

Concours commun POLYTECHNIQUE 1998

MATH 2 (option PSI)

1ère partie :

1.1.1/ C'est une conséquence immédiate du théorème de Cauchy-Lipschitz appliqué à l'équation linéaire $-f''(x) + \alpha(x)f(x) = 0$.

1.1.2/ Le même théorème s'applique à l'équation $-f''(x) + \alpha(x)f(x) = \beta(x)$ et à chaque condition initiale $(f(0), f'(0))$ correspond une solution. Donc S_E n'est pas vide.

1.2/ $\{l + rg + sh; (r, s) \in \mathbb{R}^2\}$ est le sous-espace affine de $C^2[0,1]$ contenant l et dirigé par S_H ; c'est donc l'ensemble S_E .

1.3/ Il est clair que $I \neq 0$. Par ailleurs, puisque g est de classe C^2 , on peut faire une intégration par parties qui donne $I = [g(x)g'(x)]_0^1 - \int g(x)g''(x)dx = - \int \alpha(x)g(x)^2 dx$ par définition de g et en supposant que $g(1) = 0$. Comme $\alpha(x)$ est supposée positif ou nul pour tout x dans $[0,1]$, $I \leq 0$ et I serait donc nulle. Etant l'intégrale d'une fonction positive ou nulle continue, on aurait alors $g'(x) = 0$ pour tout x et g serait une constante, nécessairement nulle ce qui contredit la condition $g'(0) = 1$.

1.4/ Puisque toute fonction de S peut se mettre sous la forme $l + rg + sh$, le couple (r_0, s_0) doit satisfaire les deux conditions { ce qui prouve son existence et son unicité sachant que $g(1) \neq 0$.

1.5/ S est donc un singleton.

2ème partie :

2.1.1/ VRAI : F est un sous-ensemble non vide de $C^0[0,1]$, stable par addition et multiplication par un scalaire.

2.1.2/ VRAI : même argument comme sous-ensemble de F .

2.1.3/ VRAI : résulte de la linéarité de l'intégrale.

2.1.4/ VRAI : résulte de la linéarité de la dérivation à droite ou à gauche.

2.1.5/ VRAI : résulte de la linéarité de l'intégrale et de l'opérateur D ; la symétrie est évidente.

2.1.6/ VRAI : pour tout x , $w'(x) = w_g'(x) = w_d'(x)$.

2.2.1/ Soient $a_0 = y < a_1 < \dots < a_k = z$ des réels tels que v soit de classe C^1 sur chaque segment $[a_{i-1}, a_i]$. Alors $\int Dv(x)dx = \sum_{i=1}^k \int Dv(x)dx = \sum_{i=1}^k \int v'(x)dx = \sum_{i=1}^k (v(a_i) - v(a_{i-1})) = v(z) - v(y)$.

2.2.2/ Avec les mêmes notations (pour $y = 0$ et $z = 1$), on peut écrire

$$\begin{aligned} \int w'(x)v(x)dx &= \sum_{i=1}^k \int w'(x)v(x)dx = \sum_{i=1}^k [w(x)v(x)]_{a_{i-1}}^{a_i} - \sum_{i=1}^k \int w(x)v'(x)dx \\ &= [w(x)v(x)]_0^1 - \sum_{i=1}^k \int w(x)Dv(x)dx \text{ car } Dv \text{ et } v' \text{ coïncident sauf aux extrémités du segment} \\ &= [w(x)v(x)]_0^1 - \int w(x)Dv(x)dx \end{aligned}$$

2.3.1/ Y_u étant linéaire d'après 2.1, l'image de V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ donc $\{0\}$ ou $\mathbb{R}$.

2.3.2/ Pour $v \in V$, $Y_f(v) = \int (DfDv + \alpha f v)dx - \int \beta v dx$. En utilisant 2.2.2 avec $w = Df = f'$ et

sachant que $v(0) = v(1) = 0$, on obtient $Y_f(v) = \int ((-f'' + \alpha f)v - \beta v)dx = 0$. Donc $Y_f(V) = 0$.

2.4/ Pour $\alpha = 0$, et en reprenant les notations de 2.2 en remplaçant v par u ,

$a(u, u) = \int (Du)^2 dx = \sum_{i=1}^k \int (Du(x))^2 dx = \sum_{i=1}^k \int (u'(x))^2 dx = 0$. Chacune des intégrales élémentaires est nécessairement nulle d'où par continuité de u' sur $[a_{i-1}, a_i]$, $u'(x) = 0$ en tout point x de $[0, 1]$ où u est dérivable. u est donc une fonction en escalier. Comme elle est continue, elle est constante sur $[0, 1]$.

2.5/ $a(u, u) = \int ((Du)^2 + \alpha u^2) dx = 0$. Comme α est une fonction positive ou nulle, il en résulte que

$\int (Du)^2 dx = 0$. Le même argument qu'en **2.4** prouve alors que u est constante. Mais comme $u(0) = 0$, u est la fonction nulle. a est donc une forme bilinéaire symétrique (d'après **2.1.5**), positive puisque $a(u, u)$ est l'intégrale d'une fonction positive et définie d'après ce qui précède: c'est bien un produit scalaire.

2.6.1/

$$J(f + w) - J(f) = \frac{1}{2}(a(f + w, f + w) - a(f, f)) - b(f + w) + b(f) = a(f, w) + \frac{1}{2}a(w, w) - b(w)$$

D'après **2.3.2**, $a(f, w) - b(w) = 0$. Donc $J(f + w) - J(f) = \frac{1}{2}a(w, w)$.

2.6.2/ Pour tout f dans S , $J(f) = Y_f(f) = 0$ d'après **2.3.2**. Si S contenait deux éléments, on pourrait les écrire f et $f + w$ où w est une fonction de S_H nulle en 0 et 1, donc une fonction de V et on déduirait de **2.6.1** que $a(w, w) = 0$. Comme a est un produit scalaire, $w = 0$; S ne peut donc pas contenir plus d'un élément.

2.7/ Puisque $Y_f(V) = 0$, $S \cap S_2 = \emptyset$. Inversement, si $f \in S_2$ et si f est l'unique élément de S (dont l'existence a été prouvée en **1.5**), $a(f - f, v) = 0 \forall v \in V$. Comme a est un produit scalaire, cela impose $f = 0$, d'où finalement $S_2 = \{0\}$.

3ème partie :

3.1/ A est un sous-ensemble de V contenant la fonction nulle, stable par addition et multiplication par un scalaire; c'est donc un sous-espace vectoriel de V .

3.2.1/ Une fonction de Kers est nulle en chaque point x_i . Comme elle est affine sur chaque segment $[x_{i-1}, x_i]$, elle est identiquement nulle, d'où $Kers = \{0\}$. D'autre part, on peut fixer arbitrairement des réels $t_1, \dots, t_n$ et bâtir une fonction v de A telle que $v(x_i) = t_i$ pour tout i . Donc $\text{Im } s = \mathbb{R}^n$.

3.2.2/ s est donc un isomorphisme de A sur $\mathbb{R}^n$, ce qui prouve que A est un espace vectoriel de dimension n .

3.2.3/ La famille $(j_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ est l'image réciproque par s de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. C'est donc une base de A .

$$\mathbf{3.2.4/} j_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3.2.5/ L'image de p est clairement contenue dans A et comme $p(j_k) = j_k$, p est l'identité sur A . Donc p est un projecteur d'image A .

3.3/ Par restriction, a est un produit scalaire sur A . L'isomorphisme canonique qu'il définit entre A et son dual permet d'associer à la forme linéaire b sur A un unique vecteur g vérifiant $a(g, v) = b(v) \forall v \in A$.

3.4/ Par linéarité, T est le singleton formé de l'unique élément g .

3.5.1/ Comme $g = \sum_{i=1}^n g_i j_i$, la condition caractérisant g écrite dans **3.4** se met sous la forme matricielle $MG = B$ avec $M = (a(j_1, j_1) \dots a(j_1, j_n) \dots a(j_n, j_1) \dots a(j_n, j_n))$ et $B = (b_1 \dots b_n)$.

3.5.2/ Les fonctions j_k étant nulles en dehors de $[(k-1)e, (k+1)e]$, $a(j_k, j_l) = 0$ si $|l - k| > 1$.

$$a(j_{l-1}, j_l) = \int \left(-1 + \alpha \left(l - \frac{x}{e} \right) \left(\frac{x}{e} - l + 1 \right) \right) dx = e \left(\frac{\alpha}{6} - 1 \right).$$

$$a(j_l, j_l) = 2 \int \left(1 + \alpha \left(\frac{x}{e} - l + 1 \right)^2 \right) dx = 2e \left(1 + \frac{\alpha}{3} \right).$$

4ème partie :

4.1/ Puisque $\hat{A} \subset V$, il résulte de **2.3.2** que $a(f, v) = b(v) \hat{A}^\perp$. De plus $a(g, v) = b(v) \hat{A}^\perp$ d'après **3.3**. Donc $f - g \in \hat{A}^\perp$ au sens du produit scalaire sur V et par conséquent, g est la projection orthogonale de f sur A .

4.2/ Comme $h \in \hat{A}$ et comme la projection orthogonale minimise la distance de f au sous-espace A , $N(f - g) \leq N(f - h)$.

4.3.1/ Une fonction affine sur un segment est évidemment de classe C^2 sur ce segment.

4.3.2/ Posons $Y(x) = f(x) - h(x)$. D'une part, $Y(y) = Y(z) = 0$ par définition de h , d'où l'existence de $c \in]y, z[$ tel que $Y'(c) = 0$ (théorème de Rolle). D'autre part $|Y''(x)| = |f''(x)| \leq K_0$ sur $]y, z[$. La majoration des accroissements finis donne alors $|Y'(x)| = |Y'(x) - Y'(c)| \leq K_0|x - c| \leq K_0e$. On peut donc prendre $K_1 = K_0$.

4.3.3/ Puisque $Df - Dh$ coïncide avec $f' - h'$ sur $]y, z[$, $\int (Df - Dh)^2(x) dx \leq K_0^2 e^3$

4.3.4/ En utilisant une nouvelle fois la majoration des accroissements finis, pour tout $x \in]y, z[$ $|(f - h)(x)| = |Y(x) - Y(y)| \leq K_1 e|x - y| \leq K_1 e^2$, ce qui reste vrai pour $x = y$ ou $x = z$. On peut donc prendre $K_2 = K_1$.

4.3.5/ Alors $\int (f - h)^2(x) dx \leq K_2^2 e^5$.

4.4/

$N(f - g) \leq N(f - h) = \sqrt{\int ((Df - Dh)^2(x) + \alpha(x)(f - h)^2(x)) dx} \leq \sqrt{(n + 1)(K_0^2 e^3 + LK_0^2 e^5)}$. Et comme $n + 1 = \frac{1}{e}$ et $e^5 \leq e^3$, on obtient finalement $N(f - g) \leq K_0 \sqrt{1 + Le}$, soit $K = K_0 \sqrt{1 + L}$.