

1.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 e^{-x^2}$

(a) Halla las asíntotas de la gráfica de f .

Resolución

Como f es continua en $\mathbb{R}$ no hay asíntotas verticales.

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ Indeterminación. Aunque la indeterminación se puede resolver aplicando}$$

doblemente la regla de L'Hôpital, el límite es 0 porque e^{x^2} es un infinito de orden superior al de x^2 . Luego, la asíntota horizontal en $\pm\infty$ es la recta de ecuación $y = 0$ (el eje X)

Estudiamos la posición de la gráfica respecto de la asíntota:

$$y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} = x^2 e^{-x^2} - 0 > 0. \text{ Luego, la gráfica está "por encima" de la asíntota en } \pm\infty$$

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

Resolución

f es continua y derivable en $\mathbb{R}$ por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

$$\text{Además, } f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2 e^{-x^2} (-2x) = (1 - x^2) 2xe^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = 1 \text{ ó } x = -1.$$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente	máximo	decreciente

f es decreciente en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ y creciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Mínimo relativo: $x = 0$, $y = f(0) = 0^2 e^0 = 0$. El mínimo relativo es $M(0, 0)$.

Máximos relativos:

$$x = -1, y = f(-1) = (-1)^2 e^{-(-1)^2} = \frac{1}{e} \cong 0,37. \text{ Un máximo relativo es } N(-1; 0,37)$$

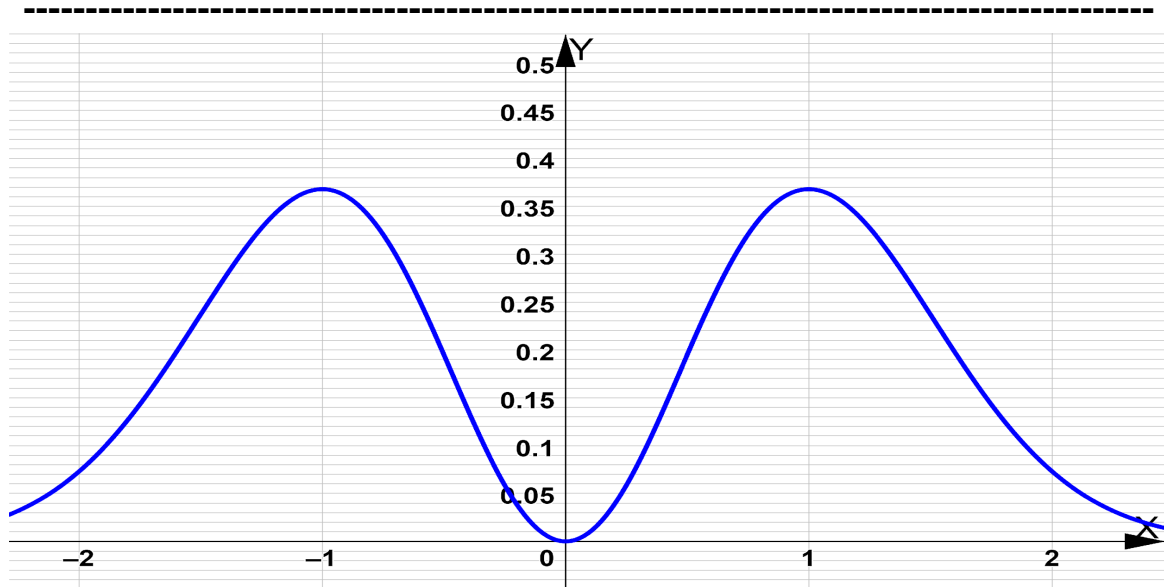
$$x = 1, y = f(1) = 1^2 e^{-1^2} = \frac{1}{e} \cong 0,37. \text{ El otro máximo relativo es } P(1; 0,37)$$

(c) Esboza la gráfica de f .

Resolución

Dado que $f(x) \geq 0$, para todo x y que $f(0) = 0$ la gráfica sólo corta a los ejes en $(0, 0)$.

Usando, además, los apartados anteriores la gráfica sería



2.- Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x|x|$.

(a) Dibuja la región acotada del plano que está limitada por la gráfica de f y la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

(b) Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.

Resolución

Como $|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ entonces $f(x) = x|x| = \begin{cases} -x^2, & \text{si } x < 0 \\ x^2, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

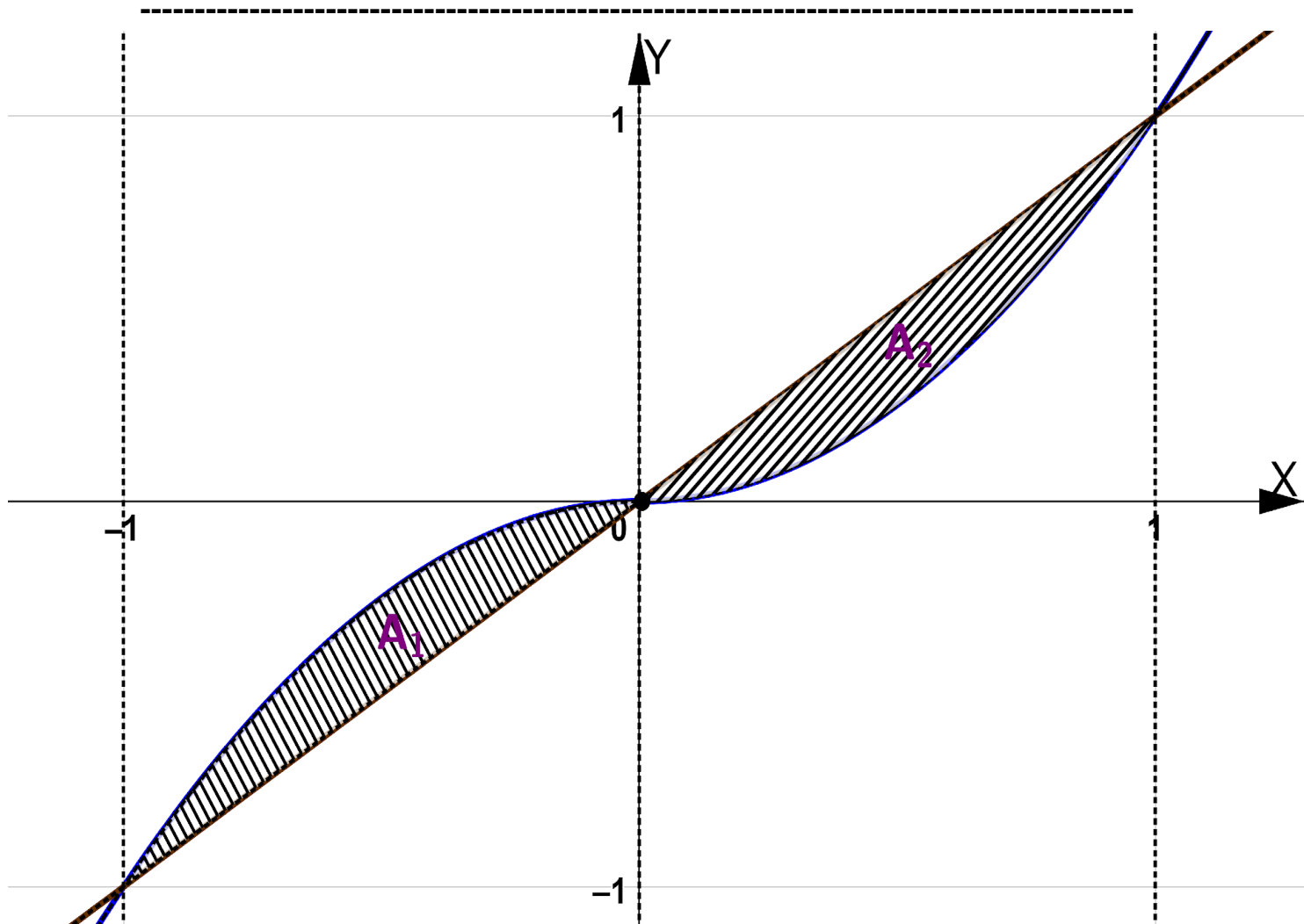
La bisectriz del primer y tercer cuadrante es la recta de ecuación $y = x$

Los puntos de corte de la gráfica de f con la recta se obtienen resolviendo el sistema

$$\begin{cases} y = x|x| \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x|x| = x \Rightarrow \begin{cases} -x^2 = x, & x < 0 \\ x^2 = x, & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x(x+1) = 0, & x < 0 \\ x(x-1) = 0, & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \quad \text{ó} \quad x = 1 \quad \text{ó} \quad x = -1$$

Los puntos de corte son $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(-1, -1)$



El área que se pide es $A = A_1 + A_2$. Por simetría, $A_1 = A_2$. Luego, $A = 2 \int_0^1 (x - x^2) dx$

$$A = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx. \text{ Una primitiva de la función integrando es } p(x) = x^2 - \frac{2x^3}{3} = \frac{3x^2 - 2x^3}{3}.$$

$$\text{Por la regla de Barrow, } A = p(1) - p(0) = \frac{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^3}{3} - \frac{3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3}{3} = \frac{1}{3} \cong 0,33 u^2$$

3.- Halla una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que su gráfica pase por el punto $M(0, 1)$, que la tangente en el punto M sea paralela a la recta $2x - y + 3 = 0$ y que $f''(x) = 3x^2$.

Resolución

La recta es $y = 2x + 3$, que tiene pendiente 2 y $f'(x) = \int f''(x) dx = \int (3x^2) dx = x^3 + a$.

Como la recta tangente en $x = 0$ es paralela a la recta anterior, entonces $f'(0) = 2$, $0^3 + a = 2$, $a = 2$.

Luego, $f'(x) = x^3 + 2$. Se tiene que $f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^3 + 2) dx = \frac{x^4}{4} + 2x + b$

Como la gráfica de f pasa por M , entonces $f(0) = 1$, $\frac{0^4}{4} + 2 \cdot 0 + b = 1$, $b = 1$.

Por tanto, $f(x) = \frac{x^4}{4} + 2x + 1 = \frac{x^4 + 8x + 4}{4}$

4.- Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x + 4e^{-x}$.

(a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y halla sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

(b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Resolución

$$f'(x) = e^x - 4e^{-x} = e^x - \frac{4}{e^x} = \frac{e^{2x} - 4}{e^x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 4 \Leftrightarrow 2x = \ln 4 = 2 \ln 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

	$(-\infty, \ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	decreciente	mínimo	creciente

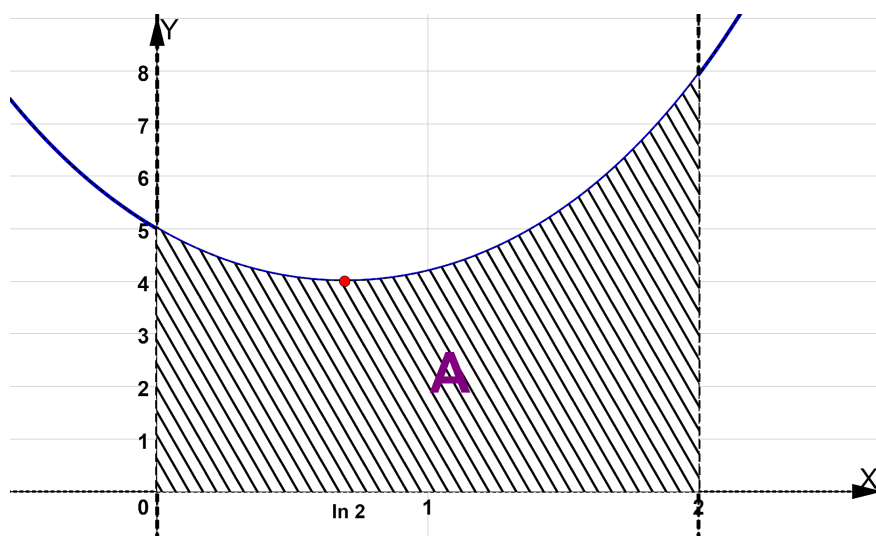
Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

f es decreciente en $(-\infty, \ln 2)$ y creciente en $(\ln 2, +\infty)$.

Mínimo relativo: $x = \ln 2$, $y = f(\ln 2) = e^{\ln 2} + \frac{4}{e^{\ln 2}} = 2 + 2 = 4$. Mínimo $M(\ln 2, 4)$

Como $f(x) \rightarrow +\infty$, el mínimo relativo es también absoluto.

Dado que $f(x) > 0$, para todo x , y que $f(0) = e^0 + 4e^0 = 5$ la gráfica de f está por encima del eje X y corta al eje Y en $(0, 5)$.

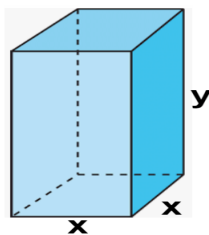


El área que se pide es $A = \int_0^2 (e^x + 4e^{-x}) dx$. Una primitiva es $p(x) = e^x - 4e^{-x}$. Por la regla de Barrow,

$$A = p(2) - p(0) = e^2 - 4e^{-2} - [e^0 - 4e^0] = e^2 - 4e^{-2} + 3 \cong 9,85 u^2$$

5.- (prueba extraordinaria) Se desea construir una caja de base cuadrada con una capacidad de 80 cm^3 . Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 1 €/cm^2 y para la base se emplea un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo

Resolución



Como el volumen es 80, entonces $x^2 y = 80 \Rightarrow y = \frac{80}{x^2}$

Cuesta 1 €/cm²: $S(\text{tapa}) + S(\text{lateral}) = x^2 + 4xy = x^2 + 4x \frac{80}{x^2} = x^2 + \frac{320}{x}$

Cuesta 50% más caro, o sea 1,50 €/cm²: $S(\text{base}) = x^2$

Función a minimizar: $f(x) = \text{coste} = 1 \cdot \left(x^2 + \frac{320}{x}\right) + 1,5 \cdot x^2 = 2,5x^2 + \frac{320}{x}$

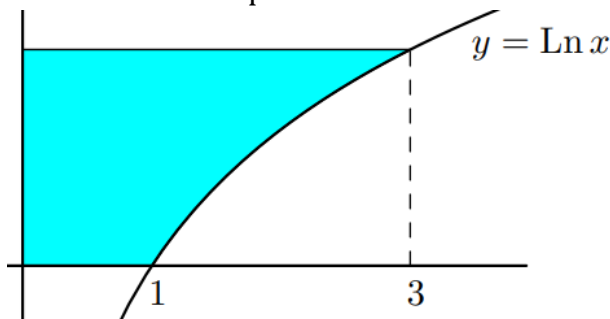
$$f'(x) = 5x - \frac{320}{x^2} = \frac{5x^3 - 320}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 5x^3 - 320 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{320}{5}} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$f''(x) = (5x - 320x^{-2})' = 5 + 640x^{-3}$; $f''(4) = 5 + 640 \cdot 4^{-3} > 0$. Luego, en $x = 4$, f tiene el mínimo.

En este caso, $y = \frac{80}{4^2} = 5$.

Por tanto, las dimensiones de la caja son 4 cm x 4 cm x 5 cm.

6.- (prueba extraordinaria) Halla el área de la superficie sombreada



Resolución

El área que se pide es $A = A(\text{rectángulo}) - \int_1^3 \ln \ln x \, dx = 3 \ln \ln 3 - \int_1^3 \ln \ln x \, dx$

Halleemos $\int_1^3 \ln \ln x \, dx$. Usamos el método de integración por partes para hallar una primitiva:

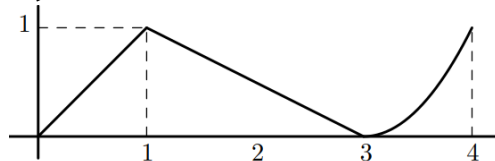
$$[u = \ln \ln x \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dv = dx v = x] \Rightarrow \int \ln \ln x \, dx = x \ln \ln x - \int 1 \, dx = x \ln \ln x - x = x(\ln \ln x - 1) + k$$

Luego, una primitiva es $p(x) = x(\ln \ln x - 1)$. Por la regla de Barrow,

$$\int_1^3 \ln \ln x \, dx = p(3) - p(1) = 3(\ln \ln 3 - 1) - 1(\ln \ln 1 - 1) = 3 \ln \ln 3 - 2$$

Por tanto, el área es $A = 3 \ln \ln 3 - (3 \ln \ln 3 - 2) = 2 u^2$

7.- (prueba extraordinaria) De una función $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que $f(1) = 3$ y que la gráfica de su función derivada es la que aparece en el dibujo



(a) Halla la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

Resolución

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$

es $rtg: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. En este caso, $x_0 = 1$, $f(x_0) = f(1) = 3$.

Observando la gráfica dada, $f'(x_0) = f'(1) = 1$. La ecuación sería

$rtg: y = 1(x - 1) + 3$; $rtg: y = x + 2$

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . ¿En qué punto alcanza la función su máximo absoluto?

Resolución

Observando la gráfica dada, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ó $x = 3$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(0, 3)$	3	$(3, 4)$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	creciente		creciente

Observamos que f es creciente en $[0, 4]$. Luego el máximo absoluto se alcanza en $x = 4$.

(c) Estudia la concavidad y la convexidad de f .

Resolución

Usamos de nuevo la gráfica de $f'(x)$:

	$(0, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, 4)$
$f'(x)$	creciente	0	decreciente		creciente
$f''(x)$	+		-		+
$f(x)$	convexa		cóncava		convexa

f es convexa en $(0, 1) \cup (3, 4)$ y cóncava en $(1, 3)$

8.- (prueba extraordinaria) Calcula el área del recinto acotado que está limitado por la recta $y = 2x$ y las curvas $y = x^2$ e $y = x^2/2$.

Resolución

Hallamos los puntos de corte:

$$\{y = 2x \ y = x^2 \Rightarrow 2x = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x = x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2.$$

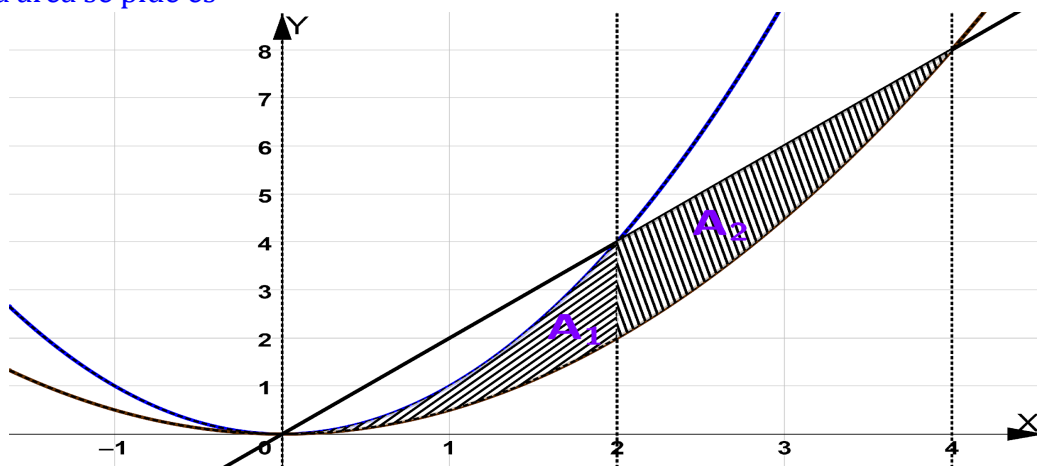
La recta y la curva $y = x^2$ se cortan en $(0, 0)$ y en $(2, 4)$

$$\{y = 2x \ y = \frac{x^2}{2} \Rightarrow 2x = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 - 4x = x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4.$$

La recta y la curva $y = \frac{x^2}{2}$ se cortan en $(0, 0)$ y en $(4, 8)$

$$\{y = x^2 \ y = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0. \text{ Las parábolas se cortan en } (0, 0)$$

El recinto cuya área se pide es



El área que se pide es $A = A_1 + A_2$

Sea $A_1 = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right) dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx$. Una primitiva de la función integrando es $p(x) = \frac{x^3}{6}$.

Por la regla de Barrow, $A_1 = p(2) - p(0) = \frac{2^3}{6} - \frac{0^3}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

Sea $A_2 = \int_2^4 \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) dx$. Una primitiva de la función integrando es $q(x) = x^2 - \frac{x^3}{6} = \frac{6x^2 - x^3}{6}$.

Por la regla de Barrow, $A_2 = q(4) - q(2) = \frac{6 \cdot 4^2 - 4^3}{6} - \frac{6 \cdot 2^2 - 2^3}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

Luego, el área que se pide es $A = A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4$

9.- Calcula $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx$

Resolución

Sea $I = \int \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx$. Descomponemos la fracción en suma de fracciones simples:

Como $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2}$ $x = 1$ $x = -3$, entonces $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$

Luego, $\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3}$

Multiplicando los dos miembros por $(x - 1)(x + 3)$, tenemos $1 = A(x + 3) + B(x - 1)$

- Para $x = 1$, sustituyendo $1 = A(1 + 3) + B(1 - 1) \Rightarrow 1 = 4A$, de donde $A = \frac{1}{4}$

- Para $x = -3$, sustituyendo $1 = A(-3 + 3) + B(-3 - 1) \Rightarrow 1 = -4B$, de donde $B = \frac{-1}{4}$

$$I = \int \left(\frac{1/4}{x-1} + \frac{-1/4}{x+3} \right) dx = \frac{1}{4} \ln \ln |x-1| - \frac{1}{4} \ln \ln |x+3| + k = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + k$$

Una primitiva es $p(x) = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right|$. Por la regla de Barrow, el área es

$$\int_{-2}^0 \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx = p(0) - p(-2) = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{0-1}{0+3} \right| - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{-2-1}{-2+3} \right| = \frac{1}{4} \ln \frac{1/3}{1} = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{9} = \frac{-\ln 9}{4} = \frac{-2 \ln 3}{4}$$

10.- Se sabe que la función $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - \frac{1}{2}x + c, & \text{si } -1 < x < 0 \\ \sqrt{1-x}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases} \text{ es derivable}$$

en el intervalo $(-1, 1)$.

(a) Determina el valor de la constante c .

(b) Calcula la función derivada f' .

Resolución

Como es derivable, en particular será derivable en $x = 0$.

Para $x \neq 0$, f es continua y derivable independientemente del valor de c por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

$$\text{Como debe ser continua en } x = 0, f(x) = f(x) \Rightarrow 2 \cdot 0^2 - \frac{1}{2} \cdot 0 + c = \sqrt{1-0} \Rightarrow c = 1$$

Para $x \neq 0$,

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - \frac{1}{2}, & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}, & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{8x-1}{2}, & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}, & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Como es derivable en } x = 0, f'(x) = f'(x) \Rightarrow \frac{8 \cdot 0 - 1}{2} = \frac{-1}{2\sqrt{1-0}} \Rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2} \text{ (cierto)}$$

Conclusión: debe ser $c = 1$; $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - \frac{1}{2}x + 1, & \text{si } -1 < x < 0 \\ \sqrt{1-x}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$;

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{8x-1}{2}, & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

(c) Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f que son paralelas a la recta de ecuación $y = -x$.

Resolución

Si la recta tangente es paralela a la recta $y = -x$, entonces la pendiente de la recta tangente es 1.

Si $P(x, f(x))$ es el punto de tangencia, entonces

$$f'(x) = -1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{8x-1}{2} = -1, & -1 < x < 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = -1, & 0 \leq x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{8}, & -1 < x < 0 \\ \sqrt{1-x} = \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es

rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

En el primer caso, $x_0 = \frac{-1}{8}$; $f'(x_0) = -1$;

$$f(x_0) = f\left(\frac{-1}{8}\right) = 2\left(\frac{-1}{8}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{-1}{8} + 1 = \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + 1 = \frac{35}{32}.$$

La recta tangente es $rtg: y = -1\left(x + \frac{1}{8}\right) + \frac{35}{32}$; $rtg: y = -x + \frac{31}{32}$

En el segundo caso, $x_0 = \frac{3}{4}$; $f'(x_0) = -1$;

$$f(x_0) = f\left(\frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{3}{4} + 1 = \frac{9}{8} - \frac{3}{8} + 1 = \frac{7}{4}.$$

La recta tangente es $rtg: y = -1\left(x - \frac{3}{4}\right) + \frac{7}{4}$; $rtg: y = -x + \frac{5}{2}$

11.- Sea $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^x (\cos x + \sin x)$.

(a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

Resolución

$$f'(x) = e^x (\cos x + x) + e^x (-\sin x + \cos x) = 2 \cos x \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ó } x = \frac{3\pi}{2}$$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

f es creciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ y decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

(b) Halla los extremos relativos (locales) y absolutos (globales) de f .

Resolución

Mínimo relativo: $x = \frac{3\pi}{2}$, $y = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{\frac{3\pi}{2}} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2}\right) = -e^{\frac{3\pi}{2}} \cong -111$. Punto

$$M\left(\frac{3\pi}{2}, -e^{\frac{3\pi}{2}}\right)$$

Máximo relativo: $x = \frac{\pi}{2}$, $y = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \cong 5$. Punto $M\left(\frac{\pi}{2}, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$

Como $f(0) = e^0 (\cos 0 + 0) = 1$; $f(2\pi) = e^{2\pi} (\cos 2\pi + 2\pi) = e^{2\pi} \cong 535$, entonces

el máximo absoluto es $x = 2\pi$, $y = e^{2\pi}$ y el mínimo absoluto es $x = \frac{3\pi}{2}$, $y = -e^{\frac{3\pi}{2}}$

12.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x-1)e^{2x}$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, e^2)$.

Resolución

Si F es una primitiva de f , entonces $F(x) = \int (x-1)e^{2x} dx$. Usamos el método de integración por partes:

$$\left[u = (x-1) dx \quad dv = e^{2x} dx \quad v = \frac{1}{2}e^{2x} \right];$$

$$F(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{(x-1)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} e^{2x} + k = \frac{(2x-3)e^{2x}}{4} + k.$$

Como F pasa por $(1, e^2)$, entonces $F(1) = e^2 \Rightarrow \frac{(2 \cdot 1 - 3)e^{2 \cdot 1}}{4} + k = e^2 \Rightarrow k = \frac{5e^2}{4}$

Luego, la primitiva que se busca es $F(x) = \frac{(2x - 3)e^{2x} + 5e^2}{4}$

13.- Considera la integral definida $I = \int_1^9 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$

(a) Expresa la anterior integral definida aplicando el cambio de variable $1 + \sqrt{x} = t$

Resolución

Haciendo el cambio $t = 1 + \sqrt{x}$; $\sqrt{x} = t - 1$; $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$; $dx = 2\sqrt{x} dt = (2t - 2)dt$.

Si $x = 1$, $t = 1 + \sqrt{1} = 2$; si $x = 9$, $t = 1 + \sqrt{9} = 4$;

$$I = \int_1^9 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx = \int_2^4 \frac{2t - 2}{t} dt = \int_2^4 \left(2 - \frac{2}{t}\right) dt$$

(b) Calcula I.

Resolución

Una primitiva de la función del integrando es $p(t) = 2t - 2 \ln|t|$.

Por la regla de Barrow, $I = p(4) - p(2) = 2 \cdot 4 - 2 \ln 4 - [2 \cdot 2 - 2 \ln 2] = 4 - 2 \ln 2$

14.-

(a) Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ que es paralela a la recta $4x + y + 3 = 0$.

Resolución

Si la recta tangente es paralela a la recta $y = -4x - 3$, entonces la pendiente de la recta tangente es -4 .

Si $f(x) = x^2$ y $P(x, f(x))$ es el punto de tangencia, entonces $f'(x) = 2x = -4 \Rightarrow x = -2$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es

rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. En este caso, $x_0 = -2$; $f'(x_0) = -4$; $f(x_0) = f(-2) = (-2)^2 = 4$.

La recta tangente es rtg: $y = -4(x + 2) + 4$; rtg: $y = -4x - 4$

(b) Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ que pasan por el punto $(2, 0)$.

Resolución

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2$ en un punto $A(a, f(a))$ es

rtg: $y = f'(a)(x - a) + f(a) \Rightarrow$ rtg: $y = 2a(x - a) + a^2 \Rightarrow$ rtg: $y = 2ax - a^2$.

Como la recta tangente pasa por $(2, 0) \Rightarrow 0 = 2a \cdot 2 - a^2 = 4a - a^2 = a(4 - a)$. De donde, $a = 0$ ó $a = 4$

Sustituyendo, se obtienen dos rectas tangentes: rtg1: $y = 0$; rtg2: $y = 8x - 16$.

15.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$

(a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en un punto de la misma de ordenada $y = 1$, teniendo en cuenta que dicha recta tangente tiene pendiente negativa.

Resolución

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 = \frac{3+2x-x^2}{3}$ en un punto $A(a, f(a))$ es $rtg: y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Al ser la ordenada de la gráfica de f es 1, entonces

$$1 = \frac{3+2a-a^2}{3} \Rightarrow 2a - a^2 = a(2 - a) = 0 \Rightarrow a = 0, a = 2$$

Como $f'(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} = \frac{2-2x}{3}$, entonces si $a = 0 \Rightarrow f'(a) = f'(0) = \frac{2-2.0}{3} = \frac{2}{3} > 0$.

Como la pendiente es negativa, debe ser $a = 2$, $f'(a) = f'(2) = \frac{2-2.2}{3} = \frac{-2}{3} < 0$, $f(a) = 1$

$$rtg: y = \frac{-2}{3}(x - 2) + 1 \Rightarrow rtg: y = \frac{-2x}{3} + \frac{7}{3} \Rightarrow rtg: y = \frac{7-2x}{3}$$

(b) Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica de f , la recta tangente obtenida y el eje de ordenadas.

Resolución

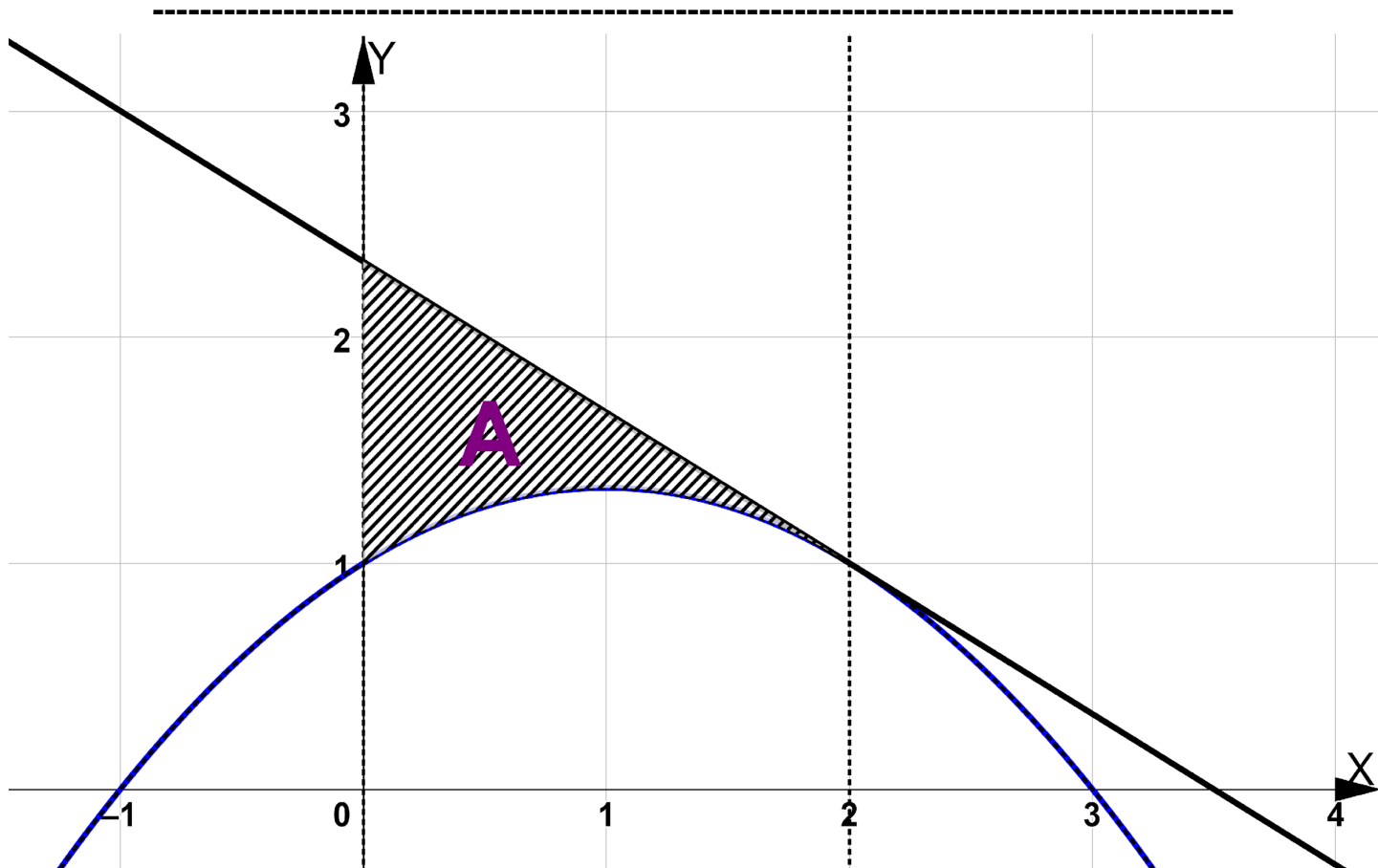
Como $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3+2x-x^2}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2} \Rightarrow x = -1, x = 3$ y $f(0) = 1$, la gráfica corta a los ejes en $(-1, 0)$, $(3, 0)$ y $(0, 1)$

$$\text{Puntos de corte de la parábola y recta: } \left\{ y = \frac{3+2x-x^2}{3}, y = \frac{7-2x}{3} \Rightarrow \frac{3+2x-x^2}{3} = \frac{7-2x}{3} \right.$$

Luego, $3 + 2x - x^2 = 7 - 2x \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$. El punto de corte es $(2, 1)$.

$f'(x) = \frac{2-2x}{3} = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $y = f(1) = \frac{3+2.1-1^2}{3} = \frac{4}{3}$ y como la parábola es cóncava, el vértice de la parábola (máximo de f) es $V\left(1, \frac{4}{3}\right)$

La región cuya área se pide es



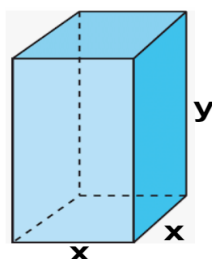
El área que se pide es $A = \int_0^2 \left(\frac{7-2x}{3} - \frac{3+2x-x^2}{3} \right) dx = \int_0^2 \frac{7-2x-3-2x+x^2}{3} dx = \int_0^2 \frac{(x-2)^2}{3} dx$.

Una primitiva de la función del integrando es $p(x) = \frac{\frac{(x-2)^3}{3}}{3} = \frac{(x-2)^3}{9}$. Por la regla de Barrow,

$$A = p(2) - p(0) = \frac{(2-2)^3}{9} - \frac{(0-2)^3}{9} = \frac{8}{9} \cong 0,89 \text{ u}^2.$$

16.- Se quiere fabricar una caja abierta de chapa con base cuadrada y con 32 litros de capacidad. Halla las dimensiones de la caja que precisa la menor cantidad de chapa.

Resolución



Como el volumen o capacidad es $32 \text{ l} = 32 \text{ dm}^3$, entonces $x^2 y = 32 \Rightarrow y = \frac{32}{x^2}$

Función a minimizar: $f(x) = \text{superficie} = x^2 + 4xy = x^2 + 4x \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}$

$$f'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} = \frac{2x^3 - 128}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 128 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{128}{2}} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$f''(x) = (2x - 128x^{-2})' = 2 + 256x^{-3}$; $f''(4) = 2 + 256 \cdot 4^{-3} > 0$. Luego, en $x = 4$, f tiene el mínimo.

En este caso, $y = \frac{32}{4^2} = 2$.

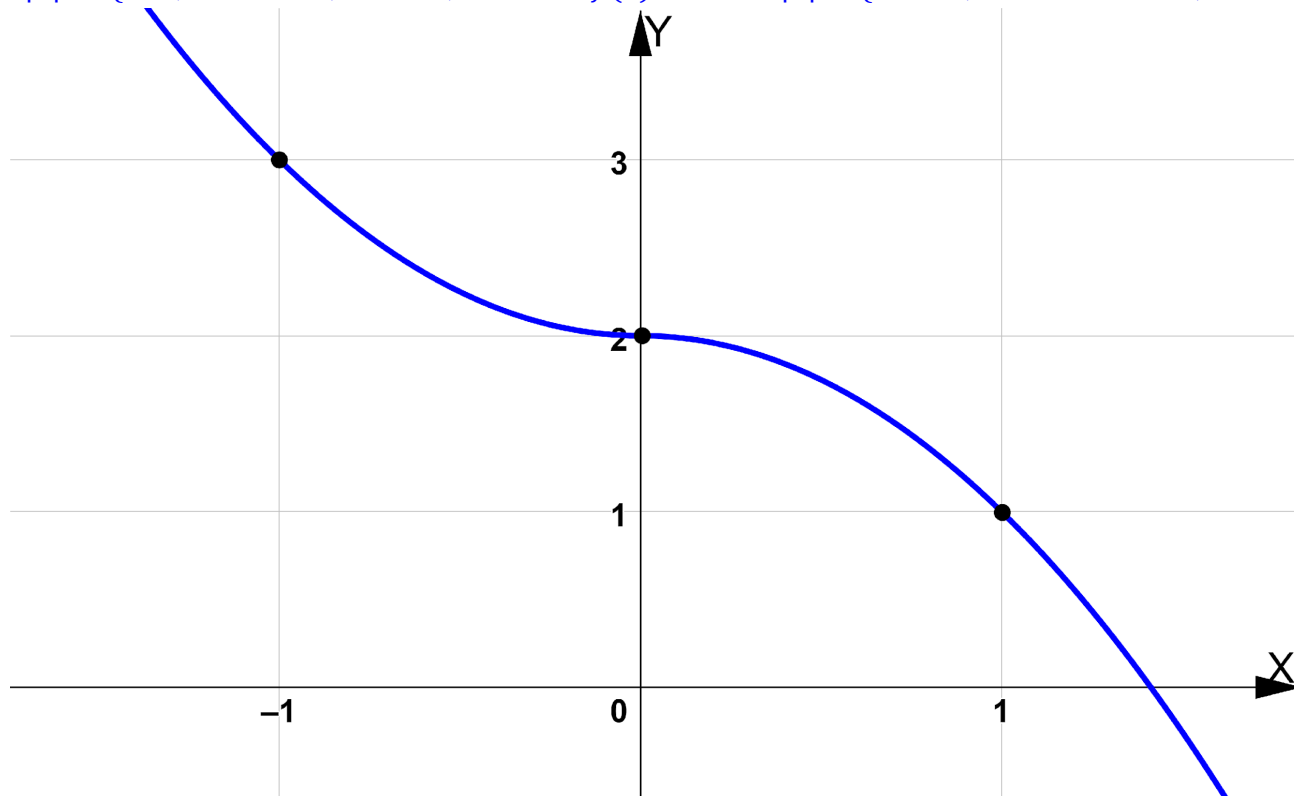
Por tanto, las dimensiones de la caja son 4 dm x 4 dm x 2 dm.

17.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 2 - x|x|$.

(a) Esboza la gráfica de f .

Resolución

Como $|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, entonces $f(x) = 2 - x|x| = \begin{cases} 2 + x^2, & \text{si } x < 0 \\ 2 - x^2, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



(b) Estudia la derivabilidad de f en $x = 0$.

Resolución

Si $x \neq 0$, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 + 0 = 2$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 - 0 = 2 = f(0)$. Luego, f es continua en $x = 0$

Para $x \neq 0$, $f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 0 \\ -2x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 2 \cdot 0 = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -2 \cdot 0 = 0$. Luego, f es derivable en $x = 0$

(c) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

Resolución

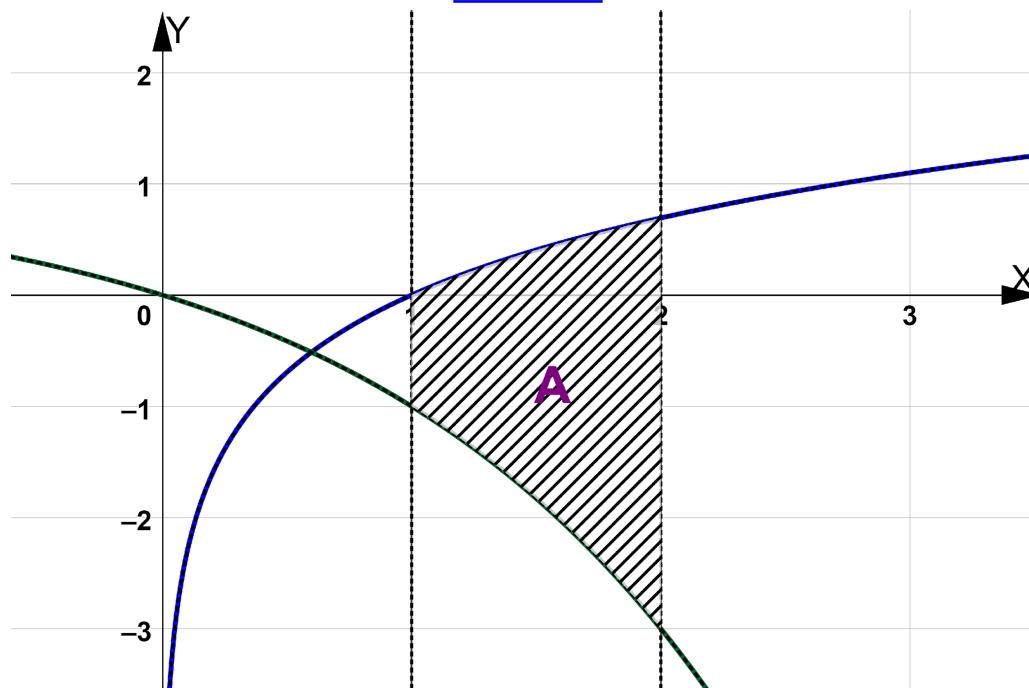
La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es

rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; $x_0 = 2$, $f'(x_0) = f'(2) = -2 \cdot 2 = -4$; $f(x_0) = f(2) = 2 - 2^2 = -2$.

La recta tangente es rtg: $y = -4(x - 2) - 2$; rtg: $y = -4x + 6$

18.- Considera las funciones $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas, respectivamente, por $f(x) = \ln(x)$ y $g(x) = 1 - 2^x$. Calcula el área del recinto limitado por las rectas $x = 1$ y $x = 2$ y las gráficas de f y g .

Resolución



$A = \int_1^2 [\ln \ln x - (1 - 2^x)] dx$. Usamos el método de integración por partes para hallar una primitiva de $\ln x$:

$$\left[u = \ln \ln x \quad \frac{1}{x} dx \quad dv = dx \quad v = x \right] \Rightarrow \int \ln \ln x \, dx = x \ln \ln x - \int 1 \, dx = x \ln \ln x - x = x(\ln \ln x - 1) + k$$

Luego, una primitiva de la función integrando es $p(x) = x(\ln \ln x - 1) - x + \frac{2^x}{\ln 2}$. Por la regla de Barrow,

$$A = p(2) - p(1) = 2(\ln \ln 2 - 1) - 2 + \frac{2^2}{\ln 2} - \left[1(\ln \ln 1 - 1) - 1 + \frac{2^1}{\ln 2} \right] = 2 \ln \ln 2 + 1 \cong 0,386 \, u^2$$

$$A = 2 \ln \ln 2 - 2 - 2 + \frac{4}{\ln 2} + 1 + 1 - \frac{2}{\ln 2} = 2 \ln \ln 2 + \frac{2}{\ln 2} - 2 \cong 2,2717 \, u^2$$

19.- Se sabe que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{a}{2x} \right)$ es finito. Determina el valor de a y calcula el límite.

Resolución

Vamos a hallar el límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - ae^x + a}{2x(e^x - 1)} = \frac{2 \cdot 0 - ae^0 + a}{2 \cdot 0(e^0 - 1)} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

$$\text{Aplicamos la regla de L'Hôpital: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x - ae^x + a)'}{[2x(e^x - 1)]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - ae^x}{2(e^x - 1) + 2xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - ae^x}{2e^x(1 + x) - 2} = \frac{2 - a}{0}$$

Por tanto, por la regla de L'Hôpital, el límite es $\frac{2 - a}{0}$.

Como queremos que el límite sea finito, debe ser $2 - a = 0$ porque de lo contrario el límite valdría $\pm\infty$. Luego, $2 - a = 0 \rightarrow a = 2$

Para $a = 2$, calculemos el límite, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2e^x}{2e^x(1+x) - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{e^x(1+x) - 1} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

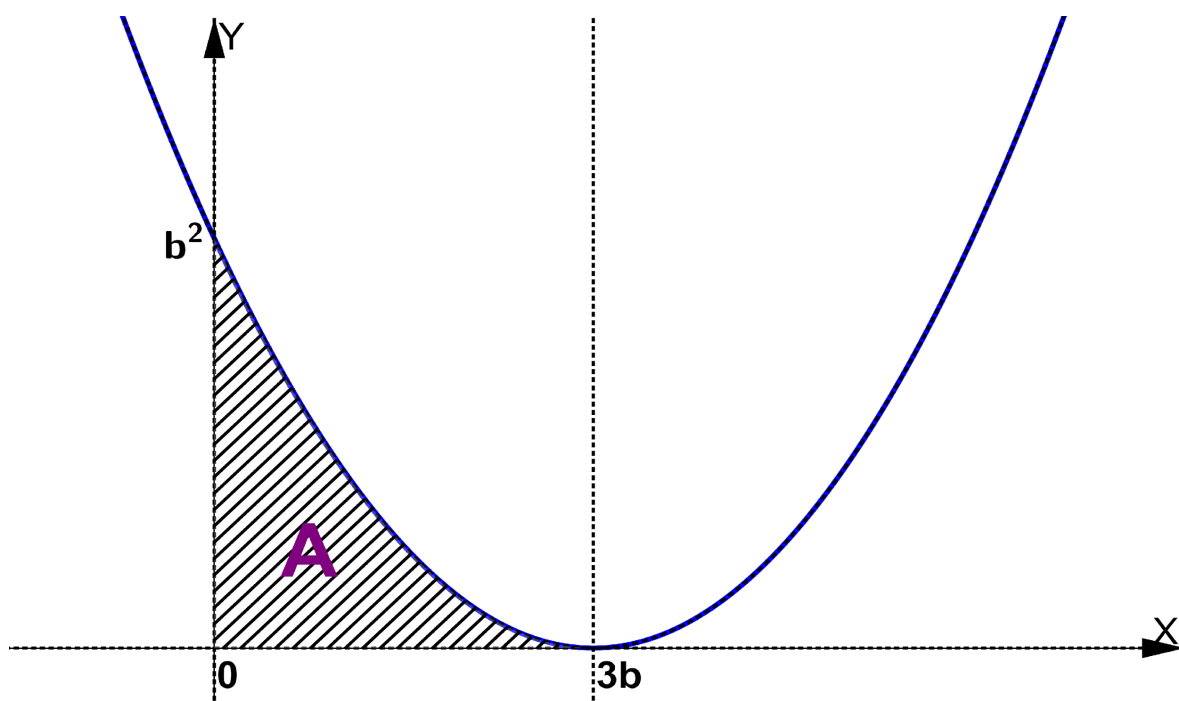
Aplicamos de nuevo la regla de L'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x)'}{[e^x(1+x) - 1]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{e^x(1+x) + e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2+x} = \frac{-1}{2}$

Por tanto, por la regla de L'Hôpital, el límite que se pide vale $\frac{-1}{2}$.

20.- Determina b sabiendo que $b > 0$ y que el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = \left(\frac{1}{3}x - b\right)^2$ y los ejes coordenados es igual a 8.

Resolución

$\left(\frac{1}{3}x - b\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3b$ y para $x = 0$, $y = (-b)^2 = b^2 \Rightarrow$ la parábola corta a los ejes en $(3b, 0)$ y $(0, b^2)$. Como sólo corta al eje X en un punto, $(3b, 0)$, este punto es el vértice.



$8 = A = \int_0^{3b} \left(\frac{1}{3}x - b\right)^2 dx$. Una primitiva es $p(x) = \left(\frac{1}{3}x - b\right)^3$. Por la regla de Barrow,

$8 = p(3b) - p(0) = \left(\frac{1}{3}3b - b\right)^3 - \left(\frac{1}{3}0 - b\right)^3 = -(-b)^3 = b^3$. Luego, $b = 2$

21.- (prueba ordinaria) De la función $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$ y que $f(2) = 0$.

(a) Determina f .

Resolución

$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{3}{(x+1)^2} dx = \frac{-3}{x+1} + k$; $f(2) = 0 \Rightarrow \frac{-3}{2+1} + k = 0 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow$

$$f(x) = \frac{-3}{x+1} + 1$$

(b) Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

Resolución

Si F es una primitiva de f , entonces $F(x) = \int \left(\frac{-3}{x+1} + 1 \right) dx = -3 \ln |x+1| + x + c$.

Como F pasa por $(0, 1)$, entonces $F(0) = 1 \Rightarrow -3 \ln |0+1| + 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1$

Luego, la primitiva que se busca es $F(x) = -3 \ln |x+1| + x + 1$

22.- (prueba ordinaria) Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$.

(a) Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

Resolución

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-2) = (x^2-1)(x-2) = x^3 - 2x^2 - x + 2 ; f'(x) = 3x^2 - 4x - 1.$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es

$$\text{rtg: } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \text{ y la de la recta normal es } rn: y = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$

$$\text{En este caso, } x_0 = 1, f'(x_0) = f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = -2,$$

$$f(x_0) = f(1) = (1+1)(1-1)(1-2) = 0.$$

$$\text{rtg: } y = -2(x-1) + 0 ; \text{rtg: } y = -2x + 2 ; \quad rn: y = \frac{-1}{-2}(x-1) + 0 ; rn: y = \frac{1}{2}(x-1)$$

(b) Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f . ¿Tiene puntos de inflexión la gráfica de f ?

Resolución

$$= 6x - 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Punto de inflexión: } x = \frac{2}{3} \quad y = \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{2}{3} + 1 \right) \left(\frac{2}{3} - 1 \right) \left(\frac{2}{3} - 2 \right) = \frac{5}{3} \cdot \frac{-1}{3} \cdot \frac{-4}{3} = \frac{20}{27}$$

23.- (prueba ordinaria) Se sabe que la función $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{x^2+a}{x+1}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \text{ es continua}$$

en $(-1, +\infty)$.

(a) Halla el valor de a . ¿Es f derivable en $x = 0$?

Resolución

$$E \Rightarrow 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = \frac{0^2+a}{0+1}. a = 3$$

Para $x \neq 0$, f es derivable y

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4, & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{2x(x+1) - (x^2+3) \cdot 1}{(x+1)^2}, & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 4, & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$2 \cdot 0 - 4 = -4 \neq \frac{0^2+2 \cdot 0-3}{(0+1)^2} = -3. \text{ Luego, } f \text{ no es derivable en } x = 0$$

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

Resolución

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0, & -1 < x < 0 \\ \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = 0, & x > 0 \end{cases} ; \text{ para } -1 < x < 0, 2x - 4 = 0, x = 2 \text{ (imposible) } \acute{o}$$

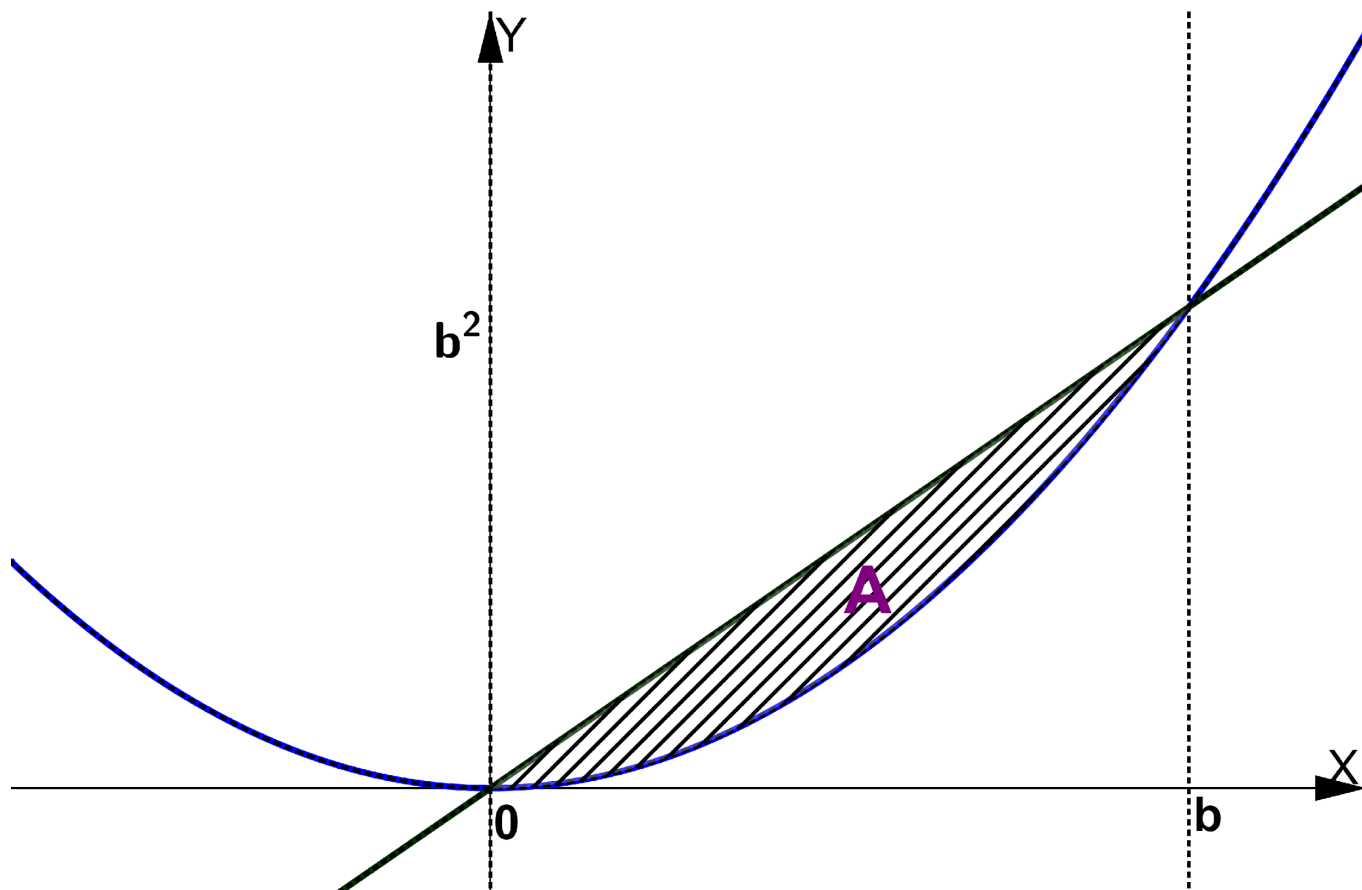
$$x^2 + 2x - 3 = 0, x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow x = 1 \text{ o } x = -3 \text{ (imposible)}.$$

de111

24.- (prueba ordinaria) Determina b sabiendo que $b > 0$ y que el área de la región limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = bx$ es igual a $9/2$.

Resolución

P curva con la recta: $\{x^2 = bx \Rightarrow x^2 - bx = x(x - b) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } x = b$. Los puntos de corte son $(0, 0)$ y (b, b^2) .



$$\frac{9}{2} = A = \int_0^b (bx - x^2) dx. \text{ Una primitiva es } p(x) = \frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3} = \frac{3bx^2 - 2x^3}{6}. \text{ Por la regla de Barrow,}$$

$$\frac{9}{2} = p(b) - p(0) = \frac{3bb^2 - 2b^3}{6} - \frac{3b \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3}{6} = \frac{b^3}{6} \Rightarrow 2b^3 = 54 \Rightarrow b^3 = 27. \text{ Luego, } b = 3$$