaque électron une force sinusoïdale ; *on négligera le terme convectif*.

IB mouvement des électrons libres et conductivité.

- 1) Relation fondamentale de la dynamique du point pour un électron : $m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}(M, t)$.

En régime forcé sinusoïdal, $\vec{v}(M, t) = \vec{v}_0(x) e^{j\omega t}$; donc, $\vec{v}(x, t) = -\frac{eE_0}{j\omega m_e} e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_y$.

- 2) Par définition : $\vec{j}(x, t) = -n_0 e \vec{v}(x, t)$ est la densité volumique de courant électronique.
L'amplitude de la vitesse des cations contient la masse m_p au lieu de m_e ($m_p \gg m_e$) ; avec la même densité volumique de charge ($n_0 e$), la densité de courant des cations est négligeable.

$$\sigma = \frac{n_0 e^2}{j\omega m_e}$$

Finalement : σ est imaginaire (donc le courant dans le plasma est en quadrature par rapport au champ), alors que dans un métal, σ est réelle (courant et champ en phase).

- 3) Par définition, la puissance instantanée reçue par un électron est : $P_e(x, t) = -e \vec{E} \cdot \vec{v}$.

$$P_e(x, t) = \frac{e^2 E_0^2}{\omega m_e} \cos(\omega t - kx) \sin(\omega t - kx)$$

En notation réelle :

Puissance volumique instantanée : $p_e(x, t) = n_0 P_e(x, t)$.

Puissance volumique moyenne : $\langle p_e(x, t) \rangle = n_0 \cdot \langle P_e(x, t) \rangle$; donc $\langle p_e(x, t) \rangle$ est nulle.

L'absence de dissipation d'énergie par interaction entre électrons et cations permet l'entretien (mais pas l'installation) du courant électronique par l'onde progressive sans dépense d'énergie.

IC propagation du champ électromagnétique.

- 1) Les équations de Maxwell (1) et (3) sont applicables dans tous les milieux ; l'équation (2) est applicable sans changement dans le plasma neutre ; l'équation (4) est modifiée, par la présence

du courant électronique de densité $\vec{j}(x, t)$: $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

(formulaire) : $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{E})) = \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} = \vec{\text{rot}}(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}}(\vec{B}))$;

donc : $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ (équation de propagation du champ électrique dans le plasma).

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 n_0 e^2}{m_e}$$

Relation de dispersion :

Le second membre s'annule pour une pulsation particulière appelée 'pulsation de plasma', ω_p :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 n_0 e^2}{m_e}} = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}} ; \text{ numériquement, pour l'ionosphère : } \omega_p = 5,64 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}.$$

- 2) étude du cas $\omega < \omega_p$:

- a) $k^2 = \frac{w^2 - w_p^2}{c^2}$ est négatif, donc k est *imaginaire* ; sachant que les champs ne peuvent pas devenir infinis quand x tend vers $+\infty$: $k = -\frac{j}{c} \sqrt{(w_p^2 - w^2)}$.

b) $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t) e^{-\frac{x}{c}\sqrt{(w_p^2 - w^2)}} \vec{u}_y$; et $\vec{B}(x,t) = \frac{E_0}{c} \sqrt{\frac{w_p^2}{w^2} - 1} e^{-\frac{x}{c}\sqrt{(w_p^2 - w^2)}} \sin(\omega t) \vec{u}_z$.

c) l'onde est *monochromatique, plane, évanescente, polarisée rectilignement*.

$$\vec{\pi}(x,t) = \frac{\vec{E}(x,t) \wedge \vec{B}(x,t)}{\mu_0}$$

d) Par définition du vecteur de Poynting :

$$\langle \vec{\pi}(x,t) \rangle = \vec{0}$$

Aucune puissance ne peut être propagée par le plasma. Une onde venant du sol (de pulsation $w < w_p$), sera totalement réfléchi vers le sol, sur le plan interface [atmosphère/ionosphère].

3) étude du cas $w > w_p$:

a) $k^2 = \frac{w^2 - w_p^2}{c^2}$ est positif, donc k est réel ;

sachant que l'onde se propage vers les x croissants : $k = \frac{1}{c} \sqrt{(w^2 - w_p^2)}$.

b) $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - \frac{x}{c} \sqrt{w^2 - w_p^2}) \vec{u}_y$; et $\vec{B}(x,t) = \frac{E_0}{c} \sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w^2}} \cos(\omega t - \frac{x}{c} \sqrt{w^2 - w_p^2}) \vec{u}_z$.

c) l'onde est *monochromatique, plane, progressive, polarisée rectilignement*.

$$v_\phi = \frac{w}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w^2}}}$$

d) vitesse de phase : , dépendante de w ; donc le plasma est dispersif.

e) par définition, la vitesse de groupe est : $v_g = \frac{dw}{dk}$, soit $v_g = \frac{c^2}{v_\phi} = c \sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w^2}}$.

La vitesse de groupe représente la célérité d'un paquet d'ondes de pulsations voisines, et la vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique.

f) $v_g < c < v_\phi$.

Si w tend vers w_p , v_g tend vers zéro, et v_ϕ tend vers l'infini (ces limites correspondent aux propriétés de l'onde évanescente). Si w tend vers l'infini, v_g et v_ϕ tendent vers c (le plasma s'apparente au vide, car l'inertie des électrons devient trop grande).

On règle la fréquence de l'émetteur par valeurs croissantes (donc les ondes ont des longueurs

d'onde décroissantes). La fréquence de plasma est : $f_p = \frac{w_p}{2\pi} = 898 \text{ kHz}$.

On admet que le plan interface [atmosphère/ionosphère] est horizontal (altitude h).

Pour $f < f_p$, l'ionosphère est réfléchissante, un récepteur au sol reçoit l'onde totalement réfléchi.

Si $f > f_p$, l'ionosphère est transparente, un récepteur au sol ne détecte pas de signal.

La longueur d'onde de changement de régime est : $\lambda_p = \frac{c}{f_p} = 2\pi \sqrt{\frac{m_e}{\mu_0 n_0 e^2}} = 334 \text{ m}$.

Durée de propagation (atmosphère assimilée au vide) : $\tau = \frac{2h}{c}$; donc $h = 90 \text{ km}$.

ID application à la transmission de l'information ($f_p = 0,9 \text{ MHz}$).

- 1) Pour les ondes radio de fréquence $f < f_p$, le sol et l'ionosphère se comportent comme deux miroirs sphériques concentriques, et l'atmosphère est alors un guide d'onde courbe ; les ondes radio se propagent entre les deux rives de l'océan par réflexions multiples.
- 2) Les satellites artificiels sont au-dessus de l'ionosphère, mais pour les ondes radio de fréquence $f \gg f_p$, celle-ci est transparente (dans les deux sens !).

Partie II ; rayonnement par des antennes rectilignes

IIA rayonnement d'un dipôle oscillant.

- 1) $V(M, t)$ et $\vec{A}(M, t)$ sont les potentiels retardés ; ils représentent, en M, à la date t, les effets cumulés produits par les sources réparties dans D ; l'élément de source $(\rho(P), \vec{j}(P))$ situé en P, à la date $t - \frac{PM}{c}$, produit en M un effet avec le retard $\frac{PM}{c}$ exactement égal à la durée de propagation dans le vide d'un signal électromagnétique.

- 2) Par définition : $\vec{p}(t) = -q\vec{ON} = -qz_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ est le moment dipolaire électrique, $p_0 = -qz_0$.

La charge (+q), fixe en O, ne contribue pas au potentiel vecteur retardé.

La charge (-q), mobile en N, ponctuelle, est un élément de courant d'expression : $-q\vec{v}(N)$

(représentant $\vec{j}(P, t)dV$) ; l'intégrale n'a pas lieu d'être : $\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{-q\vec{v}(N, t - \frac{NM}{c})}{NM}$; on confond NM et OM = r dans la zone de rayonnement, située à très grande distance de O par

rapport à z_0 ; et l'élément de courant s'identifie à $\frac{d}{dt} \left[\vec{p}(t - \frac{r}{c}) \right]$.

Finalement : $\vec{A}(M, t) = j\omega \frac{\mu_0}{4\pi r} \vec{p}(t - \frac{r}{c}) = \frac{j\omega \mu_0 p_0}{4\pi r} e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \vec{u}_z$.

- 3) Condition de jauge de Lorentz : $\text{div}(\vec{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$, donc $V(M, t) = -\frac{c^2}{j\omega} \text{div}(\vec{A})$;

On pose $\vec{A} = f(r, t) \vec{u}_z$; comme $\text{div}(\vec{u}_z) = 0$, $\text{div}(\vec{A}) = \vec{u}_z \cdot \vec{\text{grad}} f(r, t) = \vec{u}_z \cdot \vec{u}_r \frac{\partial f}{\partial r} = \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial r}$;

$$V(M, t) = \frac{p_0 \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{j\omega}{rc} + \frac{1}{r^2} \right) e^{j\omega(t - \frac{r}{c})}$$

Finalement :

- 4) Relations entre potentiels et champs :

$$\vec{E}(M, t) = -\vec{\text{grad}} V(M, t) - \frac{\partial \vec{A}(M, t)}{\partial t} ; \quad \vec{B}(M, t) = \vec{\text{rot}}(\vec{A}(M, t))$$

La zone de rayonnement est définie par : $r \gg \lambda \gg z_0$, où $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ est la longueur d'onde ;

Pour les ondes radio (200 kHz), $\lambda = 1,5 \text{ km}$; pour la lumière visible, $\lambda \in [0,4 \text{ } \mu\text{m} ; 0,8 \text{ } \mu\text{m}]$.

Dans la zone de rayonnement, les termes en $\frac{1}{r^2}$ et en $\frac{1}{r^3}$ sont négligeables ;

$$\vec{E}(M, t) \approx -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin(\theta)}{4\pi r} \cdot e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \vec{u}_\theta ; \quad \vec{B}(M, t) \approx -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin(\theta)}{4\pi r c} \cdot e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \vec{u}_\phi .$$

Dans la zone de rayonnement, la structure du champ électromagnétique est la même que celle d'une onde plane progressive sinusoïdale (modèle du préambule, avec $\vec{u}_r$ au lieu de $\vec{u}_x$) ;

c'est-à-dire : $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{w} \wedge \vec{E}$, avec $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_r$.

$$\vec{\pi}(x,t) = \frac{\vec{E}(x,t) \wedge \vec{B}(x,t)}{\mu_0}$$

5) Par définition du vecteur de Poynting : ; soit :

$$\vec{\pi}(M,t) = \frac{\mu_0 p_0^2 w^4 \sin^2(\theta)}{16\pi^2 r^2 c} \cos^2(\omega t - kr) \vec{u}_r ; \text{ et } \langle \vec{\pi}(M,t) \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 w^4 \sin^2(\theta)}{32\pi^2 r^2 c} \vec{u}_r$$

Le dipôle ne rayonne pas dans sa propre direction (si $\vec{u}_r = \vec{u}_z$, $\theta = 0$, et $\langle \vec{\pi}(M,t) \rangle = \vec{0}$) ;

La puissance moyenne rayonnée est maximum dans les directions du plan 'équatorial' ($\theta = \pi/2$).

La puissance totale rayonnée est le flux du vecteur de Poynting moyen : $P = \iint_{\Sigma} \langle \vec{\pi}(r,t) \rangle \cdot \vec{u}_r \cdot d^2\Sigma$,
étendu à la sphère Σ de rayon r , et de centre O ; $d^2\Sigma = r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi$; $\theta \in [0, \pi]$; $\varphi \in [0, 2\pi[$.

$$P = \frac{\mu_0 p_0^2 w^4}{12\pi c} = \frac{p_0^2 w^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}$$

Finalement :

II B antenne filiforme rectiligne.

1) La fonction $i(z,t)$ s'annule aux extrémités de l'antenne, pour tout t ; c'est une condition nécessaire pour un courant longitudinal.

La fonction $i(z,t)$ représente une *onde stationnaire de courant longitudinal*, pour le mode *fondamental* de l'antenne. Les électrons oscillent autour de leur position moyenne comme les tranches d'air dans un tuyau sonore allongé selon l'axe (Oz).

2) L'élément de courant à considérer, à la place de $j dV$, est $i u_z dz$; le retard à la propagation est

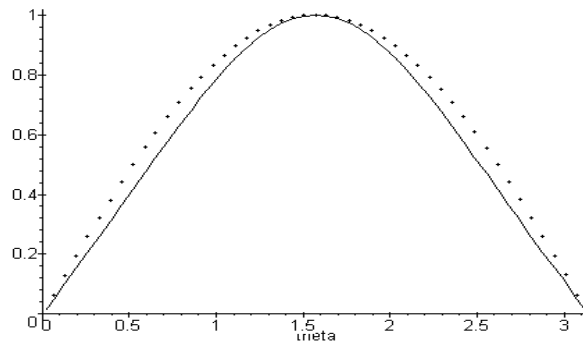
$$\tau(P,M) = \frac{r_{PM}}{c}$$

. On ne conserve que le terme prépondérant dans le champ électrique rayonné de la question IIA4 ; le passage du potentiel vecteur au champ électrique rayonné nécessite alors deux opérations : a) dérivation par rapport au temps et changement de signe (multiplication par

$(-j\omega)$), b) projection sur le vecteur $\vec{u}_\theta$ (multiplication par $(-\sin(\theta))$) ; donc :

$$d\vec{E}(P,M,t) = \frac{j\omega\mu_0 I_0 \sin(\theta)}{4\pi r_{PM}} \cos(2\pi \frac{z}{\lambda}) \cdot e^{j\omega(t - \frac{r_{PM}}{c})} dz \cdot \vec{u}_\theta$$

(remarque : pour sommer les champs, l'approximation qui consiste à confondre r_{PM} avec r n'est plus légitime, car les valeurs extrêmes de z ($\pm \lambda/4$) ne sont pas négligeables devant c/ω).



$$3) \quad \vec{E}(M, t) = -\frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 cr} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos(\theta))}{\sin(\theta)} \sin(\omega t - kr) \vec{u}_\theta ;$$

soit $E_0 = \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 cr}$, et

$$f(\theta) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos(\theta))}{\sin(\theta)} ;$$

on trace le graphe de $f(\theta)$ (trait plein),
représentant l'amplitude du champ
électrique rayonné, à r donnée.

(on compare avec $\sin(\theta)$ (pointillé)).

*Le dipôle et l'antenne demi-onde ont
presque le même diagramme de rayonnement.*

IIC réseau d'antennes rectilignes.

1) Il s'agit d'un calcul d'interférence à N ondes cohérentes.

Pour limiter les calculs, on s'inspire de l'étude de la diffraction à l'infini par un réseau de N trous éclairés par une onde plane monochromatique, émetteurs synchrones, alignés aux points O_n ;

toutes les directions $O_n M$ sont parallèles, inclinées de θ sur l'axe (Oz) ; les distances $O_n M$ valent

$r_n = r - n \frac{\lambda}{2} \cos(\theta)$; tous les champs électriques en M sont portés par le même vecteur $\vec{u}_\theta$; on ne tient pas compte des différences entre r et r_n pour les amplitudes des champs, et on en tient seulement compte pour les phases, ce qui donne le champ électrique rayonné par l'antenne de centre O_n : $\vec{E}_n(M, t) = jE_0 f(\theta) e^{j(\omega t - kr_n)} \vec{u}_\theta$.

$$\vec{E}(M, t) = \sum_{n=1}^{n=N} \vec{E}_n(M, t)$$

Le champ électrique rayonné total est la somme de N termes colinéaires :

$$\vec{E}(M, t) = jE_0 f(\theta) e^{j(\omega t - kr)} \cdot \frac{1 - e^{jkN \frac{\lambda}{2} \cos(\theta)}}{1 - e^{jk \frac{\lambda}{2} \cos(\theta)}} \vec{u}_\theta$$

Soit : ; qui se simplifie, car $k \frac{\lambda}{2} = \pi$.

$$g(\theta) = f(\theta) \frac{\sin(N \frac{\pi}{2} \cos(\theta))}{\sin(\frac{\pi}{2} \cos(\theta))}$$

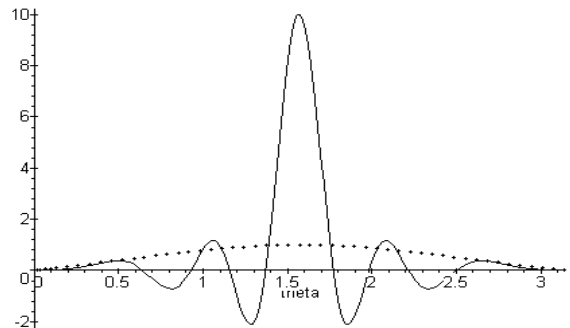
En notation réelle : $E_\theta(r, \theta, t) = E_0 g(\theta) \cos(\omega t - kr + \psi(\theta))$, avec

Le calcul de $\psi(\theta)$ ne présente pas d'intérêt.

On trace le graphe de $g(\theta)$ (trait plein), représentant l'amplitude du champ électrique rayonné, à r donnée ($N = 10$).

(on compare avec $f(\theta)$ (pointillé)).

Ce dispositif crée une onde polarisée dans le plan zOM , dont la puissance est angulairement concentrée dans un pic principal, d'amplitude valant N fois



celle d'une seule antenne, d'axe $\theta = \frac{\pi}{2}$,

et de largeur angulaire : $\Delta\theta = \pi - 2 \arccos(\frac{2}{N}) = 0,40 \text{ rad} = 23^\circ$.

2) Il s'agit encore d'un calcul d'interférence à N ondes cohérentes.

Ce calcul se conduit avec les mêmes approximations qu'en IIC1 ; pour M dans le plan xOY , tous

les champs électriques en M sont portés par le même vecteur $\vec{u}_z$; les distances $O_n M$ valent

$r_n = r + na \cos(\varphi)$; $f(\theta)$ vaut 1 ; ce qui donne le champ électrique rayonné par l'antenne de centre O_n : $\vec{E}_n(M, t) = -jE_0 e^{j(\omega t - kr_n)} \vec{u}_z$.

Le champ électrique rayonné total est la somme de N termes colinéaires :

$$\vec{E}(M, t) = \sum_{n=1}^{n=N} \vec{E}_n(M, t)$$

Soit :

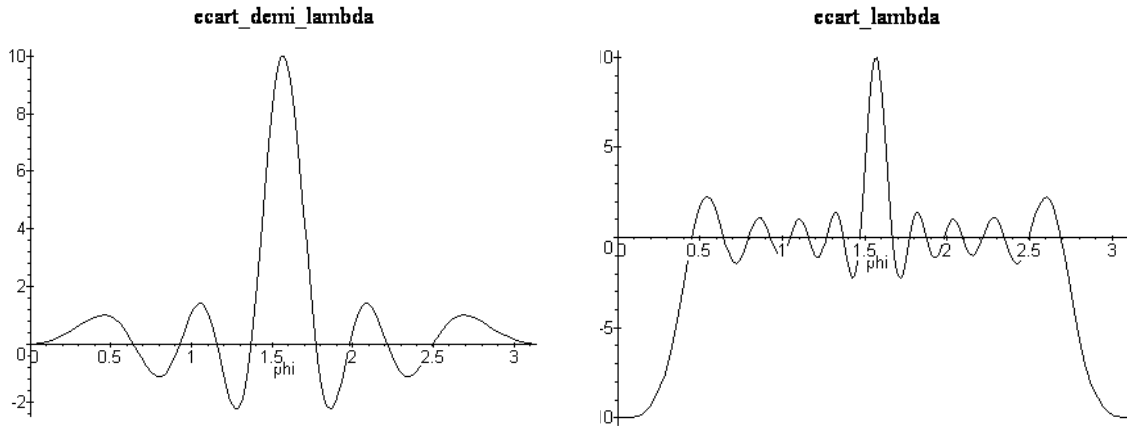
$$\vec{E}(M, t) = -jE_0 e^{j(\omega t - kr)} \cdot \frac{1 - e^{-jkNa \cos(\varphi)}}{1 - e^{-jka \cos(\varphi)}} \cdot \vec{u}_z$$

$$h(\varphi) = \frac{\sin(N\pi \frac{a}{\lambda} \cos(\varphi))}{\sin(\pi \frac{a}{\lambda} \cos(\varphi))}$$

En notation réelle : $E_z(r, \varphi, t) = E_0 h(\varphi) \cos(\omega t - kr + \zeta(\varphi))$, avec

Le calcul de $\zeta(\varphi)$ ne présente pas d'intérêt.

On trace les graphes de $h_1(\varphi)$ et de $h_2(\varphi)$, respectivement pour $a_1 = \lambda/2$, puis $a_2 = \lambda$, et



représentant l'amplitude du champ électrique rayonné, à r donnée ($N' = 10$).

La symétrie permet de n'étudier que l'intervalle $\varphi \in [0, \pi]$:

- a) $a_1 = \lambda/2$: comme le réseau du (IIC1), ce dispositif crée une onde polarisée dans le plan zOM , dont la puissance est concentrée dans un pic principal, d'amplitude valant N' fois celle

d'une seule antenne, d'axe $\varphi = \frac{\pi}{2}$, et de largeur angulaire : $\Delta\varphi_1 = \pi - 2 \arccos(\frac{2}{N'}) = 0,40$ rad.

- b) $a_2 = \lambda$: ce dispositif crée une onde polarisée dans le plan zOM , dont la puissance est concentrée dans trois pics principaux d'amplitude valant N' fois celle d'une seule antenne ;

l'émission dans la direction normale au réseau ($\varphi = \pi/2$) est angulairement limitée à

$$\Delta\varphi_2 = \pi - 2 \arccos(\frac{1}{N'}) = 0,20 \text{ rad ; c'est l'ordre d'interférence zéro ;}$$

les émissions dans le plan du réseau ($\varphi = 0$ et π) sont plus étalées angulairement, et correspondent aux ordres d'interférence $+1$ et -1 .

Ce qui était prévisible avant le calcul détaillé :

IIC1 : pas d'émission selon l'axe (Oz), émission maximum dans le plan xOy , par interférence constructive sans différence de marche ; amplitude maximum égale à $10 E_0$.

IIC2a : pas d'émission sur l'axe (Ox) du plan du réseau, par interférence destructive ; émission maximum selon l'axe (Oy) normal au plan du réseau, par interférence constructive sans différence de marche, et amplitude maximum égale à $10 E_0$ dans cette direction.

IIC2b : ; émission maximum selon l'axe (Ox) du plan du réseau, par interférence constructive avec différence de marche de $\pm \lambda$, et amplitude maximum égale à $10 E_0$ dans ces directions ;
émission maximum selon l'axe (Oy) normal au plan du réseau, par interférence constructive sans différence de marche, et amplitude maximum égale à $10 E_0$ dans cette direction.
Si le critère de *directivité* est prépondérant, le réseau le plus efficace est celui du IIC2b dans les directions voisines de l'ordre zéro (axe (Oy)).

Partie III ; émission et réception par une antenne parabolique

IIIA étude dans le cadre de l'optique géométrique.

- 1) La fréquence et la longueur d'onde sont liées par la célérité des ondes : $c = \lambda f$.

Donc $\lambda = 25$ mm ; *domaine des ondes radio centimétriques.*

- 2) La théorie de l'optique géométrique est suffisante pour la détermination des centres des taches principales de diffraction. Mais un faisceau lumineux directif, atteignant un système (réfractant ou réfléchissant) limité par un diaphragme de diamètre D, est diffracté, et transformé en un faisceau divergent d'ouverture angulaire proche de λ/D (0,04 rad ou 2,4° pour D = 60 cm), autour de la direction prévue par la théorie de l'optique géométrique.

- 3) antenne de réception parabolique

- a) $h = \frac{D^2}{16f}$; numériquement : h = 75 mm.
- b) Le rayon de *courbure de la surface d'onde* est égal à la distance entre l'antenne réceptrice et le satellite, soit H = 36 000 km pour un satellite géostationnaire ; la divergence angulaire des rayons extrêmes utiles est donc D/H, soit $1,7 \cdot 10^{-8}$ rad , ou 3,4 millisecondes d'arc ; donc la courbure est *non mesurable*, avec la technologie des télécommunications par satellite.
- c) *stigmatisme* : c'est une propriété des systèmes optiques, qui reçoivent les rayons concourants en un point lumineux (A, point objet) ; si, après passage dans le système, tous les rayons émergents sont concourants au même point (A', point image), le système est *rigoureusement stigmatique* pour le *couple de points (A, A', conjugués)* ; si les intersections des rayons émergents sont localisées dans une petite région de l'espace, le *stigmatisme* est *approché*.
- d) d1 : A à l'infini sur l'axe, A' au foyer (géométrique) F du paraboloïde : *stigmatisme rigoureux* ;
d2 : A à l'infini sur la droite d'inclinaison 0,1 rad : *stigmatisme approché* ;
d3 : A à l'infini sur la droite d'inclinaison 0,2 rad : *pas de stigmatisme*.
- e) La forme parabolique est rigoureusement stigmatique pour le couple de points [F, A à l'infini sur l'axe], et ces points conjugués sont réels, donc *l'énergie lumineuse émise d'un des points se concentre sans perte sur l'autre après réflexion*.
- f) Les miroirs primaires des télescopes (réflecteurs de Newton et formes dérivées) sont des paraboloïdes de révolution, utilisés en astronomie (étoile : source à l'infini, F, point image). Utilisé en sens inverse (F point objet), un réflecteur parabolique produit un faisceau large de rayons parallèles (laser pour la mesure de la distance Terre-Lune).
- g) Il faut placer l'émetteur ponctuel au foyer géométrique F.
- h) *Le faisceau est cylindrique, d'axe confondu avec celui du réflecteur, de section circulaire de diamètre D (= 2 m). Ce faisceau ne pourrait être capté efficacement que par une antenne située partiellement sur son trajet, ce qui astreint à un réglage d'orientation de l'axe de l'antenne émettrice avec une précision angulaire de D/H, soit $5,6 \cdot 10^{-8}$ rad, ou 10 millisecondes d'arc, ce qui est irréaliste.*

défauts du modèle :

- a) considérer que l'émetteur (sortie d'un guide d'onde) est quasi ponctuel ; sa taille est au moins égale à la longueur d'onde ($\lambda = 25$ mm).
- b) négliger la diffraction (qui ouvre le faisceau réfléchi de λ/D environ (0,012 rad ou 0,7° pour D = 2 m).

IIIB étude dans le cadre d'un modèle ondulatoire.

- 1) $A(\vec{u}) = \iint_{\Sigma} e^{j\vec{k} \cdot \vec{OM}} d^2\Sigma$ représente, à un facteur multiplicatif près, l'amplitude complexe de l'onde

diffRACTÉE à l'infini ; avec $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$, $\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$, $d^2\Sigma = dx.dy$.

si $\vec{u} = \alpha\vec{u}_x + \beta\vec{u}_y + \gamma\vec{u}_z$, alors : $\vec{k} \cdot \vec{OM} = 2\pi \frac{\alpha x + \beta y}{\lambda}$.

L'intensité se calcule par : $I(\vec{u}) = A(\vec{u}) \cdot A^*(\vec{u})$ (l'astérisque * est la conjugaison complexe).

- 2) Le montage de Fraunhofer utilise une lentille mince convergente placée après l'ouverture Σ , et d'axe optique parallèle à Oz ; la figure de diffraction est observée dans son plan focal image.

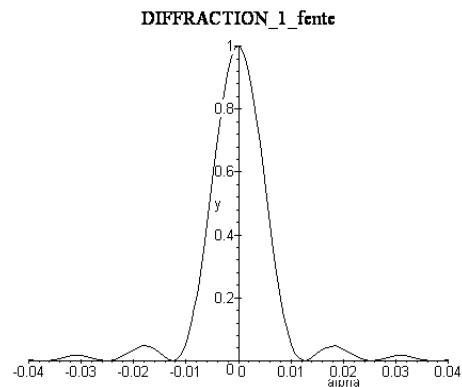
$$A(\vec{u}) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{jk\alpha x} dx \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{jk\beta y} dy = \frac{\sin(\pi\alpha \frac{a}{\lambda})}{\pi\alpha \frac{a}{\lambda}} \cdot \frac{\sin(\pi\beta \frac{a}{\lambda})}{\pi\beta \frac{a}{\lambda}} ;$$

$$I(\vec{u}) = I_0 \left(\frac{\sin(\varepsilon)}{\varepsilon} \right)^2 \left(\frac{\sin(\eta)}{\eta} \right)^2, \text{ avec } \varepsilon = \pi\alpha \frac{a}{\lambda}, \text{ et } \eta = \pi\beta \frac{a}{\lambda}.$$

- 4) Si la direction d'observation est dans le plan xOz,

$$I(\alpha, 0) = I_0 \left(\frac{\sin(\pi\alpha \frac{a}{\lambda})}{\pi\alpha \frac{a}{\lambda}} \right)^2 ; \text{ la tache principale de diffraction, limitée par les valeurs } \pm$$

$\alpha_0 = \frac{\lambda}{a} = 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 0,716^\circ$, contient la plus grande partie de l'énergie lumineuse qui franchit l'ouverture Σ (graphe avec $I_0 = 1$).



- 5) La fonction de Bessel $J_1(x)$ s'annule pour $\pm x_0$ ($x_0 = 3,832$), valeurs qui définissent le cercle limite de la tache d'Airy, tache centrale de

diffraction ; donc $\alpha_0 = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 1,53 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 0,874^\circ$.

IIIC étude des questions énergétiques pour une liaison satellite-sol.

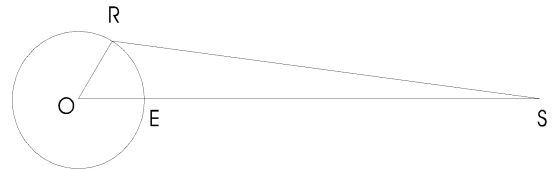
- 1) Le satellite S est à la hauteur H au-dessus de

l'Équateur E ; le récepteur R est à la latitude θ ;

$RS = L$; $OE = OR = R_T$; dans le triangle ORS :

$$L = \sqrt{R_T^2 + (R_T + H)^2 - 2R_T(R_T + H)\cos(\theta)} ;$$

numériquement, $L = 3,86 \cdot 10^4 \text{ km}$.



- 2) On admet que le territoire métropolitain (sauf la Corse) s'inscrit dans un cercle (C) de diamètre $d = 1000$ km, et on le confond avec le plan horizontal de son centre. A cause de l'inclinaison de ce plan sur l'axe SR de l'antenne émettrice du satellite, la 'couverture' du territoire doit être assurée en longitude ; c'est suffisant pour qu'alors, elle soit assurée en latitude. Soit α_m l'ouverture angulaire du cône, de sommet S, à l'intérieur duquel l'intensité I est supérieure au quart de I_0 ; cet angle correspond à la valeur $x_m = 2,215$ (figure 3).

Donc : $\alpha_m = 0,705 \frac{\lambda}{D} = \frac{d}{2L}$; on en déduit $D = 1,41 \frac{L\lambda}{d}$; numériquement, $D = 2,72$ m.

- 3) Chaque antenne émettrice, dotée d'un réflecteur de diamètre $D = 2,80$ m, ne peut 'couvrir' qu'un territoire d'étendue d de l'ordre de 1000 km en longitude (et $d/\cos(\theta)$ en latitude).

Pour la 'couverture' d'un continent, deux solutions sont envisageables :

- augmenter le nombre de satellites (coût plus élevé, mais les détecteurs au sol gardent la même sensibilité) ;
 - décaler l'émetteur unique hors du foyer pour ouvrir le cône d'émission (surcoût nul pour le satellite, mais il faut augmenter la sensibilité des détecteurs).
- 4) L'intensité lumineuse $I(\alpha)$ peut être considérée comme la puissance surfacique qui se répartit sur la demi-sphère de centre S, de rayon L, et d'axe SR.

$$P = \iint_{\text{demi-sphère}} I(\alpha) d^2\Sigma = I_0 L^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \frac{J_1^2\left(\pi \frac{D}{\lambda} \sin(\theta)\right)}{\left(\pi \frac{D}{\lambda} \sin(\theta)\right)^2} \sin(\theta) d\theta$$

Donc : , où θ est l'angle $(\vec{u}_z, \vec{u})$.

On fait une erreur de quelques pour cent (par défaut) en réduisant le domaine d'intégration à

la tache centrale de diffraction, soit $\theta \in [0, \theta_0]$, avec $x_0 = \pi \frac{D}{\lambda} \sin(\theta_0) = 3,832$ (figure 3).

D'après IIIB5, $\alpha_0 = \sin(\theta_0) = 1,53 \cdot 10^{-2}$ rad ; donc $\cos(\theta_0)$ vaut 1,000 (à 10^{-4} près environ), ainsi que $\cos(\theta)$ dans l'intervalle d'intégration réduit. On introduit $\cos(\theta)$ comme facteur dans

$$P = 2\pi L^2 I_0 \frac{\lambda}{\pi D} \int_0^{\theta_0} \frac{4J_1^2(u)}{u} \cos(\theta) d\theta = 2\pi L^2 I_0 \left(\frac{\lambda}{\pi D}\right)^2 \int_0^{x_0} \frac{4J_1^2(u)}{u} du$$

l'intégrale en θ : ; donc :

$$P = 1,070 \cdot I_0 \left(\frac{\lambda L}{D}\right)^2, \text{ et } I_0 = \frac{P}{1,070} \left(\frac{D}{\lambda L}\right)^2.$$

L'application numérique demandée correspond exactement à l'évaluation de I_0 ; comme P est trop faible, on ramène le facteur numérique 1,07 à l'unité pour un ordre de grandeur ; finalement : $I_0 = 4 \cdot 10^{-10}$ W/m².

- 5) Puissance reçue par l'antenne réceptrice, située sur l'axe de l'antenne émettrice ($I = I_0$) :

$$P_{\text{reçue}} = \pi \frac{D^2}{4} I_0, \text{ avec } D = 0,60 \text{ m ; soit } P_{\text{reçue}} = 1,2 \cdot 10^{-10} \text{ watt (très faible).}$$

Les détecteurs doivent être très sensibles, et associés à des amplificateurs à grand gain.

FIN