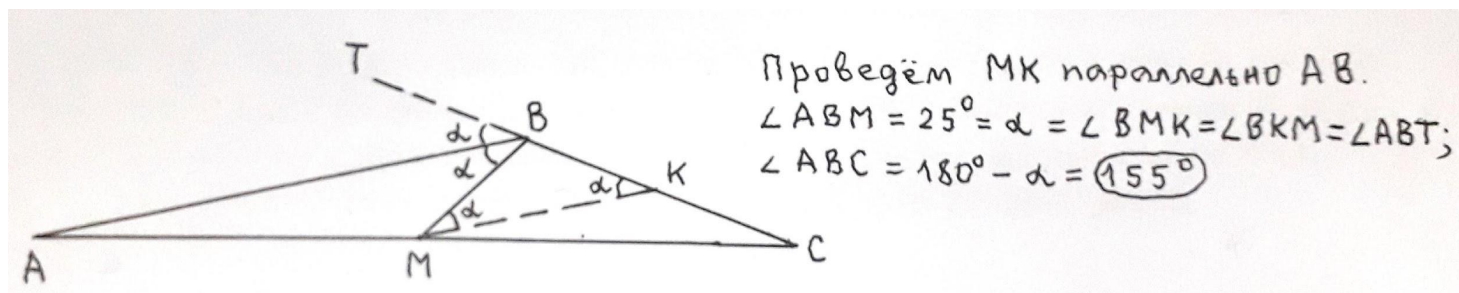
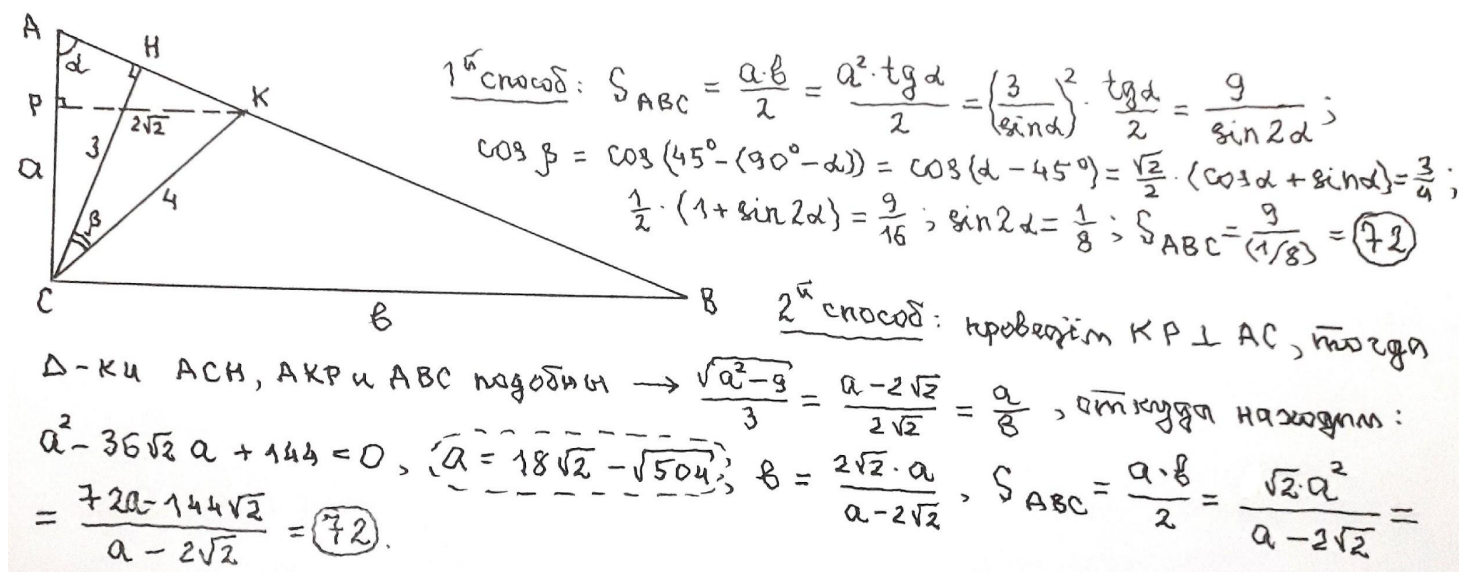


83. (8-2) В треугольнике ABC медиана BM вдвое меньше стороны BC. Известно, что угол ABM равен 25° . Найдите величину угла ABC.

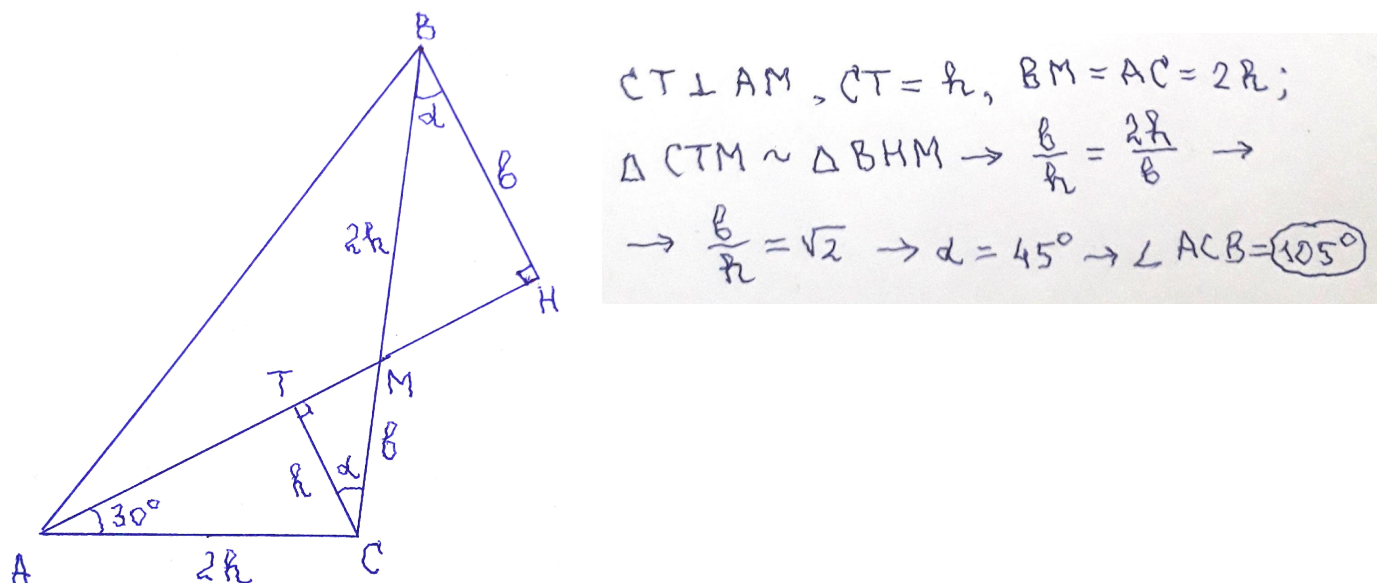


85. (9-2) В треугольнике ABC с прямым углом C проведены высота CH = 3 и биссектриса CK = 4. Найдите площадь треугольника ABC.

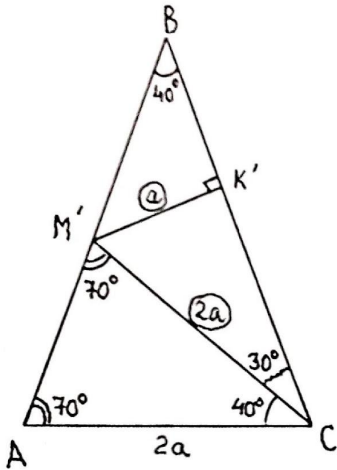


3-й способ (Штыков Н.Н.): $S = 2\sqrt{2} \cdot (a+b)/2 \rightarrow S^2 = 2(a^2 + 2ab + b^2) = 4ab + 2AB^2 = 8S + 2 \cdot (2S/3)^2 \rightarrow S/9 = 8 \rightarrow S = 72$.

61. (8-3) На стороне BC треугольника ABC отметили точку M так, что $BM = AC$. Точка H – основание перпендикуляра, проведённого из точки B на прямую AM. Известно, что $BH = CM$ и угол MAC равен 30° . Найдите градусную меру угла ACB.



59. (8-4) В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) угол ABC равен 40° . На сторонах AB и BC отмечены точки соответственно M и K так, что отрезок MK перпендикулярен стороне BC и равен половине стороны AC . Докажите, что $CM = CA$.



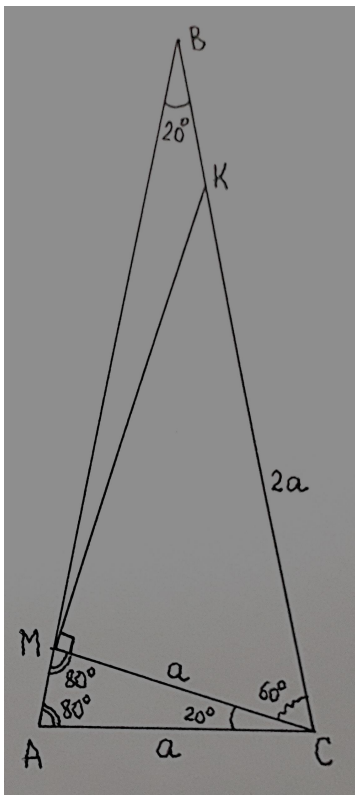
1^й способ: отметим на AB точку M' так, что $CM' = CA = 2a$;
тогда $\angle AM'C = \angle BAC = 70^\circ$, $\angle ACM' = \angle B = 40^\circ$, $\angle M'CB = 30^\circ$;
 $M'K' \perp BC \Rightarrow M'K' = \frac{1}{2} M'C = a \Rightarrow M' \equiv M$ и $K' \equiv K$.

2^й способ: $CM^2 = MK^2 + KC^2 = a^2 + a^2 \cdot \left(\frac{1}{\sin 20^\circ} - \cot 40^\circ \right)^2 = \dots = 4a^2$,
т.е. $CM = 2a = CA$.

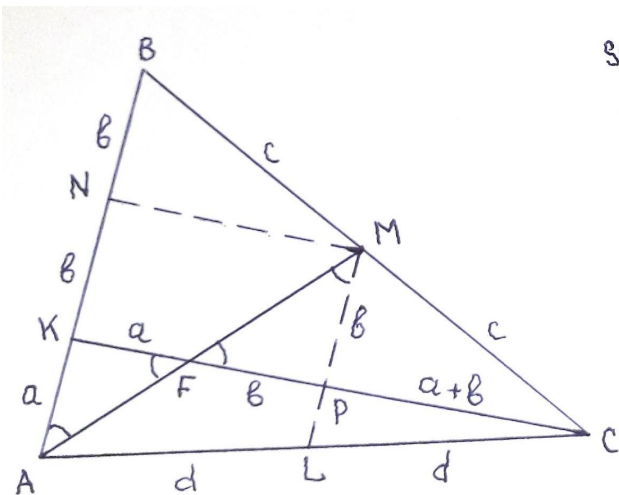
Комментарий.

На рисунке слева представлена задача, аналогичная задаче **59**:

В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) угол ABC равен 20° . На сторонах AB и BC отмечены точки соответственно M и K так, что отрезок MC перпендикулярен отрезку MK и равен стороне AC . Докажите, что $CK = 2 \cdot CA$.

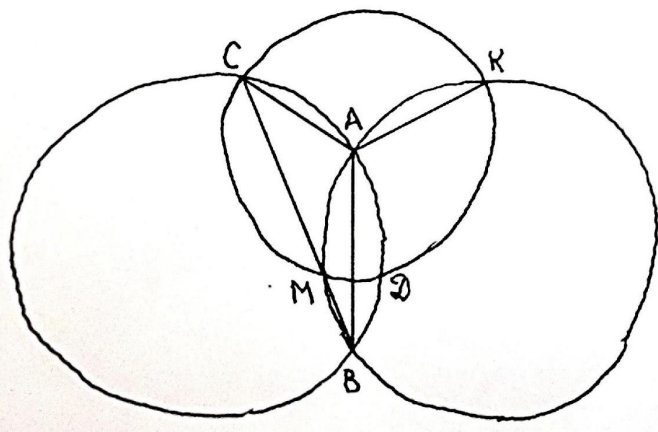


82. (8-4) На стороне AB остроугольного треугольника ABC отмечена точка K . Точка M – середина стороны BC . Отрезки AM и CK пересекаются в точке F . Известно, что $KF = AK$. Докажите, что $CF = AB$.



Sei $MN \parallel CK$ и $ML \parallel AB$, тогда
 Δ -ки AKF и MPF - P/S , $BN = KN = MP$,
 $CP = KP$ и $CF = CP + FB = a + b + b = AB$.

35. (8-4) Две окружности γ_1 и γ_2 одинакового радиуса пересекаются в точках A и B . Окружность γ с центром в точке A пересекает окружность γ_1 в точках C и D . Докажите, что точки пересечения окружностей γ и γ_2 принадлежат прямым BC и BD .



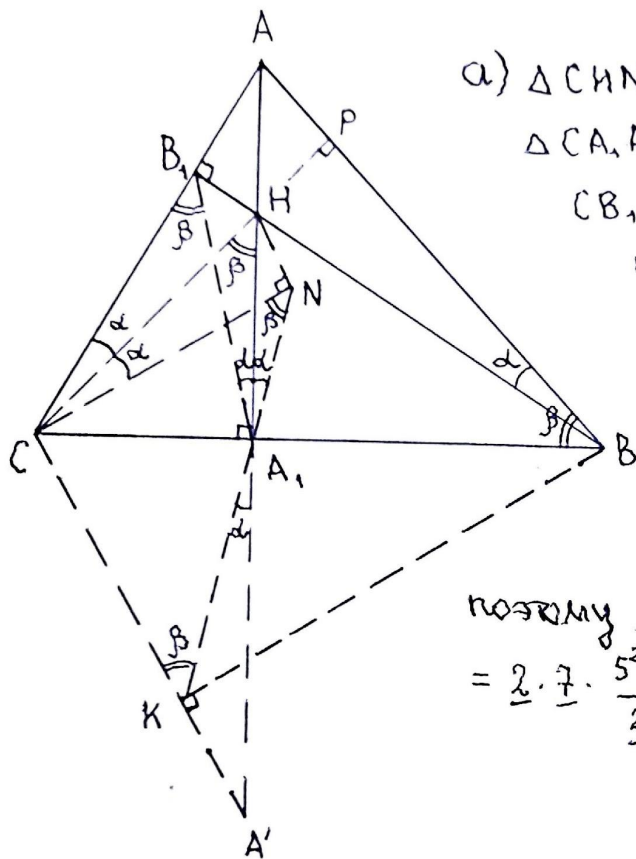
$\angle ABM = \alpha = \angle AKM = \angle ACS = \angle ADS = \angle ABC$,
 т.к. дуги AC , AK , AD и AM равны.
 $\angle ABD = \angle ABK = \alpha$ в силу симметрии
 относительно прямой AB .

50. (10-2) В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке H . Построим две окружности ω_1 и ω_2 с центрами в точках H и B и радиусами HB_1 и BB_1 соответственно. Из точки C к окружностям ω_1 и ω_2 проведем касательные, которые касаются этих окружностей соответственно в точках N и K , отличных от B_1 . Докажите, что точки A_1 , N и K лежат на одной прямой.

Комментарий. Задание **50** вполне подходит под задание **C5a (17a)** профильного ЕГЭ по математике:

а) Докажите, что точки A_1 , N и K лежат на одной прямой.

б) Найдите расстояние между точками N и K , если $AB = 6$, $BC = 7$ и $AC = 5$. **38/7**

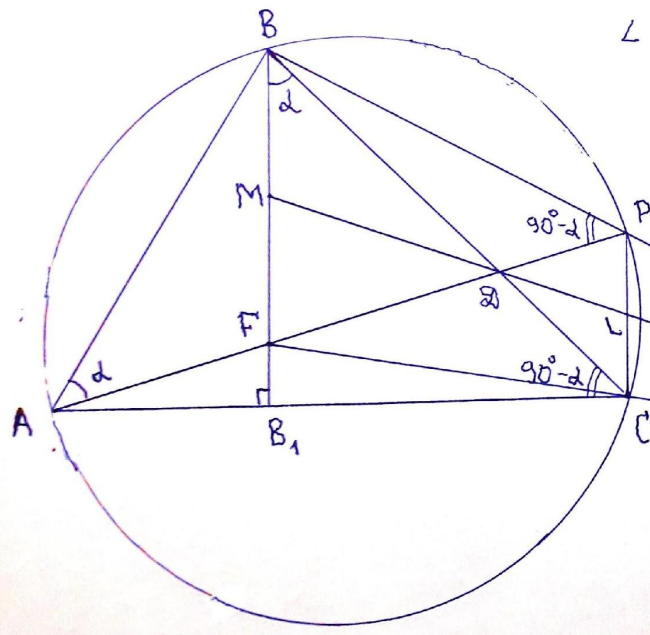


а) $\triangle CHN$ и $\triangle CHB_1$ симметричны относительно CH ;
 $\triangle CA_1A'$ и $\triangle CA_1A$ симметричны относительно CA_1 ;
 $CB_1, HA_1, CH, NA_1, A_1H, BV, A_1B, AB$ — вписанные;
 поэтому $\angle KA_1A' = \angle B_1A_1A = \angle B_1A_1H =$
 $= \angle B_1CH = \angle NCH = \angle NA_1H = \alpha$.

б) $\angle CKA_1 = \beta = \angle CNA_1 = \angle CHA_1 =$
 $= \angle CB_1A_1 = \angle CBA$; $CN = CB_1 = CK$;

поэтому $NK = 2 \cdot CB_1 \cdot \cos \beta = 2 \cdot CB \cdot \cos \angle ACB \cdot \cos \beta =$
 $= 2 \cdot 7 \cdot \frac{5^2 + 7^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{38}{5} \cdot \frac{60}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \left(\frac{38}{7} \right)$

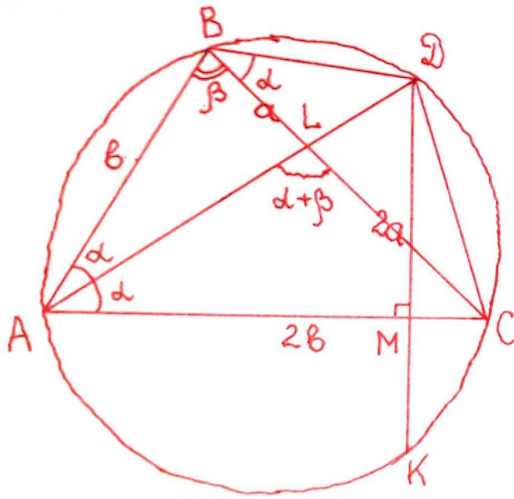
67. (9-4) В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота BB_1 . На стороне BC выбрана точка D так, что $\angle BAD = \angle CBB_1$. Отрезки AD и BB_1 пересекаются в точке F . Через точку B перпендикулярно стороне AB провели прямую l , и за K обозначили точку пересечения прямых l и CF . Докажите, что прямая DK делит отрезок BF пополам.



$\angle BPA = 90^\circ - \alpha = \angle BCA \rightarrow ABPC$ вписан
 в окружность с диаметром $AP \rightarrow$
 $\rightarrow \angle ACP = 90^\circ = \angle AB_1B \rightarrow PC \parallel BF \rightarrow$
 $\rightarrow PL = CL$ и $BM = FM$ по сб-ву
 трапеции (или по теореме
 Понто для $\triangle PKC$).

39. (9-4) Около остроугольного треугольника ABC описана окружность. Хорда AD является биссектрисой угла треугольника и пересекает сторону BC в точке L , хорда DK

перпендикулярна стороне AC и пересекает её в точке M . Найдите отношение $AM : MC$, если $BL : LC = 1 : 2$.



$$R_{ABC} = R; AC = 2R \cdot \sin \beta; DC = 2R \cdot \sin \alpha;$$

$$AM = AD \cdot \cos \alpha = 2R \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha;$$

$$\text{из } \triangle ABC: \frac{\sin \beta}{2B} = \frac{\sin 2\alpha}{3a};$$

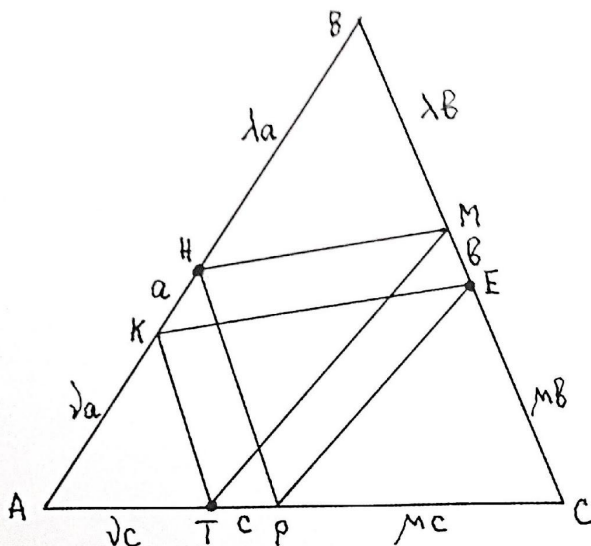
$$\text{из } \triangle ALC: \frac{\sin(\alpha + \beta)}{2B} = \frac{\sin \alpha}{2a};$$

$$\frac{AM}{AC} = \frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha \cdot 3a}{2a \sin 2\alpha} \cdot \cos \alpha = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Поэтому } \boxed{AM : MC = 3 : 1}.$$

Другое решение (Евгений Моргунов): $LC = 2/3BC$, каждый из углов BCD и DBC равен углу BAD , треугольники ADC и LDC подобны, а высота DH , опущенная из точки D на хорду BC , делит эту хорду пополам; следовательно, $AM : MC = CH : LH = (1/2) : (2/3 - 1/2) = 3 : 1$.

40. (9-4) На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC отметили соответственно точки K , M и P . На отрезках PA , KB и MC отметили соответственно точки T , H и E так, что TK параллельно PH , HM параллельно KE , PE параллельно TM . Возможно ли, что прямые AE , BT и CH пересекаются в одной точке?



AE, BT, CH пересекаются в одной точке

$\hat{=}$ т. Чева

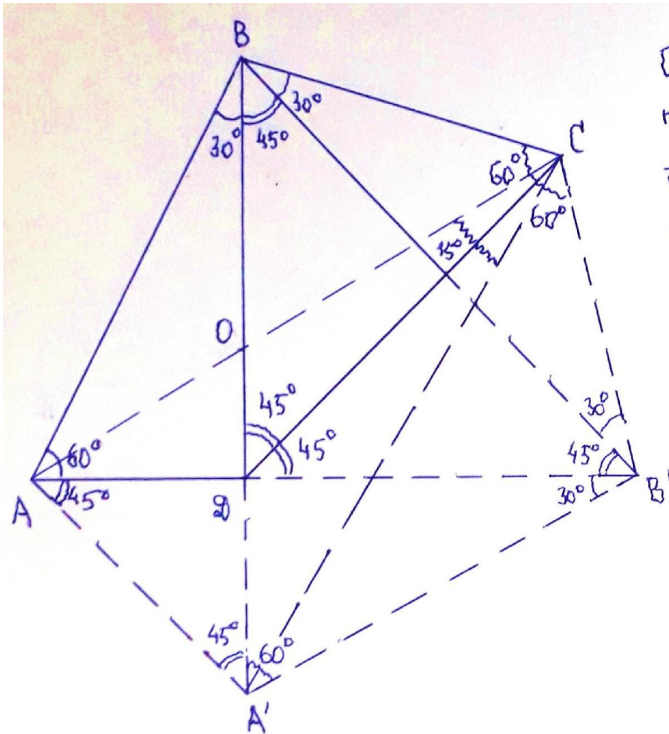
$$\frac{AH}{BH} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CT}{AT} = 1;$$

$$\text{но } \frac{j+1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda+1}{\mu} \cdot \frac{\mu+1}{j} = \frac{\lambda+1}{\lambda} \cdot \frac{\mu+1}{\mu} \cdot \frac{j+1}{j} > 1$$

(противоречие);

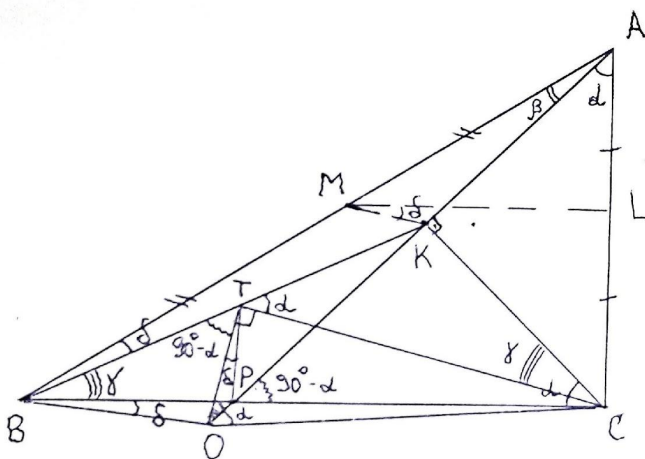
поэтому такое невозможно.

62. (8-4) В четырёхугольнике ABCD диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Известно, что диагональ BD перпендикулярна стороне AD, угол BAD равен 60° , угол BCD равен 60° , угол ADC равен 135° . Найдите отношение $DO : OB$.



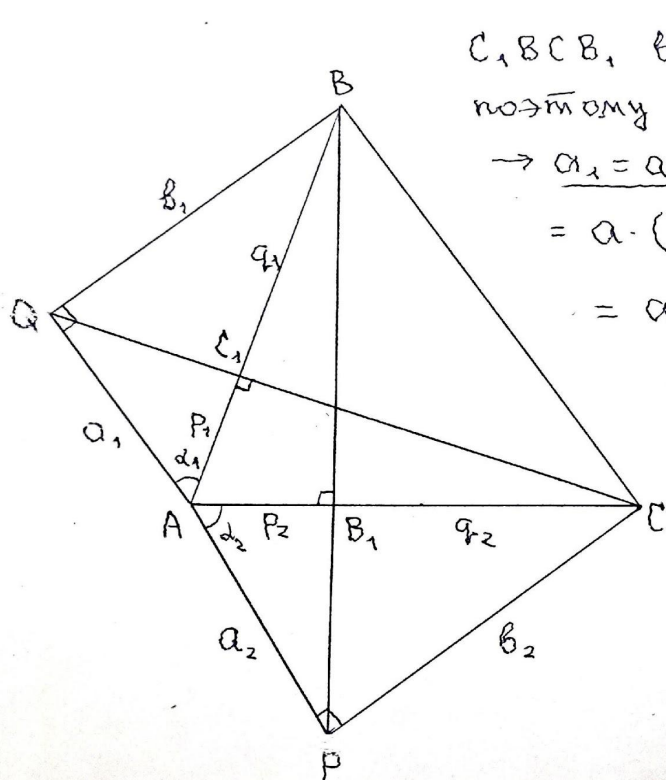
Отразим ABCD симметрично относительно прямой CD . Четырёхугольники $A'BCB'$ и $A'ABB'$ вписаны $\rightarrow$ вписан $ABCB'A'$ $\rightarrow$
 $\rightarrow \angle ACD = \frac{1}{2} \angle ACA' = \frac{1}{2} \angle ABA' = 15^\circ \rightarrow$
 $\rightarrow \angle DAO = 180^\circ - 15^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 30^\circ = \angle BAO \rightarrow$
 $\rightarrow AD$ — биссектриса $\angle BAO \rightarrow$
 $\rightarrow \frac{DO}{OB} = \frac{DA}{BA} = 1:2$

36. (8-4) Внутри прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB взята точка K так, что $\angle AKC = 90^\circ$ и $\angle SKB = 2 \cdot \angle CAB$. На отрезке KB нашлась такая точка T, что $\angle KTC = \angle CAK$. Прямая AK пересекает отрезок BC в точке P. Докажите, что $\angle TPA = \angle ABC$.



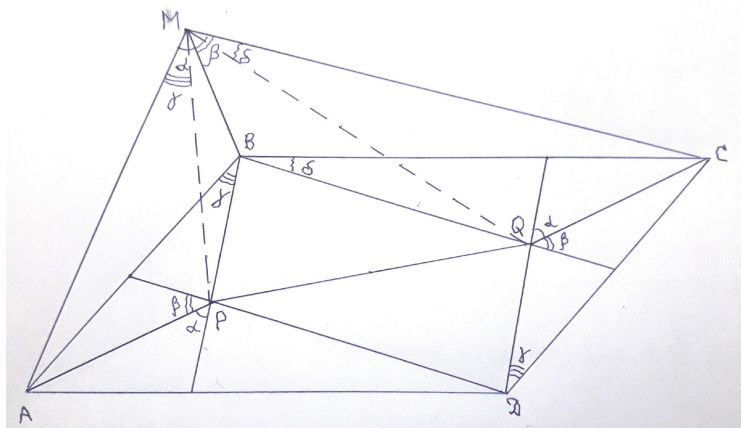
Let $AM = BM$, $AL = CL$, $OK = AK$; тогда
 $\angle BMC = 2\alpha + 2\beta = \angle BKC \rightarrow BMKC$ — вписан,
 $\angle COK = \alpha = \angle CTK \rightarrow OTKC$ — вписан;
 поэтому $\angle LMK = \delta = \angle MBK$, а $\angle OTC = 90^\circ$;
 $\angle BTO = 90^\circ - \alpha = \angle CPK = \angle BPO \rightarrow BTPO$ — вписан;
 $\angle TBP = \gamma = \angle TOP = \angle TOK = \angle TCK$;
 $ML \parallel BC$, $BO \parallel MK \rightarrow \angle OTP = \angle OBP = \delta$;
 поэтому $\angle TPA = \delta + \gamma = \angle ABC$

71. (10-4) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 . На продолжениях BB_1 и CC_1 за точки B_1 и C_1 отмечены точки соответственно P и Q так, что $\angle APC = \angle AQB = 90^\circ$. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники APC и AQB, равны. Обязательно ли треугольник ABC равнобедренный?



$\triangle BCB_1$ вписан в окружность с диаметром BC ,
поэтому $a_1^2 = p_1 \cdot (p_1 + a_1) = p_2 \cdot (p_2 + a_2) = a_2^2 \rightarrow$
 $\rightarrow a_1 = a_2 = a$; $2r_{AQB} = a_1 + b_1 - (p_1 + a_1) =$
 $= a \cdot (1 + \operatorname{tg} \alpha_1 - \frac{1}{\cos \alpha_1}) = 2 \cdot r_{APC} =$
 $= a_2 + b_2 - (p_2 + a_2) = a \cdot (1 + \operatorname{tg} \alpha_2 - \frac{1}{\cos \alpha_2})$;
функция $y(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{\cos \alpha} =$
 $= \frac{\sin \alpha - 1}{\cos \alpha} = \operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4})$ возрастает
на $(0; \frac{\pi}{2})$, поэтому $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$,
 $\triangle AQB = \triangle APC$ и $\boxed{AB = AC}$.

78. (11-4) Внутри параллелограмма ABCD отмечены точки P и Q, симметричные относительно точки пересечения диагоналей параллелограмма. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABP, CDP, BCQ и ADQ имеют общую точку.



$\triangle CDQ = \triangle ABP$, а $PBQD$ -
- параллелограмм;
отметим точку M такую,
что $\angle AMB = \alpha = 180^\circ - \angle APB$,
а $\angle CMB = \beta = 180^\circ - \angle CQB$;
проверим, что M - общая
точка описанных окр-тей
 $\triangle ABP, \triangle CDP, \triangle BCQ$ и $\triangle ADQ$;
для описанных окр-тей $\triangle ABP$
и $\triangle BCQ$ это следует из того,
что $\angle AMB + \angle APB = 180^\circ = \angle CMB + \angle CQB$;

для описанных окр-тей Δ -ов CDP и ADQ это следует из того, что
 $\angle CDP + \angle CMP = (\angle BPP' + \gamma) + (\alpha + \beta - \gamma) = \angle BPP' + \alpha + \beta = 180^\circ$ и
 $\angle ADQ + \angle AMQ = (\angle BPP' + \delta) + (\alpha + \beta - \delta) = \angle BPP' + \alpha + \beta = 180^\circ$.

Комментарий. Немцы не постеснялись включить её в задания 1-го (заочного, с участием и иностранных школьников) тура федерального конкурса по математике:

Die Aufgaben für die 1. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik 2023

Aufgabe 3

Gegeben sind zwei Parallelogramme $ABCD$ und $AECF$ mit gemeinsamer Diagonale AC , wobei E und F im Inneren des Parallelogramms $ABCD$ liegen.

Zeige:

Die Umkreise der Dreiecke AEB , BFC , CED und DFA haben einen Punkt gemeinsam.

64. (9-4) Внутри треугольника ABC с углами $ACB = 90^\circ$ и $BAC = 60^\circ$ нашлась такая точка O , что угол AOB равен 120° , $OC = 1$, $OB = 4$. Найдите длину отрезка AO .

