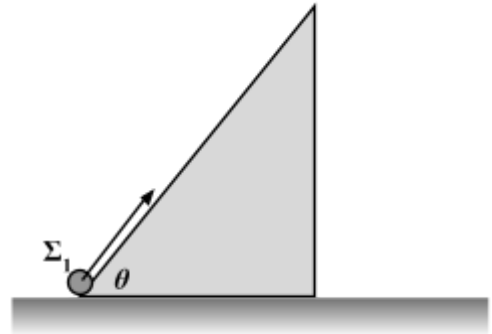


Ένα σφαιρίδιο σκαρφαλώνει σε σφήνα

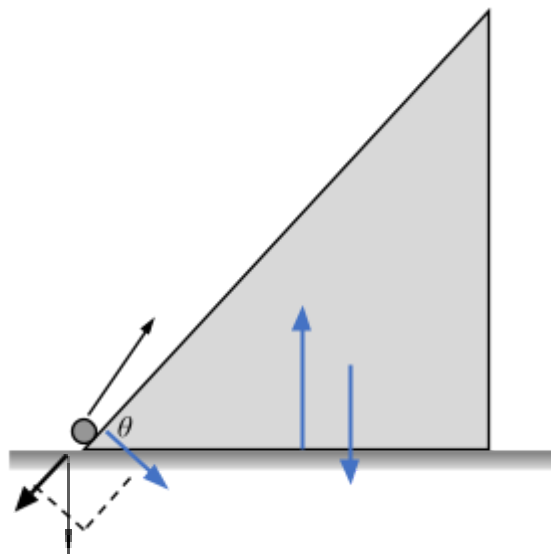
Το σφαιρίδιο Σ_1 του σχήματος, έχει μάζα $m=5\text{kg}$ και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0\text{s}$, εκτοξεύεται με ταχύτητα μέτρου $v = 6\text{m/s}$, παράλληλη προς την πλάγια επιφάνεια ακίνητης σφήνας Σ_2 μάζας $M = 10\text{kg}$, σχήματος τριγωνικού πρίσματος, η οποία μπορεί να ολισθαίνει στο οριζόντιο δάπεδο. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται μια κατακόρυφη τομή. Η γωνία κλίσης είναι $\theta = 60^\circ$, $g = 10\text{m/s}^2$ και τριβές δεν υπάρχουν.



- α) Εξηγήστε γιατί τα σώματα θα αποκτήσουν κάποια στιγμή κοινή ταχύτητα.
 - β) Το σύστημα είναι μονωμένο; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.
 - γ) Βρείτε το μέτρο v_k της κοινής ταχύτητας.
 - δ) Ποιο θα είναι το μέγιστο ύψος από το έδαφος, που θα φτάσει το σφαιρίδιο;
 - ε) Βρείτε την μεταβολή της ορμής του σφαιριδίου Σ_1 και της σφήνας Σ_2 κατά τη διάρκεια του χρόνου ανόδου από την χαμηλότερη προς την υψηλότερη θέση του σφαιριδίου. Γιατί οι μεταβολές δεν είναι αντίθετες;
 - στ) Υπολογίστε πόσο χρονικό διάστημα θα χρειαστεί το σφαιρίδιο για να φτάσει στο μέγιστο ύψος και την μέση τιμή του μέτρου της δύναμης επαφής, που δέχεται το σφαιρίδιο από τη σφήνα, μέσα σε αυτό το χρονικό διάστημα.
- Θεωρούμε το σφαιρίδιο ως υλικό σημείο και ότι η σφήνα δεν ανατρέπεται κατά τη διάρκεια του φαινομένου.

Απάντηση

- α) Τη χρονική στιγμή $t = 0^+\text{s}$, δηλαδή αμέσως μετά την εκτόξευση, καθώς το σφαιρίδιο ανέρχεται στη σφήνα, έχοντας σχεδόν στιγμιαία ταχύτητα σχεδόν $\vec{v}$, σχεδιάζουμε τις δυνάμεις (σχήμα 1) και αναλύουμε το βάρος του $\vec{B}_l$ σε δύο συνιστώσες, $\vec{B}_{l\pi}$ και $\vec{B}_{lk}$ παράλληλη και κάθετη αντίστοιχα στην κεκλιμένη επιφάνεια της σφήνας. Η συνιστώσα $\vec{B}_{l\pi}$ προκαλεί επιβράδυνση, που μειώνει το μέτρο της ταχύτητας του σφαιριδίου.

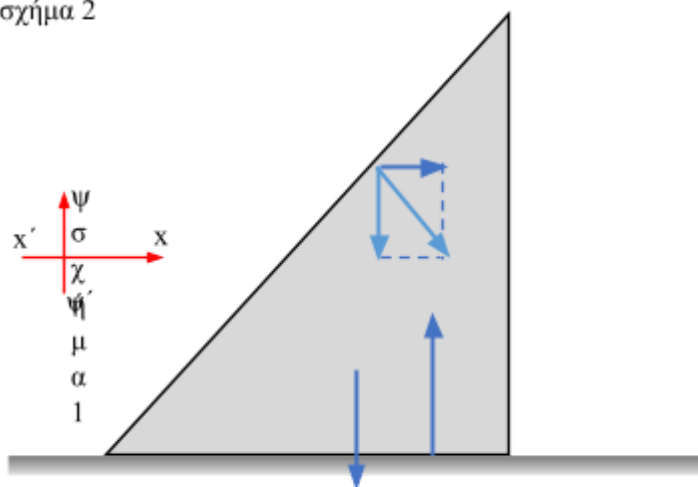


Στη σφήνα την ίδια στιγμή ασκούνται η δράση $\vec{N}_1'$ από το σφαιρίδιο, το βάρος της $\vec{B}_2$ και η

κάθετη δύναμη επαφής $\vec{N}_2$ από το οριζόντιο δάπεδο.

Για να μελετήσουμε καλύτερα την κίνηση της σφήνας, παίρνουμε ένα σύστημα δύο αξόνων, $x'x$ οριζόντιο και $\psi'\psi$ κατακόρυφο, το οποίο θα μας φανεί χρήσιμο και στη συνέχεια (σχήμα 2). Σε αυτό το σύστημα αναλύουμε την δράση $\vec{N}_1'$, της επαφής με το σφαιρίδιο, στις $\vec{N}_{1x}'$

σχήμα 2



και $\vec{N}_{1\psi}'$. Η συνιστώσα $\vec{N}_{1x}'$ «δεν έχει αντίπαλο» και επιταχύνει οριζόντια την αρχικά ακίνητη σφήνα. Όταν στιγμιαία το σφαιρίδιο βρίσκεται στο μέγιστο ύψος από το έδαφος, αποκτά κοινή ταχύτητα με τη σφήνα, που θα έχει τη διεύθυνση του άξονα $x'x$.

Η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων στο σύστημα, στον άξονα $x'x$, είναι μηδέν, αφού όπως φαίνεται

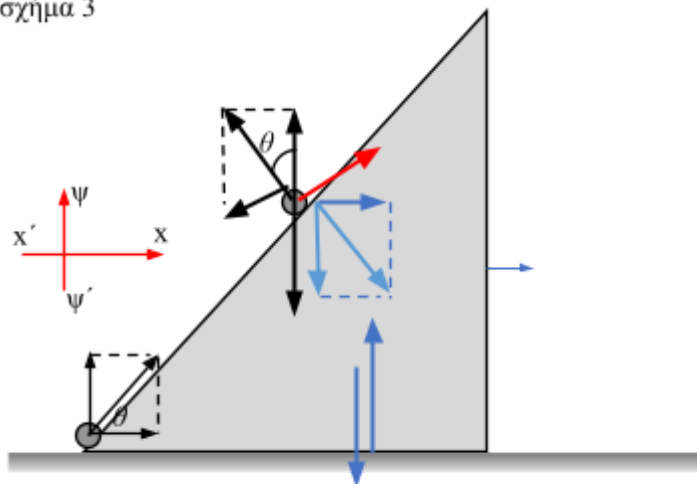
στο σχήμα 3, οι συνιστώσες $\vec{N}_{1x}'$ και

$\vec{N}_{1\psi}'$ αποτελούν δράση - αντίδραση

για το σύστημα σε αυτόν τον άξονα.

Άρα το σύστημα είναι μονωμένο κατά τον οριζόντιο άξονα $x'x$ και σε αυτόν τον άξονα διατηρείται η ορμή.

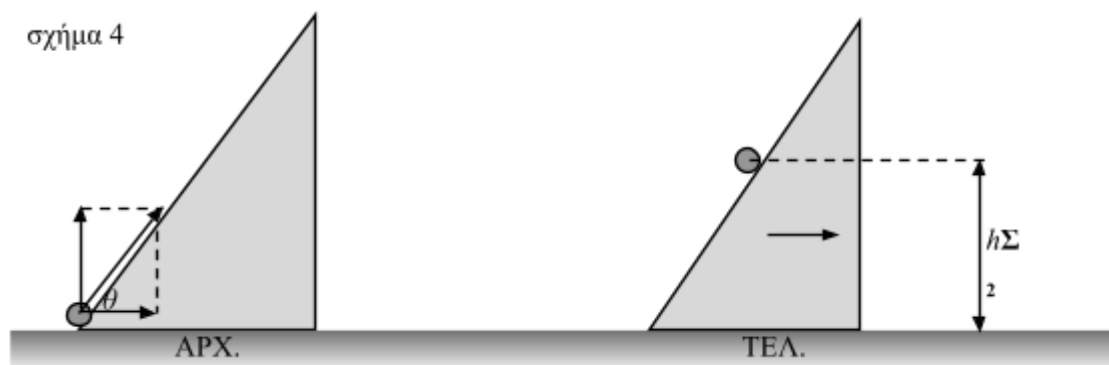
σχήμα 3



Στο σύνολό του όμως το σύστημα δεν είναι μονωμένο.

Ας

σχήμα 4



δούμε το σχήμα 4. Η ορμή του συστήματος αλλάζει διεύθυνση, δηλαδή δεν διατηρείται.

Προφανώς υπάρχει μόνο $\Delta \vec{p}_{\text{συστ.}, \psi}$, που σημαίνει ότι $\Sigma \vec{F}_{\psi, \epsilon\zeta} \neq 0$

Παρατήρηση

Στο σχήμα 3 έχει σημειωθεί με κόκκινο η ταχύτητα $\vec{v}_{\sigma}$ της σφαίρας, που βλέπει ένας ακίνητος παρατηρητής, σε μια τυχαία θέση του συστήματος. Γιατί είναι έτσι πλάγια;

Στο σχήμα 5 βλέπουμε η ταχύτητα $\vec{v}_{\sigma}$ της σφαίρας, είναι

η συνισταμένη της ταχύτητας $\vec{v}$

της σφήνας Σ_2 και της σχετικής ταχύτητας $\vec{v}_{\sigma\chi(\Sigma_1, \Sigma_2)}$ της σφαίρας Σ_1 ως προς τη σφήνα Σ_2 .

γ) Για να βρούμε το μέτρο της κοινής ταχύτητας $\vec{v}_{\kappa}$ εφαρμόζουμε την ΑΔΟ στον άξονα $x'x$, παρατηρώντας και το σχήμα 4:

$$\vec{p}_{x, APX} = \vec{p}_{x, TEA} \Leftrightarrow m v \sin \theta + 0 = (m + M) v_{\kappa} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_{\kappa} = \frac{m v \sin \theta}{M + m} \Leftrightarrow v_{\kappa} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 0,5}{15} \Leftrightarrow$$

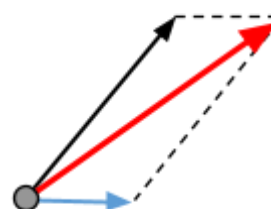
$$v_{\kappa} = 1 \text{ m/s}$$

δ) Όταν το σφαιρίδιο αποκτήσει την κοινή ταχύτητα του ερωτήματος (γ), σταματάει η άνοδος πάνω στη σφήνα (η σχετική τους ταχύτητα μηδενίζεται). Εκείνη ακριβώς τη στιγμή το σφαιρίδιο βρίσκεται στο μέγιστο ύψος από το έδαφος (σχήμα 4).

Στο σύστημα δεν ασκούνται τριβές ή αντιστάσεις, άρα η μηχανική του ενέργεια διατηρείται.

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για το σύστημα με $U_{\text{βαρ}} = 0$ στο έδαφος.

σχήμα 5



$$K_{\text{συστ},APX} + U_{\text{συστ},APX} = K_{\text{συστ},TEA} + U_{\text{συστ},TEA} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}(m+M)v_k^2 + mgh \Leftrightarrow$$

$$90 = 7,5 + 50h \Leftrightarrow$$

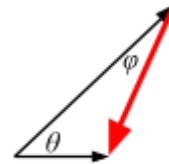
$$h = 1,65m$$

ε) Τα μέτρα αρχικής και τελικής ορμής του σφαιριδίου είναι:

$$p_{I,APX} = mv = 30 \text{ kgm/s}$$

$$p_{I,TEA} = mv_k = 5 \text{ kgm/s}$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα 6, η μεταβολή της ορμής του σφαιριδίου έχει μέτρο



σχήμα 6

$$|\Delta p_I| = \sqrt{p_{I,APX}^2 + p_{I,TEA}^2 - 2p_{I,APX}p_{I,TEA}\cos\theta} \Leftrightarrow$$

$$|\Delta p_I| = \sqrt{900 + 25 - 2 \cdot 30 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}} \Leftrightarrow |\Delta p_I| = \sqrt{775} \Leftrightarrow$$

$$|\Delta p_I| = 5\sqrt{31} \text{ kgm/s}$$

Η γωνία φ , που σχηματίζει το διάνυσμα Δp_I με τη διεύθυνση του διανύσματος $p_{I,APX}$, βρίσκεται με το νόμο των ημιτόνων:

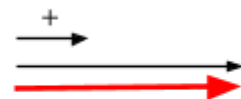
$$\frac{\eta\mu\varphi}{p_{I,TEA}} = \frac{\eta\mu\theta}{\Delta p_I} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu\varphi}{5} = \frac{0,5\sqrt{3}}{5\sqrt{31}} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\varphi = 0,5\sqrt{\frac{3}{31}} \quad \text{ή} \quad \varphi \approx 9^\circ$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα 7, η μεταβολή της ορμής της σφήνας έχει μέτρο

$$|\Delta p_2| = p_{2,TEA} - p_{2,APX} = Mv_k = 10 \text{ kgm/s}$$

και διεύθυνση οριζόντια.



σχήμα 7

Οι μεταβολές της ορμής σφαιριδίου και σφήνας δεν προέκυψαν αντίθετες, αφού η ορμή του συστήματος διατηρείται μόνο κατά την οριζόντια διεύθυνση του άξονα x'x.

στ) Εφαρμόζουμε το γενικευμένο 2^ο Νόμο Newton για το σφαιρίδιο.

Στον άξονα x'x η μέση τιμή της συνισταμένης δύναμης είναι:

$$\Sigma \vec{F}_x = \frac{\Delta \vec{p}_{Ix}}{\Delta t} \Leftrightarrow -N_{Ix} \cdot \Delta t = \Delta p_{Ix} \Leftrightarrow -N_I \eta \mu \theta \cdot \Delta t = m v_{\kappa} - m v \sigma \nu \theta$$

$$\Leftrightarrow -N_I 0,5\sqrt{3} \cdot \Delta t = 5 - 15 \Leftrightarrow N_I = \frac{10}{0,5\sqrt{3} \cdot \Delta t} \Leftrightarrow N_I = \frac{20\sqrt{3}}{3 \cdot \Delta t} \quad (2)$$

Στον άξονα $\psi\psi$ η μέση τιμή της συνισταμένης δύναμης είναι:

$$\Sigma \vec{F}_{\psi} = \frac{\Delta \vec{p}_{I\psi}}{\Delta t} \Leftrightarrow (N_{I\psi} - B_I) \cdot \Delta t = \Delta p_{I\psi} \Leftrightarrow (N_I \sigma \nu \theta - mg) \cdot \Delta t = 0 - m \eta \mu \theta$$

$$\Leftrightarrow (0,5N_I - 50) \cdot \Delta t = -15\sqrt{3} \xrightarrow{(2)} 0,5 \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3 \cdot \Delta t} \cdot \Delta t - 50 \cdot \Delta t = -15\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 50 \cdot \Delta t = 15\sqrt{3} + 10 \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 150 \cdot \Delta t = 45\sqrt{3} + 10\sqrt{3} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{55\sqrt{3}}{150} \Leftrightarrow$$

$$\Delta t = \frac{11\sqrt{3}}{30} \Leftrightarrow$$

$$\Delta t = 0,37\sqrt{3} \text{ s}$$

$$N_I = \frac{10\sqrt{3}}{\Delta t} \Leftrightarrow N_I = \frac{10\sqrt{3}}{11\sqrt{3}} \cdot 30 \Leftrightarrow$$

Η σχέση (2) δίνει

$$N_I = \frac{300}{11} \approx 27,3 \text{ N}$$

Αυτή είναι η μέση τιμή της $\vec{N}_I$, αλλά – όπως φαίνεται και στην προσομοίωση στα σχόλια – το μέτρο της μένει σταθερό κατά τη διάρκεια του φαινομένου.

Σχόλια

α) Το φαινόμενο θυμίζει κρούση, αλλά δεν είναι, αφού οι ωθήσεις των εξωτερικών δυνάμεων

$\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{N}_2$ δεν είναι αμελητέες, δεδομένου ότι

- Τα μέτρα τους είναι συγκρίσιμα με των εσωτερικών δυνάμεων
π.χ. $B_I = 50 \text{ N}, N_I = 25 \text{ N} = B_I/2$
- ο χρόνος δράσης των εξωτερικών δυνάμεων δεν είναι αμελητέος.

β) Ο φορέας της $\vec{N}_2$, όπως φαίνεται στα σχήματα 1 και 2, αλλάζει θέση ως προς το φορέα

του βάρους $\vec{B}_2$, ανάλογα με τη θέση της σφαίρας, ώστε να εξασφαλίζεται και η στροφική ισορροπία της σφήνας, κάτι με το οποίο θα ασχοληθούμε στο κεφάλαιο του Στερεού.

γ) Μια προσομοίωση του φαινομένου σε Interactive Physics:

[Το σφαιρίδιο σκαρφαλώνει μια σφήνα](#)

Ανδρέας Ριζόπουλος