ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.
Αν
• Η f είναι συνεχής στο Δ και
• $f'(x) = 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ,
να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]**;**

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν f,g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α και Β αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$.

β) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ καμπή, τότε $f''(x_0) = 0$.

δ) Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, ισχύει ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f : (1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$

και η συνάρτηση $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση

$$f^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2, \; x<0.$$

Μονάδες 8

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h = gof^{-1}$ είναι $h(x) = \frac{x-1}{x}$, $x<0$.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{-h(x)}\cdot \frac{1}{x}\right)$ όπου h είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Κυκλική λίμνη έχει κέντρο Ο και ακτίνα R=1km. Ένας μαθητής μπορεί να κωπηλατεί με σταθερή ταχύτητα v_1 = 2km/h και μπορεί να βαδίζει με σταθερή ταχύτητα v_2 = 4km/h.

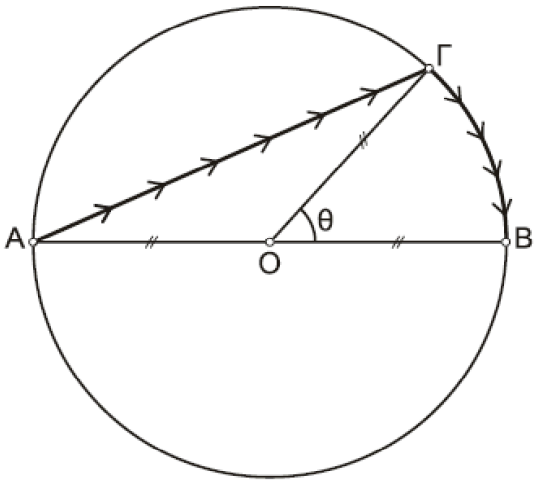
Ο μαθητής θέλει να κάνει μια βόλτα στη λίμνη, ξεκινώντας από το σημείο Α του σχήματος και καταλήγοντας στο αντιδιαμετρικό του σημείο Β.

Ο μαθητής μπορεί:

I. Να συνδυάσει κωπηλασία και βάδισμα, κωπηλατώντας ευθύγραμμα από το σημείο Α σε σημείο Γ της περιφέρειας της λίμνης, τέτοιο ώστε η γωνία $B\hat{O}\Gamma = \theta$, $\theta\in(0,\pi)$ και στη συνέχεια να βαδίσει κατά μήκος του τόξου ΓΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

II. Να κωπηλατήσει ευθύγραμμα από το σημείο Α στο σημείο Β ($\theta = 0$).

III. Να βαδίσει στην περιφέρεια της λίμνης από το Α στο Β ($\theta = \pi$).



Γ1. Να αποδείξετε ότι ο χρόνος (σε ώρες) που χρειάζεται, για να διανύσει την παραπάνω διαδρομή, ως συνάρτηση της γωνίας θ (σε ακτίνια) είναι

$$t(\theta) = \frac{\theta}{4} + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta}{2}\right),\ \theta\in[0,\pi]$$

Δίνεται ότι σε έναν κύκλο ακτίνας R το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία θ (σε ακτίνια) είναι $S=R\cdot\theta$.

Μονάδες 8

Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ ώστε ο χρόνος της βόλτας του μαθητή να γίνεται μέγιστος.

Μονάδες 9

Γ3. Σε ποια από τις επιλογές (I), (II) ή (III) ο χρόνος μετάβασης από το σημείο Α στο σημείο Β είναι ο ελάχιστος δυνατός; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x$

και συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = -x^2 + \alpha x$, $\alpha\in\mathbb{R}$,

για την οποία το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{-g(x)} + \quad\right)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που διέρχεται από το σημείο M(-1,0) είναι η ευθεία ε : y = x + 1 (μονάδες 3).
Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι f(x) > g(x) , για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(x-1)-x}{x-k}+\frac{f(x)-g(x)}{x-k-1}=0 \quad , k \in \mathbb{R}-\{1\}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (k, k+1).

Μονάδες 7