Câu 35: **[2D3-1.2-3]** **(THPT Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\tan^5 x$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\tan^4 x+\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\tan^4 x+\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$I=\int f(x)\mathrm{d}x=\int \tan^5 x\mathrm{d}x=\int\frac{\sin^5 x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\sin^2 x.\sin^2.\sin x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x=\int\frac{(1-\cos^2 x).(1-\cos^2 x).\sin x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x$$

Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$ $\quad I=\int\frac{(1-t^2).(1-t^2)}{t^5}(-\mathrm{d}t)=\int\frac{1-2t^2+t^4}{t^5}(-\mathrm{d}t)$

$$=\int\left(-\frac{1}{t^5}+\frac{2}{t^3}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\int\left(-t^{-5}+2t^{-3}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}t^{-4}-t^{-2}-\ln|t|+C$$

$$=\frac{1}{4}\cos x^{-4}-\cos x^{-2}-\ln|\cos x|+C=\frac{1}{4}.\frac{1}{\cos x^4}-\frac{1}{\cos x^2}-\ln|\cos x|+C$$

$$=\frac{1}{4}.(\tan^2 x+1)^2-(\tan^2 x+1)-\ln|\cos x|+C$$

$$=\frac{1}{4}(\tan^4 x+2\tan^2 x+1)-(\tan^2 x+1)-\ln|\cos x|+C$$

$$=\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|+\frac{1}{4}+C$$

$$=\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|+C.$$

Câu 37: **[2D3-1.2-3]** **(THPT Chuyên Quốc Học-Huế năm 2017-2018)** Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x)=\frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}}$ thỏa mãn $F(1)=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của $F(x)$.

A. $m=-\frac{1}{2}$. **B.** $m=\frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$. **C.** $m=\frac{1+2^{2017}}{2^{2018}}$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\int f(x)dx=\int\frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}}dx=\frac{2017}{2}\int(x^2+1)^{-2018}d(x^2+1)=\frac{2017}{2}.\frac{(x^2+1)^{-2017}}{-2017}+C$

$=-\frac{1}{2(x^2+1)^{2017}}+C=F(x)$

Mà $F(1)=0\Rightarrow-\frac{1}{2.2^{2017}}+C=0\Rightarrow C=\frac{1}{2^{2018}}$

Do đó $F(x)=-\frac{1}{2.(x^2+1)^{2017}}+\frac{1}{2^{2018}}$ suy ra

$F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{1}{2(x^2+1)^{2017}}$ lớn nhất $\Leftrightarrow(x^2+1)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x=0$

Vậy $m=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2018}}=\frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$.

Câu 29. **[2D3-1.2-3]** **(THPT Chuyên Hạ Long-Quãng Ninh lần 2 năm 2017-2018)** Biết rằng trên khoảng $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$, hàm số $f(x)=\frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ có một nguyên hàm $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-3}$ (a, b, c là các số nguyên). Tổng $S=a+b+c$ bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t=\sqrt{2x-3}\Rightarrow t^2=2x-3\Rightarrow dx=tdt$

Khi đó $\int\frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}dx=\int\frac{20\left(\frac{t^2+3}{2}\right)^2-30\left(\frac{t^2+3}{2}\right)+7}{t}tdt=\int(5t^4+15t^2+7)dt$

$=t^5+5t^3+7t+C=\sqrt{(2x-3)^5}+5\sqrt{(2x-3)^3}+7\sqrt{2x-3}+C$

$=(2x-3)^2\sqrt{2x-3}+5(2x-3)\sqrt{2x-3}+7\sqrt{2x-3}+C=(4x^2-2x+1)\sqrt{2x-3}+C$

Vậy $F(x)=(4x^2-2x+1)\sqrt{2x-3}$. Suy ra $S=a+b+c=3$.

Câu 37: **[2D3-1.2-3] (CHUYÊN HẠ LONG-LẦN 2-2018)** Biết rằng trên khoảng $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$, hàm số $f(x)=\frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ có một nguyên hàm $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-3}$ (a,b,c là các số nguyên). Tổng $S=a+b+c$ bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $t=\sqrt{2x-3}\Rightarrow t^2=2x-3\Rightarrow \mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$

Khi đó $\int\frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}\mathrm{d}x=\int\frac{20\left(\frac{t^2+3}{2}\right)^2-30\left(\frac{t^2+3}{2}\right)+7}{t}t\mathrm{d}t=\int(5t^4+15t^2+7)\mathrm{d}t$

$=t^5+5t^3+7t+C=\sqrt{(2x-3)^5}+5\sqrt{(2x-3)^3}+7\sqrt{2x-3}+C$

$=(2x-3)^2\sqrt{2x-3}+5(2x-3)\sqrt{2x-3}+7\sqrt{2x-3}+C=(4x^2-2x+1)\sqrt{2x-3}+C$

Vậy $F(x)=(4x^2-2x+1)\sqrt{2x-3}$. Suy ra $S=a+b+c=3$.

Câu 46: **[2D3-1.2-3] (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU-2018)** Hàm số $f(x)=\frac{7\cos x-4\sin x}{\cos x+\sin x}$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{8}$. Giá trị $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng?

A. $\frac{3\pi-11\ln 2}{4}$. **B.** $\frac{3\pi}{4}$. **C.** $\frac{3\pi}{8}$. **D.** $\frac{3\pi-\ln 2}{4}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f(x)=\frac{\frac{3}{2}(\sin x+\cos x)+\frac{11}{2}(-\sin x+\cos x)}{\cos x+\sin x}=\frac{3}{2}+\frac{11}{2}.\frac{-\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}$

$\Rightarrow F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{3}{2}+\frac{11}{2}.\frac{-\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}x+\int\frac{11}{2}.\frac{-\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$

$=\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}\int\frac{1}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}(\cos x+\sin x)=\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}\ln|\cos x+\sin x|+C$.

Bài ra $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{8}\Rightarrow\frac{3\pi}{8}+\frac{11}{2}\ln\sqrt{2}+C=\frac{3\pi}{8}\Rightarrow C=-\frac{11}{4}\ln 2$

Do đó $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}+C=\frac{3\pi}{4}-\frac{11}{4}\ln 2$.

Câu 44: **[2D3-1.2-3] (THPT LÊ QUÝ ĐÔN HẢI PHÒNG-2018)** Cho $\int\left(\frac{ax+b+ce^x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=9\sqrt{x^2+1}+2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+5e^x+C$. Tính giá trị biểu thức $M=a+b+c$.

A. 6. **B.** 20. **C.** 16. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\left[9\sqrt{x^2+1}+2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+5e^x\right]'=\frac{9x}{\sqrt{x^2+1}}+2\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}+5e^x$

$=\frac{9x+2+5e^x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$.

Do đó $a=9$, $b=2$, $c=5$. Suy ra $M=a+b+c=16$.

Câu 40. **[2D3-1.2-3] [Mã đề 105 – THQG 2018]** Cho hàm số $f'(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{25}$ và $f'(x)=4x^3.\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng?

A. $\frac{-41}{100}$. **B.** $\frac{-1}{10}$. **C.** $\frac{-391}{400}$. **D.** $\frac{-1}{40}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=4x^3.\left[f(x)\right]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=4x^3$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta có $\int\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}dx=\int 4x^3dx \Leftrightarrow \frac{f^{-1}(x)}{-1}=x^4+C$.

Thay $x=2$ vào hai vế ta có: $\frac{-1}{\frac{-1}{25}}=16+C\Leftrightarrow C=9$.

Vậy $-\frac{1}{f(x)}=x^4+9$, do đó $-\frac{1}{f(1)}=1+9=10\Leftrightarrow f(1)=-\frac{1}{10}$.