

**Bài 1: (4,0 điểm)**

Cho biểu thức 
$$A = \left( \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x+2}}{x-5\sqrt{x+6}} \right) : \left( 1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \right);$$

Với  $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9;$

a) Rút gọn biểu thức A. b) Tìm giá trị của A khi  $x = 6 - 2\sqrt{5}$ .

c) Với giá trị nào của x thì  $\frac{1}{A}$  đạt giá trị nhỏ nhất? Tìm giá trị nhỏ nhất đó?

**Bài 2: (3,0 điểm)**

a) C/m: Với mọi số tự nhiên n thì  $a_n = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$  là số chính phương.

b) Giải phương trình: 
$$\frac{\sqrt{x-2012}-1}{x-2012} + \frac{\sqrt{y-2013}-1}{y-2013} + \frac{\sqrt{z-2014}-1}{z-2014} = \frac{3}{4}$$

**Bài 3: (4,0 điểm)**

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình:  $2x^2 + 4x = 19 - 3y^2$ .

b) Tìm các số tự nhiên a, b sao cho  $\overline{a56b}$  chia hết cho 45

**Bài 4: (7,0 điểm)**

1. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC=2R. Điểm A di động trên nửa đường tròn. Gọi H là hình chiếu của điểm A lên BC. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H lên AC và AB.

a. Chứng minh:  $AB \cdot EB + AC \cdot EH = AB^2$

b. Xác định vị trí điểm A sao cho tứ giác AEHD có diện tích lớn nhất? Tính diện tích lớn nhất đó theo R.

2. Qua đỉnh A của hình vuông ABCD cạnh là a, vẽ một đường thẳng cắt cạnh

BC ở M và cắt đường thẳng DC ở I. Chứng minh rằng: 
$$\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2}$$

**Bài 4: (2,0 điểm)**

Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn  $xyz=1$ .

CMR 
$$\frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1} \leq 1$$

## HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

### Môn: Toán 9

$$A = \left( \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right) : \left( 1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right);$$

**Câu 1 (4 điểm):** Cho biểu thức

Với  $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$  (\*)

a) Rút gọn biểu thức A;

b) Tìm giá trị của A khi  $x = 6 - 2\sqrt{5}$ ;

c) Với giá trị nào của x thì  $\frac{1}{A}$  đạt giá trị nhỏ nhất? tìm giá trị nhỏ nhất đó?

Lời giải sơ lược	Điểm
a) Với điều kiện (*) ta có: $A = \left( \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$	0,50
$= \frac{x-9-x+4+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} : \left( \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right)$	0,50
$= \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} : \left( \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right)$	0,50
$= \frac{1}{\sqrt{x}-2} : \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$	0,50
b) Dễ thấy : $x = 6 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5}-1)^2$ thoả mãn điều kiện. Khi đó: $\sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \sqrt{5}-1$	0,50
Do vậy, giá trị của biểu thức A là: $\frac{\sqrt{5}-1+1}{\sqrt{5}-1-2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-3}$	0,25
$= -\frac{3\sqrt{5}+5}{4}$	0,25

c) Viết lại, $\frac{1}{A} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x+1}}$ . Để $\frac{1}{A}$ có GTNN thì $\frac{3}{\sqrt{x+1}}$ có GTLN, hay $\sqrt{x+1}$ có GTNN.	0,25
Ta có: $\sqrt{x+1} \geq 1$ , dấu "=" xảy ra khi $x = 0$ . Giá trị nhỏ nhất của $\frac{1}{A}$ là $1 - \frac{3}{\sqrt{0+1}} = 1 - 3 = -2$ , xảy ra khi $x = 0$ .	0,75

**Câu 2(3 điểm):**

a) Chứng minh : Với mọi số tự nhiên  $n$  thì  $a_n = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$  là số chính phương.

b) Giải phương trình: 
$$\frac{\sqrt{x-2012}-1}{x-2012} + \frac{\sqrt{y-2013}-1}{y-2013} + \frac{\sqrt{z-2014}-1}{z-2014} = \frac{3}{4}$$

Câu	Ý	Lời giải sơ lược	Điểm
2			4đ
	a		1,5đ
		Ta có : $a_n = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ $= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1$	0,5
		$= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1$	
		$= (n^2 + 3n + 1)^2$	0,5
		Với $n$ là số tự nhiên thì $n^2 + 3n + 1$ cũng là số tự nhiên, theo định nghĩa, $a_n$ là số chính phương.	0,5
	b		1,5đ
		Đặt $\sqrt{x-2012} = a; \sqrt{y-2013} = b; \sqrt{z-2014} = c$	0,25
		(với $a, b, c > 0$ ). Khi đó phương trình đã cho trở thành: $\frac{a-1}{a^2} + \frac{b-1}{b^2} + \frac{c-1}{c^2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2}\right) = 0$	0,5
		$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{c}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 2$	0,5

	Suy ra: $x = 2016, y = 2017, z = 2018.$	0,25
--	---	------

**Câu 3 (4 điểm):**

- a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình:  $2x^2 + 4x = 19 - 3y^2.$   
b) Tìm các cặp chia hết a, b sao cho  $\overline{a56b} \equiv 45$

Câu	Ý	Lời giải sơ lược	Điểm
3			3đ
	a		2đ
		<p>Ta có: <math>2x^2 + 4x = 19 - 3y^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x = 38 - 6y^2</math></p> <p><math>\Leftrightarrow 4x^2 + 8x + 4 = 42 - 6y^2</math></p> <p><math>\Leftrightarrow (2x+2)^2 = 42 - 6y^2 \Leftrightarrow (2x+2)^2 = 6(7 - y^2) \quad (1)</math></p>	0,5
		<p>Vì <math>(2x+2)^2 \geq 0 \Rightarrow 7 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 7</math>, mà <math>y \in Z</math> nên:</p> <p><math>y = 0; \pm 1; \pm 2</math></p>	0,5
		<p>+ Với <math>y = 1</math>, từ (1) <math>(2x+2)^2 = 36 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2=6 \\ 2x+2=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-4 \end{cases}</math></p> <p>Trường hợp này phương trình có 2 nghiệm nguyên là: (2;1) và (-4;1).</p> <p>+ Với <math>y = -1</math></p> <p><math>(2x+2)^2 = 36 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2=6 \\ 2x+2=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-4 \end{cases}</math></p> <p>Thì từ (1) Trường hợp này pt có 2 nghiệm nguyên là: (2;-1) và (-4;-1).</p>	0,5
		<p>+ Với <math>y = \pm 2 \Rightarrow (2x+2)^2 = 18 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x - 14 = 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 7 \Rightarrow</math> pt này không có nghiệm nguyên vì VT chia hết cho 2, VP không chia hết cho 2.</p>	0,25

	$(2x+2)^2 = 42 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x - 38 = 0$ <p>+ Với <math>y = 0</math>, từ (1) <math>\Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 19</math>  PT này không có nghiệm nguyên vì VT chia hết cho 2; VP không chia hết cho 2.  Vậy PT đã cho có các nghiệm nguyên là:  <math>(-4;1); (2;1); (-4;-1); (2;-1)</math></p>	0,25
b		2đ
	Ta thấy $45 = 5.9$ và $(5; 9) = 1$ $\text{Số } \overline{a56b} \text{ chia } 45 \Leftrightarrow \overline{a56b} \text{ chia } 5 \text{ và } 9$	0,5
	XĐT $\overline{a56b} \text{ chia } 5 \Leftrightarrow b \in \{0; 5\}$	0,25
	Nếu $b = 0$ ta sẽ có $\overline{a56b} \text{ chia } 9 \Leftrightarrow a + 5 + 6 + 0 \text{ chia } 9$ $\Rightarrow a + 11 \text{ chia } 9$ $\Rightarrow a = 7$	0,5
	Nếu $b = 5$ ta sẽ có $\overline{a56b} \text{ chia } 9 \Leftrightarrow a + 5 + 6 + 0 \text{ chia } 9$ $\Rightarrow a + 16 \text{ chia } 9$ $\Rightarrow a = 2$	0,5
	Vậy: $a = 7$ và $b = 0$ ta sẽ có 7560 $a = 2$ và $b = 5$ ta sẽ có 2560	0,25

**Câu 4: (7 điểm)**

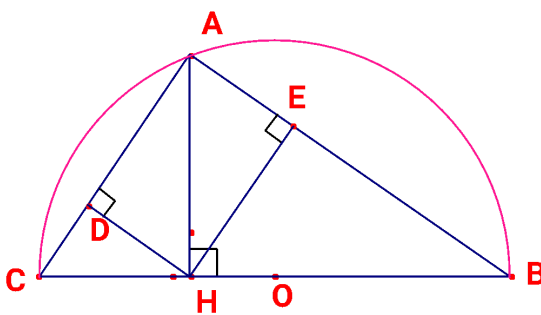
1. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính  $BC=2R$ . Điểm A di động trên nửa đường tròn. Gọi H là hình chiếu của điểm A lên BC. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H lên AC và AB.

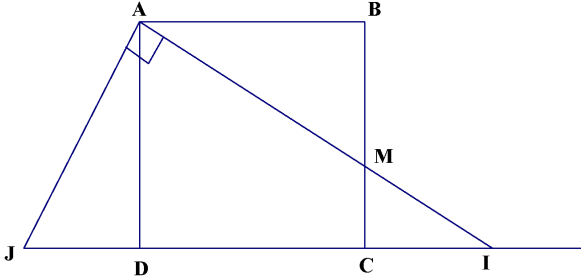
a. Chứng minh:  $AB \cdot EB + AC \cdot EH = AB^2$

b. Xác định vị trí điểm A sao cho tứ giác AEHD có diện tích lớn nhất? Tính diện tích lớn nhất đó theo R.

2. Qua đỉnh A của hình vuông ABCD cạnh là a, vẽ một đường thẳng cắt cạnh BC ở M và cắt đường thẳng DC ở I.

Chúng minh rằng:  $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2}$ .

Câu	Ý	Lời giải sơ lược	Điểm
4			7đ
	1		4đ
		<p>a) Chứng minh được tứ giác ADHE là hình chữ nhật</p> <p>Suy ra <math>AB \cdot EB = HB^2</math></p>	1
		$AC \cdot EH = AC \cdot AD = AH^2 \Rightarrow \text{ĐPCM}$	1
		<p>b) <math>S_{(ADHE)} = AD \cdot AE \leq \frac{AD^2 + AE^2}{2} = \frac{DE^2}{2} = \frac{AH^2}{2}</math></p>	1
		$\Rightarrow S_{(ADHE)} \leq \frac{AH^2}{2} \leq \frac{AO^2}{2} = \frac{R^2}{2}$	0,5
		<p>Vậy <math>\text{Max } S_{(ADHE)} = \frac{R^2}{2}</math> Khi <math>AD = AE</math> Hay A là điểm chính giữa của cung AB</p>	0,5
	2		3đ

		
	<p>Vẽ <math>Ax \perp AI</math> cắt đường thẳng CD tại J.</p> <p>Ta có <math>\Delta AIJ</math> vuông tại A, có AD là đường cao thuộc cạnh huyền IJ, nên:</p> $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AJ^2} + \frac{1}{AI^2} \quad (1)$	1
	<p>Xét hai tam giác vuông ADJ và ABM, ta có:</p> <p><math>AB = AD = a; \hat{DAJ} = \hat{BAM}</math> (góc có cạnh tương ứng vuông góc)</p>	0,5
	<p><math>\Rightarrow \Delta ADJ = \Delta ABM</math>.</p> <p>Suy ra: <math>AJ = AM</math></p>	1
	<p>Thay vào (1) ta được: <math>\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2}</math> (đpcm)</p>	0,5

**Câu 5 ( 2điểm):** Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn  $xyz=1$ .

Chúng minh rằng  $\frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1} \leq 1$

	Sơ lược lời giải	Điểm
	Đặt $x=a^3, y=b^3, z=c^3, a,b,c > 0$ thì $x, y, z > 0$ và $abc=1$ . Ta có	0,25

	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \geq (a+b)ab$ , do $a+b > 0$ và $a^2 + b^2 - ab \geq ab$ $\Rightarrow a^3 + b^3 + 1 \geq (a+b)ab + abc = ab(a+b+c) > 0$	0,5
	$\Rightarrow \frac{1}{a^3 + b^3 + 1} \leq \frac{1}{ab(a+b+c)}$ Tương tự ta có	0,25
	$\frac{1}{b^3 + c^3 + 1} \leq \frac{1}{bc(a+b+c)}, \quad \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq \frac{1}{ca(a+b+c)}$ Cộng theo vế ta có	0,5
	$\frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1} = \frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1}$ $\leq \frac{1}{(a+b+c)} \left( \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) = \frac{1}{(a+b+c)} (c+a+b) = 1$ Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$	0,5