

Câu 1.

$$a) \frac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}x = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x + 3x = 3$$

$$\Leftrightarrow 4x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

Vậy...

$$b) x^2 + 6x - 5 = 0$$

$$\text{có: } D' = 3^2 - 1 \cdot (-5) = 14$$

$$\rightarrow \text{pt có 2 nghiệm } \begin{cases} x_1 = -3 - \sqrt{14} \\ x_2 = -3 + \sqrt{14} \end{cases}$$

Vậy...

$$c) \begin{cases} \sqrt{2}x + y = \sqrt{2} + 2 \\ 2\sqrt{2}x - y = 2\sqrt{2} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2}x + 2y = 2\sqrt{2} + 4 \\ 2\sqrt{2}x - y = 2\sqrt{2} - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 6 \\ 2\sqrt{2}x - y = 2\sqrt{2} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy...

Hướng dẫn chi tiết về câu 2

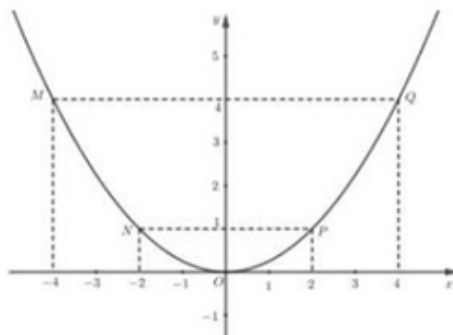
a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số đã cho.

Cho x nhận các giá trị $-4; -2; 0; 2; 4$ ta có bảng sau:

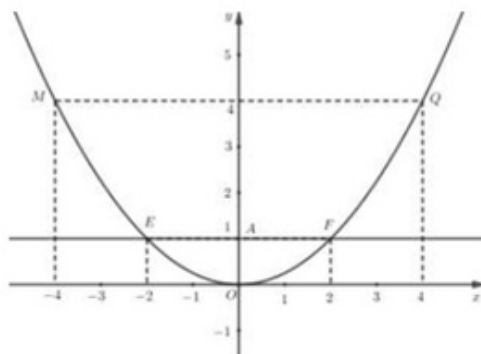
x	-4	-2	0	2	4
y	4	1	0	1	4

Do đó đồ thị hàm số $y = 0,25x^2$ là parabol đi qua các điểm $M(-4;4), N(-2;1), O(0;0), P(2;1), Q(4;4)$

Vẽ đồ thị:



b) Qua điểm $A(0;1)$ vẽ đường thẳng song song với trục hoành Ox cắt (P) tại hai điểm E và F. Viết tọa độ của E và F.



Đường thẳng đi qua $A(0;1)$ và song song với trục hoành có phương trình $y = 1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = 1$ và parabol $y = 0,25x^2$ ta có

$$0,25x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

$$\text{Với } x = 2 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{Với } x = -2 \Rightarrow y = 1$$

Vậy hai điểm E và F có tọa độ lần lượt là $(-2;1)$ và $(2;1)$.

Câu 3

a) Chứng minh rằng phương trình (*) luôn có nghiệm với mọi m .

$$x^2 - (m+2)x + 2m = 0 \quad (*)$$

$$\text{Có: } \Delta = (m+2)^2 - 4 \cdot 2m = m^2 + 4m + 4 - 8m = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 \geq 0 \quad \forall m$$

$\Rightarrow$ Phương trình (*) luôn có nghiệm với mọi m .

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $-1 \leq \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} \leq 1$.

Theo câu a) ta có phương trình (*) luôn có nghiệm với mọi m .

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*)

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi-et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1 x_2 = 2m \end{cases}$$

$$\text{Theo đề bài ta có: } -1 \leq \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} \leq 1$$

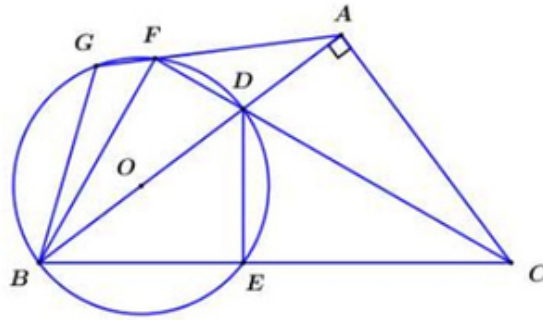
$$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{2(m+2)}{2m} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m \neq 0 \\ \frac{m+2}{m} \geq -1 \\ \frac{m+2}{m} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{m+2+m}{m} \geq 0 \\ \frac{m+2-m}{m} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{2m+2}{m} \geq 0 \\ \frac{2}{m} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > 0 \\ m \leq -1 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1.$$

Vậy $m \leq -1$ thỏa mãn bài toán.

Câu 4



a) Chứng minh rằng $ACED$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có $\angle BED = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow DE \perp BC \Rightarrow \angle CED = 90^\circ$.

Xét tứ giác $ACED$ có $\angle CAD + \angle CED = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $ACED$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°).

b) Biết $BF = 3\text{cm}$. Tính BC và diện tích tam giác BFC .

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{25} = 5 \text{ (cm)}$$

Ta có $\angle BFD = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BF \perp FD$ hay $BF \perp FC \Rightarrow \triangle BFC$ vuông tại F .

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông BFC ta có:

$$FC^2 = BC^2 - BF^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

$$\Rightarrow FC = \sqrt{16} = 4 \text{ (cm)}.$$

$$\text{Vậy } S_{BFC} = \frac{1}{2} BF \cdot FC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

c) Kéo dài AF cắt đường tròn (O) tại G . Chứng minh rằng BA là tia phân giác của góc $\angle CBG$.

Nhận thấy bốn điểm B, D, F, G cùng thuộc $(O) \Rightarrow$ Tứ giác $BDFG$ là tứ giác nội tiếp.

$$\Rightarrow \angle GBD = \angle AFD = \angle AFC \text{ (1) (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp)}.$$

Xét tứ giác $AFBC$ có: $\angle BAC = \angle BFC = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $AFBC$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có 2 đỉnh kề cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau).

Do đó $\angle ABC = \angle AFC$ (2) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle GBD = \angle ABC \Rightarrow BA$ là tia phân giác của góc $\angle CBG$ (đpcm).

Câu 5

a) Tính số học sinh yêu thích hội họa.

Vì số học sinh yêu thích hội họa chiếm tỉ lệ 20% so với số học sinh toàn trường nên số học sinh yêu thích hội họa là: $1500 \cdot 20 : 100 = 300$ (học sinh).

b) Hỏi tổng số học sinh yêu thích thể thao và âm nhạc là bao nhiêu?

Gọi số học sinh yêu thích thể thao là x (học sinh) ($30 < x < 1200, x \in \mathbb{N}^*$).

Số học sinh chọn yêu thích khác là y (học sinh) ($y < 1200, y \in \mathbb{N}^*$).

Số học sinh yêu thích thể thao hơn số học sinh yêu thích âm nhạc là 30 học sinh

$\Rightarrow$ Số học sinh yêu thích âm nhạc là $x - 30$ (học sinh).

Tổng số học sinh của trường là 1500 học sinh, số học sinh yêu thích hội họa là 300 học sinh nên số học sinh yêu thích thể thao, âm nhạc và các yêu thích khác là:

$$1500 - 300 = 1200 \text{ (học sinh)}$$

Khi đó ta có phương trình: $x + x - 30 + y = 1200 \Leftrightarrow 2x + y = 1230$ (1)

Số học sinh yêu thích thể thao và hội họa bằng với số học sinh yêu thích âm nhạc và các yêu thích khác nên ta có phương trình: $x + 300 = x - 30 + y \Leftrightarrow y = 330$ (m)

Thay $y = 330$ vào phương trình (1) ta được: $2x = 1230 - y = 1230 - 330 = 900 \Leftrightarrow x = 450$ (m)

$\Rightarrow$ Số học sinh yêu thích âm nhạc là: $450 - 30 = 420$ (học sinh).

Vậy tổng số học sinh yêu thích thể thao và âm nhạc là: $450 + 420 = 870$ học sinh.