

Câu 35: [2D3-1.2-3] (THPT Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Tìm họ nguyên

hàm của hàm số $f(x) = \tan^5 x$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C$

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C$

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$I = \int f(x) dx = \int \tan^5 x dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx$$

$$= \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x) \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x}{\cos^5 x} dx$$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$ $I = \int \frac{(1 - t^2) \cdot (1 - t^2)}{t^5} (-dt) = \int \frac{1 - 2t^2 + t^4}{t^5} (-dt)$

$$= \int \left(-\frac{1}{t^5} + \frac{2}{t^3} - \frac{1}{t} \right) dt = \int \left(-t^{-5} + 2t^{-3} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{4} t^{-4} - t^{-2} - \ln |t| + C$$

$$= \frac{1}{4} \cos x^{-4} - \cos x^{-2} - \ln |\cos x| + C = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cos x^4} - \frac{1}{\cos x^2} - \ln |\cos x| + C$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (\tan^2 x + 1)^2 - (\tan^2 x + 1) - \ln |\cos x| + C$$

$$= \frac{1}{4} (\tan^4 x + 2 \tan^2 x + 1) - (\tan^2 x + 1) - \ln |\cos x| + C$$

$$= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + \frac{1}{4} + C$$

$$= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C$$

Câu 37: [2D3-1.2-3] (THPT Chuyên Quốc Học-Huế năm 2017-2018) Biết rằng $F(x)$ là một

nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x) = \frac{2017x}{(x^2 + 1)^{2018}}$ thỏa mãn $F(1) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của $F(x)$.

A. $m = -\frac{1}{2}$.

B. $m = \frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$.

C. $m = \frac{1+2^{2017}}{2^{2018}}$.

D. $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có
$$\int f(x) dx = \int \frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}} dx = \frac{2017}{2} \int (x^2+1)^{-2018} d(x^2+1) = \frac{2017}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{-2017}}{-2017} + C$$
$$= -\frac{1}{2(x^2+1)^{2017}} + C = F(x)$$

Mà $F(1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2 \cdot 2^{2017}} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2^{2018}}$

Do đó
$$F(x) = -\frac{1}{2(x^2+1)^{2017}} + \frac{1}{2^{2018}}$$
 suy ra

$F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{1}{2(x^2+1)^{2017}}$ lớn nhất $\Leftrightarrow (x^2+1)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = 0$

Vậy $m = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2018}} = \frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$.

Câu 29. [2D3-1.2-3] (THPT Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh lần 2 năm 2017-2018) Biết rằng trên

khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$ có một nguyên hàm $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$ (a, b, c là các số nguyên). Tổng $S = a + b + c$ bằng

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t = \sqrt{2x-3} \Rightarrow t^2 = 2x-3 \Rightarrow dx = t dt$

Khi đó
$$\int \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}} dx = \int \frac{20\left(\frac{t^2+3}{2}\right)^2 - 30\left(\frac{t^2+3}{2}\right) + 7}{t} t dt = \int (5t^4 + 15t^2 + 7) dt$$

$$= t^5 + 5t^3 + 7t + C = \sqrt{(2x-3)^5} + 5\sqrt{(2x-3)^3} + 7\sqrt{2x-3} + C$$

$$= (2x-3)^2 \sqrt{2x-3} + 5(2x-3)\sqrt{2x-3} + 7\sqrt{2x-3} + C = (4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3} + C$$

Vậy $F(x) = (4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3}$. Suy ra $S = a + b + c = 3$.

Câu 37: [2D3-1.2-3] (CHUYÊN HẠ LONG-LẦN 2-2018) Biết rằng trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$ có một nguyên hàm $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$ (a, b, c là các số nguyên). Tổng $S = a + b + c$ bằng

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $t = \sqrt{2x-3} \Rightarrow t^2 = 2x-3 \Rightarrow dx = t dt$

$$\text{Khi đó } \int \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}} dx = \int \frac{20\left(\frac{t^2+3}{2}\right)^2 - 30\left(\frac{t^2+3}{2}\right) + 7}{t} t dt = \int (5t^4 + 15t^2 + 7) dt$$

$$= t^5 + 5t^3 + 7t + C = \sqrt{(2x-3)^5} + 5\sqrt{(2x-3)^3} + 7\sqrt{2x-3} + C$$

$$= (2x-3)^2 \sqrt{2x-3} + 5(2x-3)\sqrt{2x-3} + 7\sqrt{2x-3} + C = (4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3} + C$$

Vậy $F(x) = (4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3}$. Suy ra $S = a + b + c = 3$.

Câu 46: [2D3-1.2-3] (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU-2018) Hàm số $f(x) = \frac{7\cos x - 4\sin x}{\cos x + \sin x}$ có một nguyên hàm

$F(x)$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{8}$. Giá trị $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng?

A. $\frac{3\pi - 11\ln 2}{4}$.

B. $\frac{3\pi}{4}$.

C. $\frac{3\pi}{8}$.

D. $\frac{3\pi - \ln 2}{4}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{\frac{3}{2}(\sin x + \cos x) + \frac{11}{2}(-\sin x + \cos x)}{\cos x + \sin x} = \frac{3}{2} + \frac{11}{2} \cdot \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}$$

$$\Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int \left(\frac{3}{2} + \frac{11}{2} \cdot \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x} \right) dx = \frac{3}{2}x + \int \frac{11}{2} \cdot \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$= \frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \int \frac{1}{\cos x + \sin x} d(\cos x + \sin x) = \frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \ln |\cos x + \sin x| + C$$

$$\text{Bài ra } F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow \frac{3\pi}{8} + \frac{11}{2} \ln \sqrt{2} + C = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow C = -\frac{11}{4} \ln 2$$

$$\text{Do đó } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} + C = \frac{3\pi}{4} - \frac{11}{4} \ln 2$$

Câu 44: [2D3-1.2-3] (THPT LÊ QUÝ ĐÔN HẢI PHÒNG-2018) Cho

$$\int \left(\frac{ax+b+ce^x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx = 9\sqrt{x^2+1} + 2\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + 5e^x + C$$

. Tính giá trị biểu thức

$$M = a + b + c$$

A. 6 .

B. 20 .

C. 16 .

D. 10 .

Lời giải

Chọn C.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \left[9\sqrt{x^2+1} + 2\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + 5e^x \right]' &= \frac{9x}{\sqrt{x^2+1}} + 2 \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} + 5e^x \\ &= \frac{9x+2+5e^x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

Do đó $a=9$, $b=2$, $c=5$. Suy ra $M = a + b + c = 16$.

Câu 40. [2D3-1.2-3] [Mã đề 105 – THQG 2018] Cho hàm số $f'(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$ và

$f'(x) = 4x^3 \cdot [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng?

A. $-\frac{41}{100}$.

B. $-\frac{1}{10}$.

C. $-\frac{391}{400}$.

D. $-\frac{1}{40}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f'(x) = 4x^3 \cdot [f(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 4x^3$$

$$\text{Lấy nguyên hàm hai vế ta có } \int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int 4x^3 dx \Leftrightarrow \frac{f^{-1}(x)}{-1} = x^4 + C$$

$$\frac{-1}{-1} = 16 + C \Leftrightarrow C = 9$$

Thay $x=2$ vào hai vế ta có:

$$\text{Vậy } -\frac{1}{f(x)} = x^4 + 9, \text{ do đó } -\frac{1}{f(1)} = 1 + 9 = 10 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{1}{10}$$