

1.- Un nutricionista receta a una de sus pacientes una dieta semanal especial basada en lácteos y pescado. Cada kg de lácteos cuesta 6 € y proporciona 3 unidades de proteínas y 1 de calorías; cada kg de pescado cuesta 12 €, aportando 1 unidad de proteínas y 2 de calorías. La dieta le exige no tomar más de 4 kg, conjuntamente, de lácteos y pescado, y un aporte mínimo de 4 unidades de proteínas y 3 de calorías. a) Plantee el problema para obtener la combinación de ambos alimentos que tenga el coste mínimo.

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de kg	aportación en proteínas (unidades)	aportación en calorías (unidades)	coste (en €)
lácteos	x	3x	1x	6x
pescado	y	1y	2y	12y
total	x + y	3x + y	x + 2y	6x + 12y

Las restricciones son $\{x + y \leq 4, 3x + y \geq 4, x + 2y \geq 3, x \geq 0, y \geq 0\}$. La función a optimizar (minimizar) es $f(x, y) = 6x + 12y$

b) Dibuje la región factible y determine la solución óptima del problema.

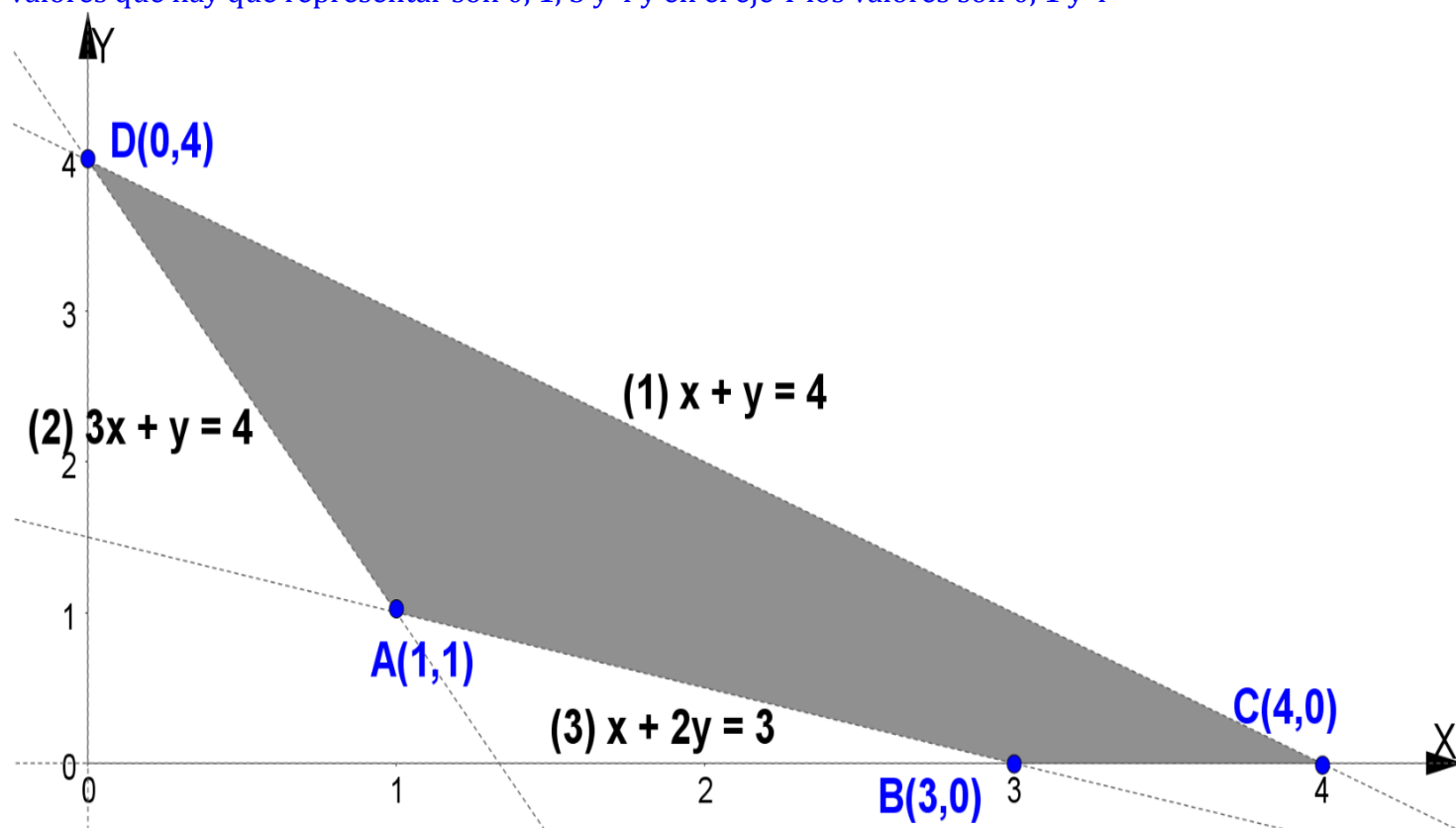
Resolución

Obtención de la región factible (resolvemos el sistema de inecuaciones):

$x + y \leq 4 \rightarrow$ Recta: $x + y = 4$ $x = 0, \quad 0 + y = 4, \quad y = 4$ $y = 0, \quad x + 0 = 4, \quad x = 4$ <table border="1"><tr><td>x</td><td>0</td><td>4</td></tr><tr><td>y</td><td>4</td><td>0</td></tr></table> $(0, 0) \rightarrow 0 + 0 \leq 4$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.	x	0	4	y	4	0	$3x + y \geq 4 \rightarrow$ Recta: $3x + y = 4$ $x = 0, \quad 3 \cdot 0 + y = 4, \quad y = 4$ $y = 1, \quad 3x + 1 = 4, \quad x = 1$ <table border="1"><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>y</td><td>4</td><td>1</td></tr></table> $(0, 0) \rightarrow 3 \cdot 0 + 0 \geq 4$ (falso). La solución es el semiplano cerrado que NO contiene al $(0, 0)$.	x	0	1	y	4	1
x	0	4											
y	4	0											
x	0	1											
y	4	1											

$x + 2y \geq 3 \rightarrow$ Recta: $x + 2y = 3$ $x = 1, \quad 1 + 2y = 3, \quad y = 1$ $y = 0, \quad x + 2 \cdot 0 = 3, \quad x = 3$ <table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>y</td><td>1</td><td>0</td></tr></table> $(0, 0) \rightarrow 0 + 2 \cdot 0 \geq 3$ (falso). La solución es el semiplano cerrado que NO contiene al $(0, 0)$.	x	1	3	y	1	0	$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y) $(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(1, 0)$. $y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X) $(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 1)$.
x	1	3					
y	1	0					

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 1, 3 y 4 y en el eje Y los valores son 0, 1 y 4



Obtención de los vértices:

$$\{x + 2y = 3 \quad ; \quad 3 \rightarrow 3x + y = 4 \quad (3x + 6y = 9 \quad 3x + y = 4; \text{ restando, } 5y = 5, \quad y = 1; \quad x + 2 \cdot 1 = 3, \quad x = 1 \rightarrow A(1, 1)$$

$$\{x + 2y = 3 \quad y = 0; \quad x + 2 \cdot 0 = 3, \quad x = 3 \rightarrow B(3, 0) \quad ;$$

$$\{x + y = 4 \quad y = 0; \quad x + 0 = 4, \quad x = 4 \rightarrow C(4, 0)$$

$$\{x + y = 4 \quad x = 0; \quad 0 + y = 4, \quad y = 4 \rightarrow D(0, 4)$$

Veamos en qué vértices alcanza el valor mínimo $f(x, y) = 6x + 12y$:

$$f(A) = f(1, 1) = 6 \cdot 1 + 12 \cdot 1 = 18 \quad \quad \quad f(B) = f(3, 0) = 6 \cdot 3 + 12 \cdot 0 = 18$$

$$f(C) = f(4, 0) = 6 \cdot 4 + 12 \cdot 0 = 24 \quad \quad f(D) = f(0, 4) = 6 \cdot 0 + 12 \cdot 4 = 48$$

El valor mínimo es 18 y se alcanza en el segmento cerrado AB.

La ecuación del segmento AB es $tA + (1 - t)B$, con $0 \leq t \leq 1$ sustituyendo

$$t(1, 1) + (1 - t)(3, 0) \rightarrow (3 - 2t, t).$$

Luego, el coste mínimo es 18 € y la combinación es $3 - 2t$ kg de lácteos y t kg de pescado con $0 \leq t \leq 1$.

2.- Represente gráficamente la región definida por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

$$x + 2y \leq 3, \quad x - y \leq 1, \quad x \geq -1, \quad y \geq 0$$

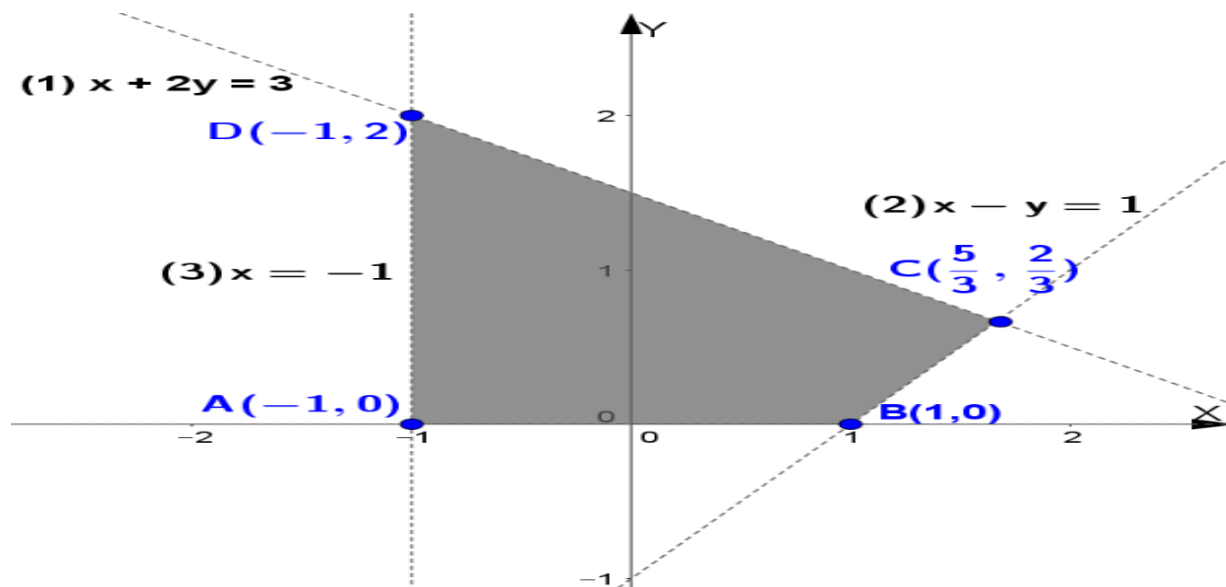
Calcule los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x, y) = 2x + 4y$ en la región anterior y los puntos donde se alcanzan.

Resolución

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$x + 2y \leq 3 \rightarrow \text{Recta: } x + 2y = 3$ $x = 1, \quad 1 + 2y = 3, \quad y = 1$ $y = 0, \quad x + 2 \cdot 0 = 3, \quad x = 3$ <table><tr><td>x</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>y</td><td>1</td><td>0</td></tr></table> $(0, 0) \rightarrow 0 + 2 \cdot 0 \leq 3$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.	x	1	3	y	1	0	$x - y \leq 1 \rightarrow \text{Recta: } x - y = 1$ $x = 0, \quad 0 - y = 1, \quad y = -1$ $y = 0, \quad x - 0 = 1, \quad x = 1$ <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>y</td><td>-1</td><td>0</td></tr></table> $(0, 0) \rightarrow 0 - 0 \leq 1$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.	x	0	1	y	-1	0
x	1	3											
y	1	0											
x	0	1											
y	-1	0											
$x \geq -1 \rightarrow \text{Recta: } x = -1, \text{ recta vertical que pasa por } (-1, 0)$ $(0, 0) \rightarrow 0 \geq -1$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.	$y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X) $(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 1)$.												

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 1 y 3 y en el eje Y los valores son -1, 0 y 1



Obtención de los vértices:

$$\{x - y = 1 \mid y = 0\}; \quad x - 0 = 1, \quad x = 1 \rightarrow B(1, 0)$$

$$\{x + 2y = 3 \mid x - y = 1; \text{ restando, } 3y = 2, \quad y = \frac{2}{3}; \quad x - \frac{2}{3} = 1, \quad x = \frac{5}{3} \rightarrow C\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\{x + 2y = 3 \mid x = -1; \quad -1 + 2y = 3, \quad y = 2 \rightarrow D(-1, 2)$$

Los puntos en los que alcanza los valores extremos la función $F(x, y) = 2x + 4y$ deben estar en los vértices del recinto:

$$F(A) = F(-1, 0) = 2(-1) + 4 \cdot 0 = -2$$

$$F(B) = F(1, 0) = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 2$$

$$F(C) = F\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \frac{5}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} = 6 \quad F(D) = F(-1, 2) = 2(-1) + 4 \cdot 2 = 6$$

Valor mínimo -2 y se alcanza en $A(1, 0)$ y el máximo es 6 y se alcanza en el segmento cerrado CD .

3.- Represente la región del plano determinada por las siguientes inecuaciones:

$$2x + 5y \leq 15, \quad x + y \leq 6, \quad 5x - 7y \leq 42, \quad x \geq 0$$

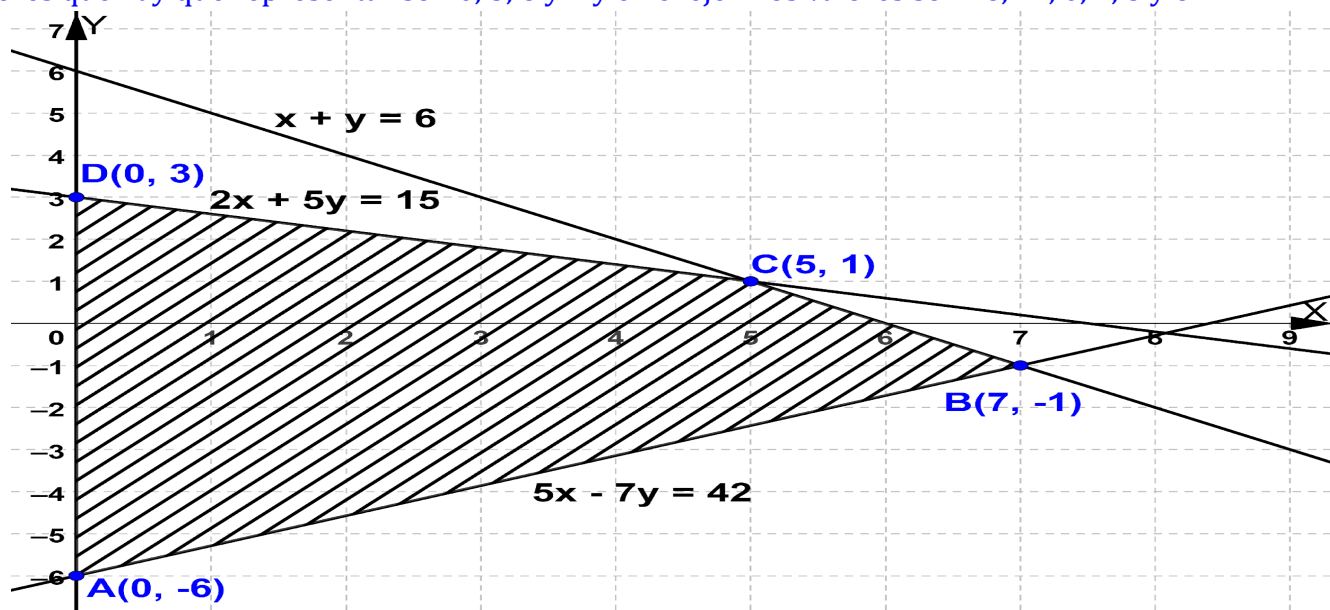
Halle los vértices de la región anterior. En esa región, halle el valor mínimo de la función $F(x, y) = -2x - 2y + 3$ y dónde lo alcanza.

Resolución

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$2x + 5y \leq 15 \rightarrow \text{Recta: } 2x + 5y = 15$ $x = 0, \quad 2 \cdot 0 + 5y = 15, \quad y = 3$ $y = 1, \quad 2x + 5 \cdot 1 = 15, \quad x = 5$ <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>3</td><td>1</td></tr></table> $(0, 0) \rightarrow 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \leq 15$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.	x	0	5	y	3	1	$x + y \leq 6 \rightarrow \text{Recta: } x + y = 6$ $x = 0, \quad 0 + y = 6, \quad y = 6$ $y = 0, \quad x + 0 = 6, \quad x = 6$ <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>6</td></tr><tr><td>y</td><td>6</td><td>0</td></tr></table> $(0, 0) \rightarrow 0 + 0 \leq 6$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.	x	0	6	y	6	0
x	0	5											
y	3	1											
x	0	6											
y	6	0											
$5x - 7y \leq 42 \rightarrow \text{Recta: } 5x - 7y = 42$ $x = 0, \quad 5 \cdot 0 - 7y = 42, \quad y = -6$ $y = -1, \quad 5x - 7(-1) = 42 \rightarrow 5x = 35, \quad x = 7$ <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>7</td></tr><tr><td>y</td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><td></td><td>6</td><td>1</td></tr></table> $(0, 0) \rightarrow 5 \cdot 0 - 7 \cdot 0 \leq 42$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.	x	0	7	y	-	-		6	1	$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y) $(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(1, 0)$.			
x	0	7											
y	-	-											
	6	1											

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 5, 6 y 7 y en el eje Y los valores son $-6, -1, 0, 1, 3$ y 6



Obtención de los vértices:

$$\{5x - 7y = 42 \mid x = 0, 5 \cdot 0 - 7y = 42, y = -6 \rightarrow A(0, -6) \}; \{2x + 5y = 15 \mid x = 0, 2 \cdot 0 + 5y = 15, y = 3 \rightarrow D(0, 3)$$

$$\{x + y = 6 \mid 5x - 7y = 42 \cdot 5 \mid 5x + 5y = 30 \mid 5x - 7y = 42 \text{ ; restando, } 12y = -12, y = -1 \mid x - 1 = 6, x = 7 \rightarrow B(7, -1)$$

$$\{x + y = 6 \mid 2x + 5y = 15 \cdot 2 \mid 2x + 2y = 12 \mid 2x + 5y = 15 \text{ ; restando, } 3y = 3, y = 1 \mid x + 1 = 6, x = 5 \rightarrow C(5, 1)$$

Los puntos en los que alcanza el valor mínimo la función $F(x, y) = -2x - 2y + 3$ deben estar entre los vértices de la región:

$$F(A) = F(0, -6) = -2 \cdot 0 - 2(-6) + 3 = 15$$

$$F(B) = F(7, -1) = -2 \cdot 7 - 2(-1) + 3 = -9$$

$$F(C) = F(5, 1) = -2 \cdot 5 - 2 \cdot 1 + 3 = -9$$

$$F(D) = F(0, 3) = -2 \cdot 0 - 2 \cdot 3 + 3 = -3$$

El mínimo absoluto de la función F en la región es -9 y se alcanza en segmento BC .

4.- (prueba ordinaria) Dadas las inecuaciones $y \leq x + 5$, $2x + y \geq -4$, $4x \leq 10 - y$, $y \geq 0$

a) Represente el recinto que limitan y calcule sus vértices.

Resolución

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$y \leq x + 5 \rightarrow \text{Recta: } y = x + 5$
 $x = 0, \quad y = 0 + 5, \quad y = 5$
 $y = 0, \quad 0 = x + 5, \quad x = -5$

x	0	-
		5
y	5	0

$(0, 0) \rightarrow 0 \leq 0 + 5$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.

$2x + y \geq -4 \rightarrow \text{Recta: } 2x + y = -4$
 $x = 0, \quad 2 \cdot 0 + y = -4, \quad y = -4$
 $y = 0, \quad 2x + 0 = -4, \quad x = -2$

x	0	-
		2
y	-	4
	4	0

$(0, 0) \rightarrow 2 \cdot 0 + 0 \geq -4$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.

$4x \leq 10 - y \rightarrow \text{Recta: } 4x = 10 - y$
 $x = 0, \quad 4 \cdot 0 = 10 - y, \quad y = 10$
 $y = 0, \quad 4x = 10 - 0, \quad x = 2,5$

x	0	2,
		5
y	1	0
	0	

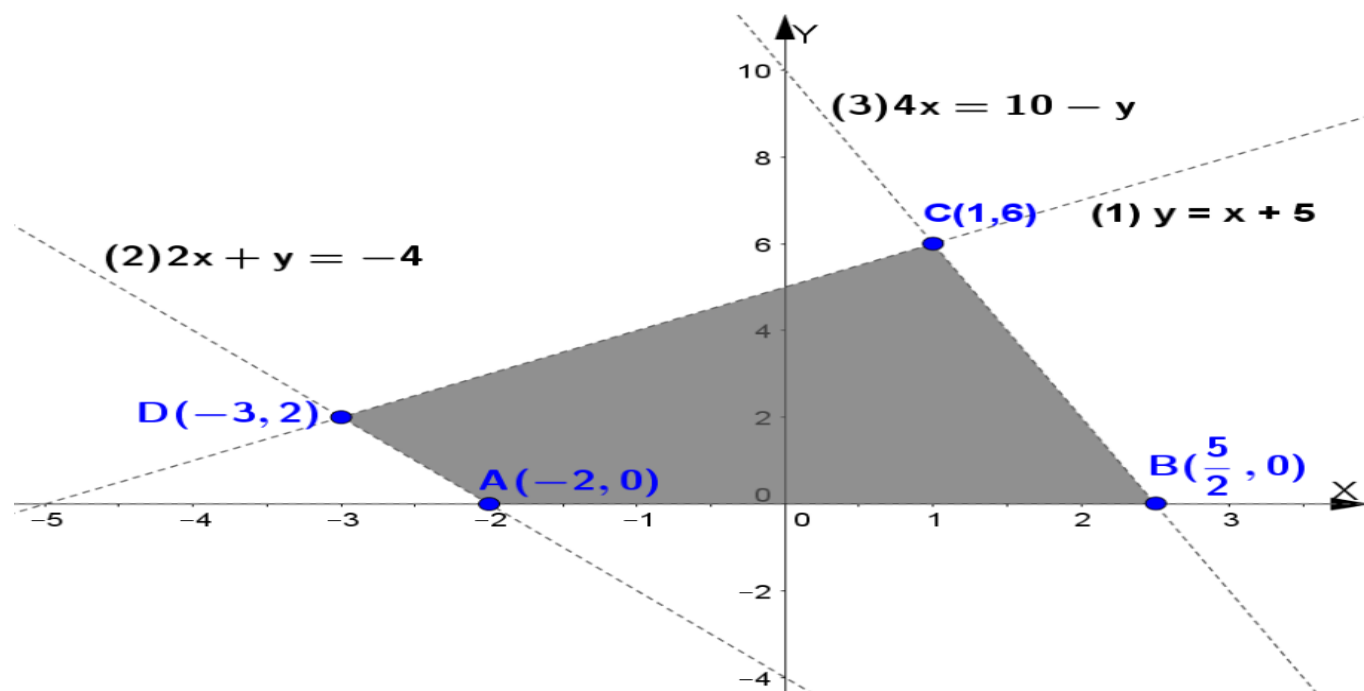
$(0, 0) \rightarrow 0 + 0 \leq 3$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.

$y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X)

$(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto).

La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 1)$.

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son $-5, -2, 0$ y $2,5$ y en el eje Y los valores son $-4, 0, 5$ y 10



Obtención de los vértices:

$$\{2x + y = -4; y = 0; 2x + 0 = -4, x = -2 \rightarrow A(-2, 0) \quad \{4x = 10 - y; y = 0; 4x = 10 - 0, x = \frac{5}{2} \rightarrow B\left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

$$\{4x = 10 - y; y = x + 5 \rightarrow \{4x + y = 10 - x + y = 5; \text{restando, } 5x = 5, x = 1; -1 + y = 5, y = 6 \rightarrow C(1, 6)$$

$$\{2x + y = -4; y = x + 5 \rightarrow \{2x + y = -4 - x + y = 5; \text{restando, } 3x = -9, x = -3; 3 + y = 5, y = 2 \rightarrow D(-3, 2)$$

b) Obtenga el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + \frac{1}{2}y$ en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanzan.

Resolución

Los puntos en los que alcanza los valores extremos la función f deben estar en los vértices del recinto:

$$f(A) = f(-2, 0) = -2 + \frac{1}{2} \cdot 0 = -2 \quad f(B) = f\left(\frac{5}{2}, 0\right) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$f(C) = f(1, 6) = 1 + \frac{1}{2} \cdot 6 = 4 \quad f(D) = f(-3, 2) = -3 + \frac{1}{2} \cdot 2 = -2$$

Valor máximo 4 y se alcanza en $C(1, 6)$ y el mínimo es -2 y se alcanza en el segmento cerrado AD.

5.- Si $A(0, 2)$, $B(2, 0)$, $C(4, 0)$, $D(6, 3)$ y $E(3, 6)$ son los vértices de una región factible, determine, en esa región, el valor mínimo y el valor máximo de la función $F(x, y) = 4x - 3y + 8$ e indique los puntos donde se alcanza.

Resolución

Los puntos en los que alcanza los valores extremos la función $F(x, y) = 4x - 3y + 8$ deben estar entre los vértices de la región:

$$F(A) = F(0, 2) = 4 \cdot 0 - 3 \cdot 2 + 8 = 2 \quad F(B) = F(2, 0) = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 8 = 16$$

$$F(C) = F(4, 0) = 4 \cdot 4 - 3 \cdot 0 + 8 = 24 \quad F(D) = F(6, 3) = 4 \cdot 6 - 3 \cdot 3 + 8 = 23$$

$$F(E) = F(3, 6) = 4 \cdot 3 - 3 \cdot 6 + 8 = 2$$

Valor máximo 24 y se alcanza en $C(4, 0)$ y el mínimo es 2 y se alcanza en el segmento cerrado AE.

6.- (prueba extraordinaria)

a) Plantee, sin resolver, el siguiente problema: "Un mayorista vende productos congelados que presenta en envases de dos tamaños, pequeños y grandes. La capacidad de sus congeladores no le permite

almacenar más de 1000 envases en total. En función de la demanda sabe que debe mantener un stock mínimo de 100 envases pequeños y 200 envases grandes. La demanda de envases grandes es igual o superior a la de envases pequeños. El coste por almacenaje es de 10 céntimos de euro por cada envase pequeño y de 20 céntimos de euro por cada envase grande. ¿Qué número de envases de cada tipo proporciona el mínimo coste de almacenaje?"

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de kg	coste de almacenaje (en €)
envases pequeños	x	0,1x
envases grandes	y	0,2y
total	x + y	0,1x + 0,2y

Las restricciones son

$\{x + y \leq 1000 \quad x \geq 100 \quad y \geq 200 \quad y \geq x \quad x \geq 0, y \geq 0\}$. Función a optimizar (minimizar) es $f(x, y) = 0,1x + 0,2y$

b) Represente el recinto que determinan las inecuaciones $2x \geq 10 + y$, $x \leq 2(5 - y)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

Resolución

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$$2x \geq 10 + y \rightarrow 2x - y \geq 10 \rightarrow \text{Recta: } 2x - y = 10$$

$$x = 0, \quad 2 \cdot 0 - y = 10, \quad y = -10$$

$$y = 0, \quad 2x - 0 = 10, \quad x = 5$$

x	0	5
y	-1	0

$$(0, 0) \rightarrow 2 \cdot 0 - 0 \geq 10 \text{ (falso).}$$

La solución es el semiplano cerrado que NO contiene al (0, 0).

$$x \leq 2(5 - y) \rightarrow x + 2y \leq 10 \rightarrow \text{Recta: } x + 2y = 10$$

$$x = 0, \quad 0 + 2y = 10, \quad y = 5$$

$$y = 0, \quad x + 2 \cdot 0 = 10, \quad x = 10$$

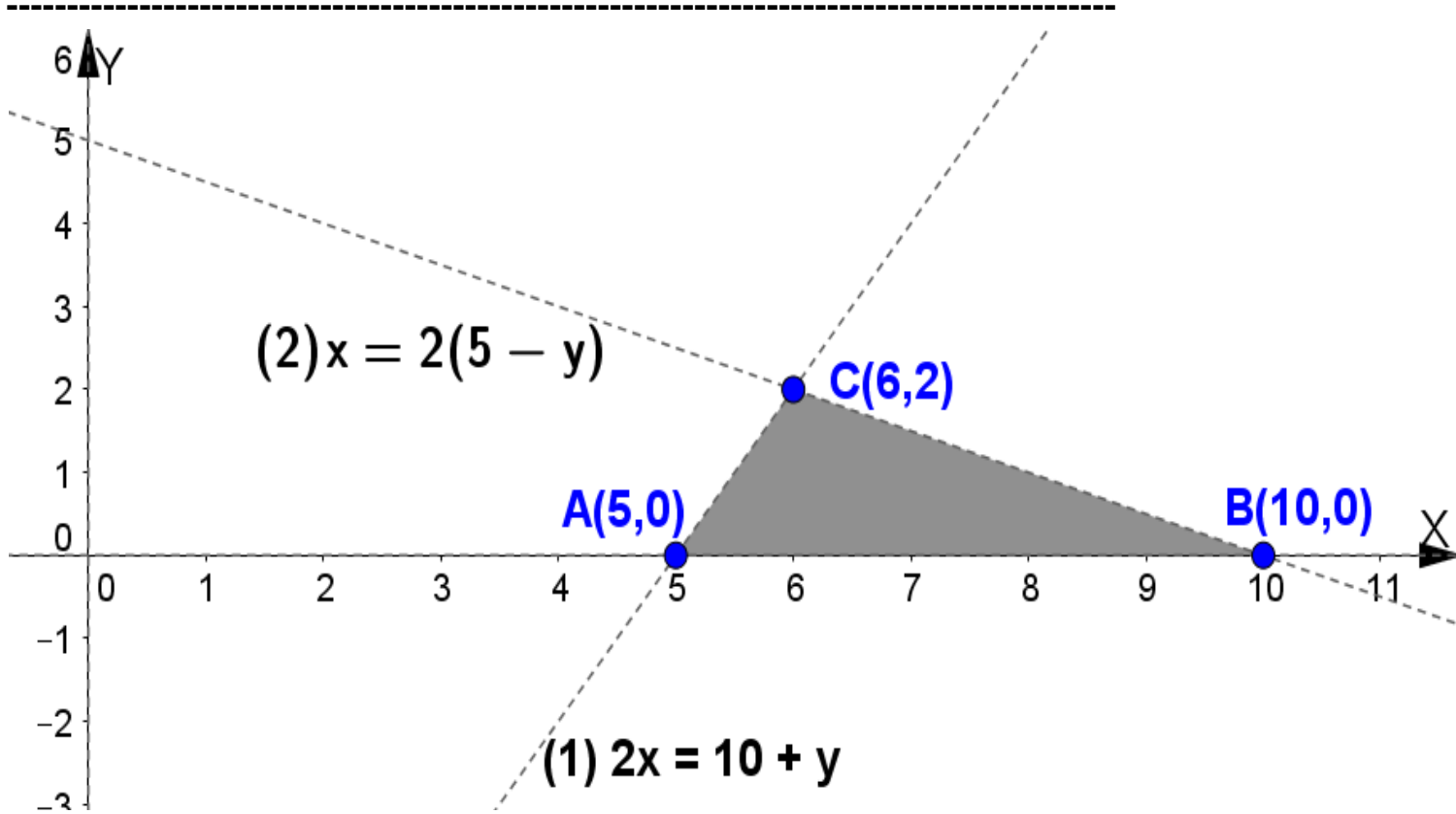
x	0	1
y	5	0

$$(0, 0) \rightarrow 0 + 2 \cdot 0 \leq 10 \text{ (cierto).}$$

La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y) $(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(1, 0)$.	$y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X) $(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 1)$.
---	---

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 5 y 10 y en el eje Y los valores son -10, 0 y 5.



Obtención de los vértices:

$$\{2x - y = 10 \quad y = 0; 2x - 0 = 10, \quad x = 5 \rightarrow A(5, 0)\}$$

$$\{x + 2y = 10 \quad y = 0; x + 2 \cdot 0 = 10, \quad x = 10 \rightarrow B(10, 0)\}$$

$$\{2x - y = 10 \quad x + 2y = 10 \rightarrow \{2x - y = 10 \quad 2x + 4y = 20; \text{restando,} \\ 5y = 10, \quad y = 2; x + 2 \cdot 2 = 10, \quad x = 6 \rightarrow C(6, 2)\}$$