

Câu 47. [2D2-5.2-4] (THTT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $10m \in \mathbb{N}$ và phương trình $2\log_{mx-5}(2x^2 - 5x + 4) = \log_{\sqrt{mx-5}}(x^2 + 2x - 6)$ có nghiệm duy nhất. Tìm số phần tử của S .

A. 15.

B. 14.

C. 13.

D. 16.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $2x^2 - 5x + 4 > 0$ với mọi x nên phương trình

$2\log_{mx-5}(2x^2 - 5x + 4) = \log_{\sqrt{mx-5}}(x^2 + 2x - 6)$ tương đương với

$$\begin{cases} mx - 5 > 0 \\ mx - 5 \neq 1 \\ 2x^2 - 5x + 4 > 0 \\ 2x^2 - 5x + 4 = x^2 + 2x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx > 5 \\ mx \neq 6 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \end{cases}$$

Phương trình có nghiệm duy nhất tương đương với ta nhận nghiệm $x = 2$ và loại $x = 5$ hoặc nhận nghiệm $x = 5$ và loại $x = 2$.

+ Trường hợp 1: Nhận nghiệm $x = 2$ và loại $x = 5$.

$$\begin{cases} 2m > 5 \\ 2m \neq 6 \\ \begin{cases} 5m \leq 5 \\ 5m = 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{5}{2} \\ m \neq 3 \\ \begin{cases} m \leq 1 \\ m = \frac{6}{5} \end{cases} \end{cases} \text{ (vô lí).}$$

Điều này tương đương với

+ Trường hợp 2: Nhận nghiệm $x = 5$ và loại $x = 2$.

$$\begin{cases} 5m > 5 \\ 5m \neq 6 \\ \begin{cases} 2m \leq 5 \\ 2m = 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq \frac{6}{5} \\ \begin{cases} m \leq \frac{5}{2} \\ m = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ 1 < m \leq \frac{5}{2} \\ m \neq \frac{6}{5} \end{cases}$$

Điều này tương đương với

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} 10m = 30 \\ 10 < 10m \leq 25 \\ m \neq 12 \end{cases}$$

Vì $10m \in \mathbb{N}$ nên $10m \in \{11; 13; 14; \dots; 25\} \cup \{30\}$.

Trong tập hợp này có 15 phần tử nên tập hợp S cũng có 15 phần tử.

Chú ý: $m \in \left\{ \frac{11}{10}; \frac{13}{10}; \frac{14}{10}; \dots; \frac{25}{10} \right\} \cup \left\{ \frac{30}{10} \right\}$.

Câu 45: [2D2-5.2-4] (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa năm 2017-2018) Cho bất phương trình

$$m \cdot 3^{x+1} + (3m+2) \cdot (4-\sqrt{7})^x + (4+\sqrt{7})^x > 0, \text{ với } m \text{ là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số } m \text{ để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi } x \in (-\infty; 0].$$

A. $m > \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$

B. $m > \frac{2+2\sqrt{3}}{3}$

C. $m \geq \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$

D. $m \geq -\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $m \cdot 3^{x+1} + (3m+2) \cdot (4-\sqrt{7})^x + (4+\sqrt{7})^x > 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3} \right)^x + (3m+2) \left(\frac{4-\sqrt{7}}{3} \right)^x + 3m > 0 \quad t = \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3} \right)^x$$

Đặt $t = \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3} \right)^x$, do $x \leq 0$ nên $0 < t \leq 1$.

Tìm tham số m sao cho $t^2 + 3mt + 3m + 2 > 0$, đúng với mọi $0 < t \leq 1$.

$$m > \frac{-t^2 - 2}{3t + 3} \Leftrightarrow m > \max_{(0;1]} \frac{-t^2 - 2}{3t + 3}. \text{ Ta tìm GTLN của hàm số } f(t) = -\frac{t^2 + 2}{3t + 2} \text{ trên } 0 < t \leq 1.$$

$$f'(t) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{t^2 + 2t - 2}{(t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 - \sqrt{3} \\ t = -1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Ta có

Lập bảng biến thiên ta được

t	0	$-1 + \sqrt{3}$	1
$f'(t)$	+	0	-
f	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{1}{2}$

Vậy $\max_{(0;1]} \frac{-t^2 - 2}{3t + 3} = f(-1 + \sqrt{3}) = \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 43: [2D2-5.2-4] (THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Tìm bộ

ba số nguyên dương $(a; b; c)$ thỏa mãn

$$\log 1 + \log(1+3) + \log(1+3+5) + \dots + \log(1+3+5 + \dots + 19) - 2 \log 5040 = a + b \log 2 + c \log 3$$

A. (2; 6; 4)

B. (1; 3; 2)

C. (2; 4; 4)

D. (2; 4; 3)

Lời giải

Chọn A.

Ta có

$$\log 1 + \log(1+3) + \log(1+3+5) + \dots + \log(1+3+5 + \dots + 19) - 2 \log 5040 = a + b \log 2 + c \log 3$$

$$\Leftrightarrow \log 1 + \log 2^2 + \log 3^2 + \dots + \log 10^2 - 2 \log 5040 = a + b \log 2 + c \log 3$$

$$\Leftrightarrow \log(1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 10^2) - 2 \log 5040 = a + b \log 2 + c \log 3$$

$$\Leftrightarrow \log(1.2.3.10)^2 - 2\log 5040 = a + b\log 2 + c\log 3$$

$$\Leftrightarrow 2\log(1.2.3.10) - 2\log 5040 = a + b\log 2 + c\log 3$$

$$\Leftrightarrow 2(\log 10! - \log 7!) = a + b\log 2 + c\log 3 \Leftrightarrow 2\log(8.9.10) = a + b\log 2 + c\log 3$$

$$\Leftrightarrow 2 + 6\log 2 + 4\log 3 = a + b\log 2 + c\log 3$$

Vậy $a = 2$, $b = 6$, $c = 4$.

Câu 41: [2D2-5.2-4] (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH - LẦN 1-2018) Giả sử a, b là các số thực sao cho $x^3 + y^3 = a.10^{3x} + b.10^{2x}$ đúng với mọi các số thực dương x, y, z thoả mãn $\log(x+y) = z$ và $\log(x^2 + y^2) = z+1$. Giá trị của $a+b$ bằng?

A. $\frac{31}{2}$.

B. $\frac{29}{2}$.

C. $-\frac{31}{2}$.

D. $-\frac{25}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \log(x+y) = z \\ \log(x^2 + y^2) = z+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 10^z \\ x^2 + y^2 = 10.10^z \end{cases} \Rightarrow xy = \frac{10^{2z} - 10.10^z}{2}$$

$$\text{Khi đó } x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 + y^2 - xy) = 10^z \left(10.10^z - \frac{10^{2z} - 10.10^z}{2} \right), \text{ suy ra}$$

$$x^3 + y^3 = 15.10^{2z} - \frac{1}{2}.10^{3z}. \text{ Vậy } a = 15, b = -\frac{1}{2} \Rightarrow a+b = \frac{29}{2}.$$