Thème 9 La biodiversité et son évolution
Le principe d'Hardy-Weinberg

Au cours de l'évolution biologique, la composition génétique des populations d'une espèce change de génération en génération. Le modèle mathématique de Hardy-Weinberg utilise la théorie des probabilités pour décrire le phénomène aléatoire de transmission des allèles dans une population. Le modèle prédit que la structure génétique d'une population de grand effectif est stable d'une génération à l'autre sous certaines conditions :

- Absence de migration, de mutation et de sélection
- Panmixie (formation aléatoire des couples)
- Pangamie (croisement aléatoire et équiprobable des gamètes)
- Pas de croisement entre générations distinctes
- La proportion d'un allèle est égale pour chacun des sexes.

Cette stabilité théorique est connue sous le nom d'équilibre de Hardy-Weinberg.

On considère ainsi un gène disposant de deux allèles A **(dominant)** et a **(récessif)**. Ainsi, on distingue **deux phénotypes** (A et a) et **trois génotypes** (AA, Aa et aa).

On appelle p_n, q_n et r_n la probabilité (la fréquence) d'obtenir respectivement les génotypes AA, Aa et aa à la génération n. On obtient alors, à l'aide de la formule des probabilités totales, le tableau suivant.

♀ \ ♂		p_n	q_n	r_n
		AA	Aa	aa
p_n	AA	AA	AA 1/2 Aa 1/2	Aa
q_n	Aa	AA 1/2 Aa 1/2	AA 1/4 Aa 1/2 aa 1/4	Aa 1/2 aa 1/2
r_n	aa	Aa	Aa 1/2 aa 1/2	aa

Remarquons que, quelle que soit la génération,

$$p_n + q_n + r_n = 1$$

À la génération $n + 1$, on obtient alors, toujours à l'aide des probabilités totales,

$$p_{n+1} = p_n^2 + \frac{1}{2}p_n \times q_n + \frac{1}{2}p_n \times q_n + \frac{1}{4}q_n^2 = p_n^2 + 2\times p_n \times \frac{1}{2}q_n + \left(\frac{1}{2}q_n\right)^2 = \left(p_n + \frac{1}{2}q_n\right)^2$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n \times q_n + p_n \times r_n + \frac{1}{2}p_n \times q_n + \frac{1}{2}q_n^2 + \frac{1}{2}q_n \times r_n + p_n \times r_n + \frac{1}{2}q_n \times r_n$$

$$q_{n+1} = 2\left(p_n + \frac{1}{2}q_n\right)\left(\frac{1}{2}q_n + r_n\right)$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{4}q_n^2 + \frac{1}{2}q_n \times r_n + \frac{1}{2}q_n \times r_n + r_n^2 = \left(\frac{1}{2}q_n\right)^2 + 2\times\frac{1}{2}q_n \times r_n + r_n^2 = \left(\frac{1}{2}q_n + r_n\right)^2$$

Remarque

D'après la première identité remarquable,

$$\left(p_n + \frac{1}{2}q_n\right)^2 + 2\left(p_n + \frac{1}{2}q_n\right)\left(\frac{1}{2}q_n + r_n\right) + \left(\frac{1}{2}q_n + r_n\right)^2 = \left(p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}q_n + r_n\right)^2 = \left(p_n + q_n + r_n\right)^2 = 1$$

Remarquons que la probabilité du phénotype a égale r_n (a étant récessif). Or,

$r_{n+2} = \left(\frac{1}{2}q_{n+1} + r_{n+1}\right)^2 = \left(\left(p_n + \frac{1}{2}q_n\right)\left(\frac{1}{2}q_n + r_n\right) + \left(\frac{1}{2}q_n + r_n\right)^2\right)^2$

Puis, en factorisant par $\left(\frac{1}{2}q_n + r_n\right)$,

$r_{n+2} = \left(\frac{1}{2}q_n + r_n\right)^2\left(\left(p_n + \frac{1}{2}q_n\right) + \left(\frac{1}{2}q_n + r_n\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}q_n + r_n\right)^2\left(p_n + q_n + r_n\right)^2 = \left(\frac{1}{2}q_n + r_n\right)^2 \times 1^2$

Donc

$r_{n+2} = \left(\frac{1}{2}q_n + r_n\right)^2 = r_{n+1}$

On en déduit que, dès la première génération, **la probabilité du phénotype** a **ne varie pas d'une génération à l'autre** (et donc par conséquent, celle du phénotype A non plus).

Exercice (spé maths)

Calculer p_{n+2} et q_{n+2} en fonction de p_n, q_n et r_n

Que peut-on en conclure pour les génotypes ?

Pour les autres, activité 3 pages 192 et 193