Câu 47. **[2D2-5.2-4]** **(THTT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $10m \in \mathbb{Z}$ và phương trình $2\log_{mx-5}\left(2x^2-5x+4\right)=\log_{\sqrt{mx-5}}\left(x^2+2x-6\right)$ có nghiệm duy nhất. Tìm số phần tử của S.

A. 15. **B.** 14. **C.** 13. **D.** 16.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $2x^2-5x+4>0$ với mọi x nên phương trình $2\log_{mx-5}\left(2x^2-5x+4\right)=\log_{\sqrt{mx-5}}\left(x^2+2x-6\right)$ tương đương với

$$\begin{cases} mx-5>0 \\ mx-5\neq 1 \\ 2x^2-5x+4>0 \\ 2x^2-5x+4=x^2+2x-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx>5 \\ mx\neq 6 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=5 \end{array}\right. \end{cases}$$

Phương trình có nghiệm duy nhất tương đương với ta nhận nghiệm $x=2$ và loại $x=5$ hoặc nhận nghiệm $x=5$ và loại $x=2$.

+ Trường hợp 1: Nhận nghiệm $x=2$ và loại $x=5$.

Điều này tương đương với $\begin{cases} 2m>5 \\ 2m\neq 6 \\ \left[\begin{array}{l} 5m\leq 5 \\ 5m=6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{5}{2} \\ m\neq 3 \\ \left[\begin{array}{l} m\leq 1 \\ m=\dfrac{6}{5} \end{array}\right. \end{cases}$ (vô lí).

+ Trường hợp 2: Nhận nghiệm $x=5$ và loại $x=2$.

Điều này tương đương với $\begin{cases} 5m>5 \\ 5m\neq 6 \\ \left[\begin{array}{l} 2m\leq 5 \\ 2m=6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ m\neq \dfrac{6}{5} \\ \left[\begin{array}{l} m\leq \dfrac{5}{2} \\ m=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ \begin{cases} 1<m\leq \dfrac{5}{2} \\ m\neq \dfrac{6}{5} \end{cases} \end{array}\right.$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} 10m=30 \\ \begin{cases} 10<10m\leq 25 \\ m\neq 12 \end{cases} \end{array}\right.$.

Vì $10m\in\mathbb{Z}$ nên $10m\in\{11;13;14...;25\}\cup\{30\}$.

Trong tập hợp này có 15 phần tử nên tập hợp S cũng có 15 phần tử.

Chú ý: $m \in \left\{\frac{11}{10};\frac{13}{10};\frac{14}{10}...;\frac{25}{10}\right\} \cup \left\{\frac{30}{10}\right\}$.

Câu 45: **[2D2-5.2-4]** **(THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa năm 2017-2018)** Cho bất phương trình $m.3^{x+1}+(3m+2).\left(4-\sqrt{7}\right)^x+\left(4+\sqrt{7}\right)^x>0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;0]$.

A. $m>\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $m>\frac{2+2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $m\ge\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $m\ge-\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $m.3^{x+1}+(3m+2).\left(4-\sqrt{7}\right)^x+\left(4+\sqrt{7}\right)^x>0$

$\Leftrightarrow\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x+(3m+2)\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x+3m>0$. Đặt $t=\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x$, do $x\le 0$ nên $0<t\le 1$.

Tìm tham số m sao cho $t^2+3mt+3m+2>0$, đúng với mọi $0<t\le 1$.

$m>\frac{-t^2-2}{3t+3}\Leftrightarrow m>\max\limits_{(0;1]}\frac{-t^2-2}{3t+3}$. Ta tìm GTLN của hàm số $f(t)=-\frac{t^2+2}{3t+2}$ trên $0<t\le 1$.

Ta có $f'(t)=-\frac{1}{3}.\frac{t^2+2t-2}{(t+1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1-\sqrt{3}\\t=-1+\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên ta được

t	0		$-1+\sqrt{3}$		1
$f'(t)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\frac{2}{3}$	↗	$\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$	↘	$-\frac{1}{2}$

Vậy $\max\limits_{(0;1]}\frac{-t^2-2}{3t+3}=f\left(-1+\sqrt{3}\right)=\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 43: **[2D2-5.2-4]** **(THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai – Lần 2 năm 2017 – 2018)** Tìm bộ ba số nguyên dương $(a;b;c)$ thỏa mãn $\log 1+\log(1+3)+\log(1+3+5)+...+\log(1+3+5+...+19)-2\log 5040=a+b\log 2+c\log 3$

A. $(2;6;4)$. **B.** $(1;3;2)$. **C.** $(2;4;4)$. **D.** $(2;4;3)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có

$\log 1+\log(1+3)+\log(1+3+5)+...+\log(1+3+5+...+19)-2\log 5040=a+b\log 2+c\log 3$

$\Leftrightarrow\log 1+\log 2^2+\log 3^2+...+\log 10^2-2\log 5040=a+b\log 2+c\log 3$

$\Leftrightarrow\log\left(1.2^2.3^2.10^2\right)-2\log 5040=a+b\log 2+c\log 3$

$\Leftrightarrow \log(1.2.3.10)^2 - 2\log 5040 = a + b\log 2 + c\log 3$

$\Leftrightarrow 2\log(1.2.3.10) - 2\log 5040 = a + b\log 2 + c\log 3$

$\Leftrightarrow 2(\log 10! - \log 7!) = a + b\log 2 + c\log 3 \Leftrightarrow 2\log(8.9.10) = a + b\log 2 + c\log 3$

$\Leftrightarrow 2 + 6\log 2 + 4\log 3 = a + b\log 2 + c\log 3$.

Vậy $a = 2$, $b = 6$, $c = 4$.

Câu 41: **[2D2-5.2-4]** **(CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH -LẦN 1-2018)** Giả sử a, b là các số thực sao cho $x^3 + y^3 = a.10^{3x} + b.10^{2x}$ đúng với mọi các số thực dương x, y, z thoả mãn $\log(x+y) = z$ và $\log(x^2 + y^2) = z + 1$. Giá trị của $a + b$ bằng?

A. $\frac{31}{2}$. **B.** $\frac{29}{2}$. **C.** $-\frac{31}{2}$. **D.** $-\frac{25}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\begin{cases} \log(x+y) = z \\ \log(x^2+y^2) = z+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10^z \\ x^2 + y^2 = 10.10^z \end{cases} \Rightarrow xy = \frac{10^{2z} - 10.10^z}{2}$.

Khi đó $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 + y^2 - xy) = 10^z\left(10.10^z - \frac{10^{2z} - 10.10^z}{2}\right)$, suy ra

$x^3 + y^3 = 15.10^{2z} - \frac{1}{2}.10^{3z}$. Vậy $a = 15,\ b = -\frac{1}{2} \Rightarrow a + b = \frac{29}{2}$.