MODELOS DE 2004 RESUELTOS

Profesor: Rafael Núñez Nogales

1.- En cierto barrio hay dos panaderías. El 40% de la población compra en la panadería A, el 25% en la B, y el 15% en ambas. Se escoge una persona al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona compre en A y no compre en B?

Resolución

Sean los sucesos A = “comprar en la panadería A” y B = “comprar en la panadería B”

Según el enunciado, $p(A) = 40\% = 0{,}4$, $p(B) = 25\% = 0{,}25$ y $p(A \cap B) = 15\% = 0{,}15$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}25 - 0{,}15 = 0{,}5$

Se pide $p(A \cap B^c) = p(A) - p(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}15 = 0{,}25 = 25\%$

b) Si esta persona es cliente de A, ¿cuál es la probabilidad de que también sea cliente de B?

Resolución Se pide $p\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0{,}15}{0{,}4} = 0{,}375 = 37{,}5\%$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea cliente de A ni de B?

Resolución

Por una de las leyes de Morgan, $p(A^c \cap B^c) = p[(A \cup B)^c] = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5 = 50\%$

Luego, la probabilidad que se pide es del 50%.

d) ¿Son independientes los sucesos “ser cliente de A” y “ser cliente de B”?

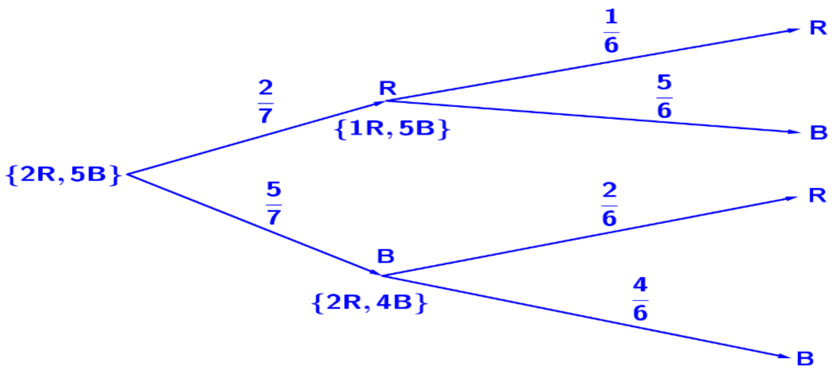
Resolución $p(A).p(B) = 0{,}4 \,.\, 0{,}25 = 0{,}1 \neq p(A \cap B) = 0{,}15 \Rightarrow$ A y B son dependientes.

2.- Entre las 7 bolas de una máquina de futbolín hay 2 rojas y 5 blancas; en cada partida, la máquina va sacando las bolas de una en una, de forma aleatoria, sin reemplazamiento. Calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a) “La primera bola es roja”.

Resolución

R = “la bola es roja” B = “la bola es blanca”. Hacemos un diagrama de árbol de probabilidades:



Se pide $p(R) = \frac{2}{7} \cong 0{,}2857 = 28{,}57\%$

b) “Las dos primeras bolas son blancas”.

Resolución Se pide $p\left(B_1 B_2\right) = p\left(B_1\right).\ p\left(B_2/B_1\right) = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{10}{21} \cong 0{,}4762 = 47{,}62\%$

c) “Las dos primeras bolas son de colores distintos”.

Resolución

$p\left(B_1 R_2\right) + p\left(R_1 B_2\right) = p\left(B_1\right).\ p\left(R_2/B_1\right) + p\left(R_1\right).\ p\left(B_2/R_1\right) = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{21} \cong 0{,}4762 = 47{,}62\%$

3.- Sean A y B dos sucesos tales que $p(A) = 0{,}4$ $p(B^c) = 0{,}7$ y $p(A \cup B) = 0{,}6$, donde B^c es el suceso contrario de B.
a) ¿Son independientes A y B?

Resolución

$p(B) = 1 - p(B^c) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$ y como $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, despejando,

$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}6 = 0{,}1$

$p(A).p(B) = 0,4\,.\,0,3 = 0,12 \neq p(A \cap B) = 0,1 \Rightarrow$ A y B son dependientes.

b) Calcule $p(A/B^c)$

Resolución $p\left(\frac{A}{B^c}\right) = \frac{p(A \cap B^c)}{p(B^c)} = \frac{p(A) - p(A \cap B)}{1 - p(B)} = \frac{0{,}4 - 0{,}1}{1 - 0{,}3} = \frac{0{,}3}{0{,}7} \cong 0,4286 = 42,86\%$

4.- Se realiza una encuesta sobre las preferencias de vivir en la ciudad o en urbanizaciones cercanas. Del total de la población encuestada el 60% son mujeres, de las cuales prefieren vivir en la ciudad un 73%. Se sabe que la probabilidad de que una persona, sea hombre o mujer, desee vivir en la ciudad es 0,62.
a) Calcule la probabilidad de que, elegido un hombre al azar, prefiera vivir en la ciudad.

Resolución

Sean los sucesos C = "preferir vivir en la ciudad" U = "preferir vivir en urbanizaciones cercanas"

H = "ser hombre" M = "ser mujer"

Construimos la siguiente tabla de porcentajes:

	H	M	Total
C	62% – 43,8% = 18,2%	73% del 60% = 43,8%	62%
U	40% – 18,2% = 21,8%	60% – 43,8% = 16,2%	100% – 62% = 38%
Total	100% – 60% = 40%	60%	100%

Se pide $p\left(\frac{C}{H}\right) = \frac{p(C \cap H)}{p(H)} = \frac{18{,}2\%}{40\%} = \frac{18{,}2}{40} = 0,455 = 45,5\%$

b) Supuesto que una persona, elegida al azar, desee vivir en la ciudad, calcule la probabilidad de que sea mujer.

Resolución Se pide $p\left(\frac{M}{C}\right) = \frac{p(M \cap C)}{p(C)} = \frac{43{,}8\%}{62\%} = \frac{43{,}8}{62} \cong 0,7065 = 70,65\%$

5.- (prueba extraordinaria) Consideramos el experimento aleatorio de lanzar dos dados distintos y anotar el producto de sus puntuaciones.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que dicho producto sea igual a 6?

Resolución

Nº de casos posibles: 6.6 = 36 ; A = "el producto de las puntuaciones es 6" = {1-6, 6-1, 2-3, 3-2}

casos favorables: 4. Se pide $p(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \cong 0,1111 = 11,11\%$

b) Si sabemos que el producto ha sido 4, ¿cuál es la probabilidad de que hayan salido los dos dados con la misma puntuación?

Resolución

B = "el producto de las puntuaciones es 4" = {1-4, 4-1, 2-2} ; casos favorables: 3 ; $p(B) = \frac{3}{36}$

C = "salen números iguales" = {1-1, 1-2, ..., 6-6}

$B \cap C$ = "salen números iguales y el producto de las puntuaciones es 4" = {2-2} ; $p(B \cap C) = \frac{1}{36}$

$$\text{Se pide } p\left(\frac{C}{B}\right) = \frac{p(C \cap B)}{p(B)} = \frac{1/36}{3/36} = \frac{1}{3} \cong 0,3333 = 33,33\%$$

6.- (prueba extraordinaria) En una ciudad, el 40% de sus habitantes lee el diario A, el 25% lee el diario B y el 50% lee al menos uno de los dos diarios.

a) Los sucesos "leer el diario A" y "leer el diario B" ¿son independientes?

Resolución

A = "leer diario A" , p(A) = 40% = 0,4 ; B = "leer diario B", p(B) = 25% = 0,25 ; $p(A \cup B)$ = 50% = 0,5

Como $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0,4 + 0,25 - 0,5 = 0,15$.

$p(A).p(B) = 0,4 \, . \, 0,25 = 0,2 \neq p(A \cap B) = 0,15 \Rightarrow$ A y B son dependientes.

b) Entre los que leen el diario A, ¿qué porcentaje lee también el diario B?

Resolución Se pide $p\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0,15}{0,4} = 0,375 = 37,5\%$

c) Entre los que leen, al menos, un diario ¿qué porcentaje lee los dos?

Resolución

Como $A \cap B \subset A \cup B$ entonces $A \cap B \cap (A \cup B) = A \cap B$.

Se pide es $p[\frac{(A \cap B)}{(A \cup B)}] = \frac{p[(A \cap B) \cap (A \cup B)]}{p(A \cup B)} = \frac{p(A \cap B)}{p(A \cup B)} = \frac{0,15}{0,5} = 0,3 = 30\%$

d) Entre los que no leen el diario A, ¿qué porcentaje lee el diario B?

Resolución Se pide $p\left(\frac{B}{A^c}\right) = \frac{p(B \cap A^c)}{p(A^c)} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{1 - p(A)} = \frac{0,25 - 0,15}{1 - 0,4} = \frac{0,1}{0,6} \cong 0,1667 = 16,67\%$

7.- Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por 2 bolas del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola. Calcule:

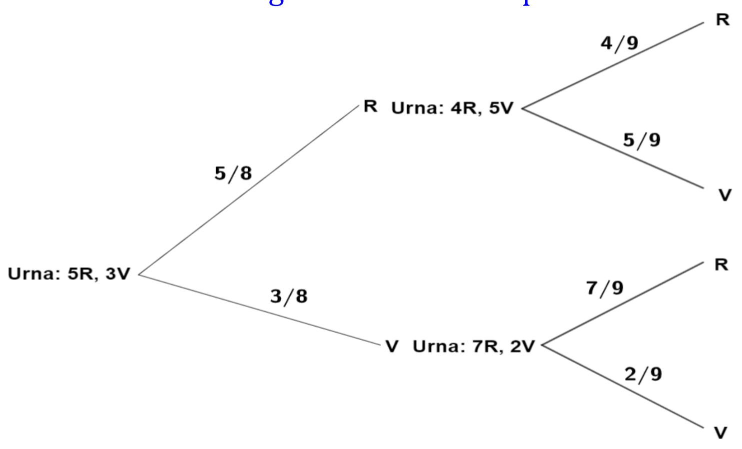
a) La probabilidad de que la segunda bola sea verde.

Resolución

R_1 = "la 1ª bola extraída es roja" V_1 = "la 1ª bola extraída es verde"

R_2 = "la 2ª bola extraída es roja" V_2 = "la 2ª bola extraída es verde"

Elaboramos un diagrama de árbol de probabilidades:



Se pide $p(V_2)$ y podemos usar el teorema de la probabilidad total,

$$p(V_2) = p(R_1).\, p(V_2/R_1) + p(V_1).\, p(V_2/V_1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{9} = \frac{31}{72} \cong 0,4306 = 43,06\%$$

b) La probabilidad de que la primera haya sido roja, sabiendo que la segunda también ha sido roja.

Resolución

Se pide $p\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = \frac{p(R_1 \cap R_2)}{p(R_2)} = \frac{p(R_1)\,.\,p(R_2/R_1)}{1-p(V_2)} = \frac{\frac{5}{8}\,.\,\frac{4}{9}}{1-\frac{31}{72}} = \frac{20/72}{41/72} = \frac{20}{41} \cong 0,4878 = 48,78\%$

8.- El despertador de un trabajador suena en el 80% de los casos. Si suena, la probabilidad de que llegue puntual al trabajo es 0,9; si no suena, llega tarde el 50% de las veces.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue puntual?

Resolución

Sean los sucesos S = "el despertador suena" A = "el trabajador llega puntual al trabajo"
Según el enunciado: $p(S) = 80\% = 0,8$; $p(A/S) = 0,9$; $p(A^c/S^c) = 50\% = 0,5$

Se pide p(A) y según el teorema de la probabilidad total, $p(A) = p(S).\ p(A/S) + p(S^c).\,p(A/S^c)$

$p(S^c) = 1 - p(S) = 1 - 0,8 = 0,2$ y $p(A/S^c) = 1 - p(A^c/S^c) = 1 - 0,5 = 0,5$

Sustituyendo, $p(A) = 0,8\ .\ 0,9 + 0,2\ .\ 0,5 = 0,82 = 82\%$

b) Si llega tarde, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sonado el despertador?

Resolución

Como $0,5 = p\left(\frac{A^c}{S^c}\right) = \frac{p(A^c \cap S^c)}{p(S^c)} = \frac{p(A^c \cap S^c)}{0,2} \Rightarrow p(A^c \cap S^c) = 0,5\ .\ 0,2 = 0,1.$

Se pide $p\left(\frac{S^c}{A^c}\right) = \frac{p(A^c \cap S^c)}{p(A^c)} = \frac{p(A^c \cap S^c)}{1-p(A)} = \frac{0,1}{1-0,82} \cong 0,5556 = 55,56\%$

9.- (prueba ordinaria) María y Laura idean el siguiente juego: cada una lanza un dado, si en los dos dados sale el mismo número, gana Laura; si la suma de ambos es 7, gana María; y en cualquier otro caso hay empate.
a) Calcule la probabilidad de que gane Laura.

Resolución

Sea el suceso A = "gana Laura" = "salen números iguales" = {1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5, 6-6}

En el experimento hay 6.6 = 36 casos posibles y 6 casos favorables al suceso A.

Por la regla de Laplace, la probabilidad es $p(A) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \cong 0,1667 = 16,67\%$

b) Calcule la probabilidad de que gane María.

Resolución

Sea el suceso B = "gana María" = "la suma de los puntos es 7" = {1-6, 6-1, 2-5, 5-2, 3-4, 4-3}

En el experimento hay 6.6 = 36 casos posibles y 6 casos favorables al suceso B.

Por la regla de Laplace, la probabilidad es $p(B) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \cong 0,1667 = 16,67\%$

10.- (prueba ordinaria) Dados los sucesos aleatorios A y B, se sabe que

$$p(B^c) = 3/4 \quad y \quad p(A) = p(A/B) = 1/3$$

a) Razone si los sucesos A y B son independientes.

Resolución

Como $p(A) = p\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \Rightarrow p(A \cap B) = p(A).\ p(B)$. Luego, A y B son independientes

b) Calcule $p(A \cup B)$

Resolución

Observa que $p(B) = 1 - p\left(B^c\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Luego, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A)p(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}.\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

11.- En una universidad española el 30% de los estudiantes son extranjeros y, de éstos, el 15% están becados. De los estudiantes españoles, sólo el 8% tienen beca. Si se elige, al azar, un alumno de esa universidad:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea español y no tenga beca?

Resolución

Sean los sucesos A = "ser extranjero" y B = "tener beca"

Construimos la siguiente tabla de porcentajes:

	A	A^c	Total
B	15% del 30% = 4,5%	8% del 70% = 5,6%	10,1 %
B^c	30% – 4,5% = 25,5%	70% – 5,6% = 64,4%	89,9 %
Total	30%	100% – 30% = 70%	100%

Se pide $p\left(A^c \cap B^c\right) = 64,4\%$

b) Calcule la probabilidad de que sea extranjero, sabiendo que tiene beca.

Resolución Se pide $p\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{4,5\%}{10,1\%} = \frac{4,5}{10,1} \cong 0,4456 = 44,56\%$

12.- En un centro de Bachillerato, los alumnos de 1º son el 60% del total, y los de 2º el 40% restante. De todos ellos, el 46% posee móvil y el 18% son de 1º y tienen móvil.

a) Calcule la probabilidad de que un alumno de primero, elegido al azar, posea móvil.

Resolución

Sean los sucesos A = "ser de 1º" , B = "ser de 2º" y M = "tener móvil"

Construimos la siguiente tabla de porcentajes:

	A	B	Total
M	18%	46% – 18% = 28%	46%

M^c	60% – 18% = 42%	40% – 28% = 12%	100% – 46% = 54%
Total	60%	40%	100%

$$\text{Se pide } p\left(\frac{M}{A}\right) = \frac{p(M \cap A)}{p(A)} = \frac{18\%}{60\%} = \frac{18}{60} = \frac{3}{10} = 0,3 = 30\%$$

b) Elegido un alumno, al azar, resulta que tiene móvil, ¿cuál es la probabilidad de que sea de segundo?

Resolución

$$\text{Se pide } p\left(\frac{B}{M}\right) = \frac{p(B \cap M)}{p(M)} = \frac{28\%}{46\%} = \frac{28}{46} = \frac{14}{23} \cong 0,6087 = 60,87\%$$