

Μεταβολή μέτρου και μέτρο μεταβολής διανυσματικού μεγέθους

Έστω ένα οποιοδήποτε διανυσματικό μέγεθος (ταχύτητα, δύναμη, ορμή, ένταση πεδίου). Παρακάτω θα αναφερθούμε στην ταχύτητα, αλλά με την ίδια λογική γενικεύουμε για όλα τα διανυσματικά μεγέθη.

A. Μεταβολή μέτρου ταχύτητας $\Delta|\vec{v}|$

Σημαίνει **πόσο μεταβάλλεται το μέτρο** της ταχύτητας. Για να το υπολογίσουμε αφαιρούμε μέτρα ταχυτήτων, δηλαδή πρόκειται για **απλή αφαίρεση αριθμών**.

Για παράδειγμα, αν η αρχική ταχύτητα ενός σώματος έχει μέτρο $|\vec{v}_1| = 4\text{m/s}$ και η τελική ταχύτητά του έχει μέτρο $|\vec{v}_2| = 6\text{m/s}$, τότε η μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας θα είναι $\Delta|\vec{v}| = |\vec{v}_2| - |\vec{v}_1| \rightarrow \Delta|\vec{v}| = 2\text{ m/s}$.

Για τον υπολογισμό της μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας δεν μας ενδιαφέρει η διεύθυνσή της.

B. Μέτρο μεταβολής ταχύτητας $|\Delta\vec{v}|$

Στην περίπτωση αυτή αφαιρούμε διανύσματα και υπολογίζουμε το μέτρο του διανύσματος που προκύπτει από την αφαίρεση αυτή, δηλαδή $|\Delta\vec{v}| = |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|$.

Πώς όμως γίνεται στην πράξη αυτό; Η απάντηση εξαρτάται από το αν τα διανύσματα είναι συγγραμμικά (στην ίδια διεύθυνση) ή όχι.

α. Συγγραμμικά διανύσματα

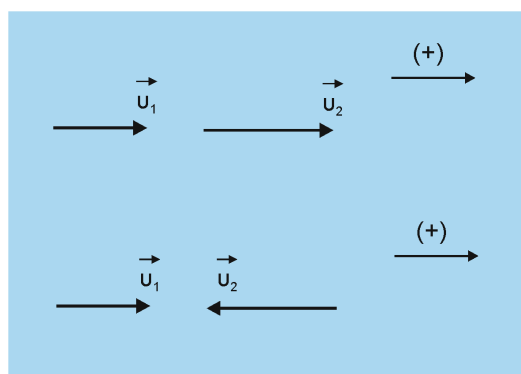
Έστω τα συγγραμμικά διανύσματα ταχύτητας $\vec{v}_1$ (αρχική) και $\vec{v}_2$ (τελική). Ορίζουμε θετική φορά, **αφαιρούμε αλγεβρικές τιμές** και υπολογίζουμε το μέτρο της αφαίρεσης αυτής, δηλαδή $|\Delta\vec{v}| = |v_2 - v_1|$.

Για παράδειγμα αν $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ προς τα δεξιά με αντίστοιχα μέτρα 4m/s και 6m/s , τότε

$$|\Delta\vec{v}| = |v_2 - v_1| \rightarrow |\Delta\vec{v}| = |6 - 4| \text{ m/s} = 2 \text{ m/s}$$

(Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να δουλέψουμε με μέτρα, βάζοντας

προκαταβολικά το πρόσημο, δηλαδή $|\Delta\vec{v}| = ||\vec{v}_2| - |\vec{v}_1|| \rightarrow |\Delta\vec{v}| = |6 - 4| \text{ m/s} = 2 \text{ m/s}$



).

Σχόλιο

Επειδή εδώ $u_2 > u_1$, το διάνυσμα $\Delta \vec{u}$ έχει κατεύθυνση προς τα θετικά.

Αν όμως η $\vec{u}_1$ είναι προς τα δεξιά με μέτρο 4m/s και η $\vec{u}_2$ προς τα αριστερά με

μέτρο 6m/s, τότε $|\Delta \vec{u}| = |u_2 - u_1| \rightarrow |\Delta \vec{u}| = |-6 - 4| \text{ m/s} = 10 \text{ m/s}$

(Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να δουλέψουμε με μέτρα, βάζοντας προκαταβολικά το πρόσημο, δηλαδή

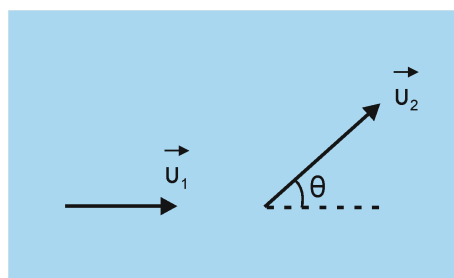
$$|\Delta \vec{u}| = |-|u_2| - |u_1|| \rightarrow |\Delta \vec{u}| = |-6 - 4| \text{ m/s} = 10 \text{ m/s}$$

Σχόλιο

Επειδή εδώ $u_2 < u_1$, το διάνυσμα $\Delta \vec{u}$ έχει κατεύθυνση προς τα αρνητικά.

β. Μη συγγραμμικά διανύσματα

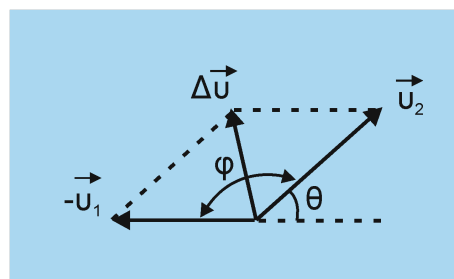
Έστω τα μη συγγραμμικά διανύσματα ταχύτητας $\vec{u}_1$ (αρχική) και $\vec{u}_2$ (τελική).

**ι. Η μέθοδος του παραλληλογράμμου**

Για τη διανυσματική μεταβολή της ταχύτητας ισχύει

$$\Delta \vec{u} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1 \rightarrow \Delta \vec{u} = \vec{u}_2 + (-\vec{u}_1) \quad (\text{η αφαίρεση είναι η πρόσθεση του αντιθέτου}).$$

Στο διάνυσμα της $\vec{u}_2$ προσθέτουμε το $-\vec{u}_1$ και από τον κανόνα του παραλληλογράμμου, η διαγωνίός του είναι το διάνυσμα $\Delta \vec{u}$. Για το μέτρο της μεταβολής της ταχύτητας, δηλαδή το μήκος της διαγωνίου του παραλληλογράμμου ισχύει



$$|\Delta \vec{u}| = \sqrt{|\vec{u}_1|^2 + |\vec{u}_2|^2 + 2 \cdot |\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2| \cdot \cos \varphi}$$

όπου φ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της $\vec{v}_2$ με το διάνυσμα $-\vec{v}_1$ και ισχύει

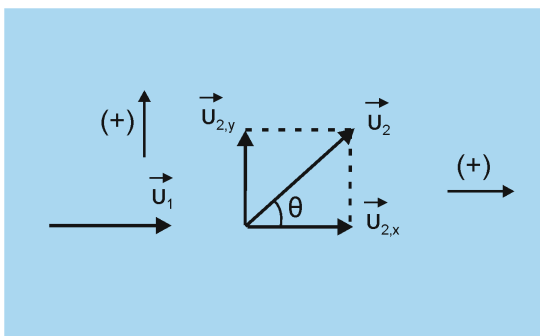
$\varphi = \pi - \theta$. Η τελευταία σχέση προκύπτει από το νόμο συνημιτόνων.

ii. Η ανάλυση σε άξονες

Αναλύουμε τις ταχύτητες σε βολικά επιλεγμένο σύστημα αξόνων και αφαιρούμε σε κάθε άξονα ξεχωριστά. Έτσι εκμεταλλευόμαστε την περίπτωση των συγγραμμικών διανυσμάτων, που είδαμε παραπάνω. Θα έχουμε

$$|\Delta v_x| = |v_{2,x} - v_{1,x}| \text{ και}$$

$$|\Delta v_y| = |v_{2,y} - v_{1,y}|$$



Για την περίπτωση του σχήματος θα έχουμε $v_{1,y} = 0$

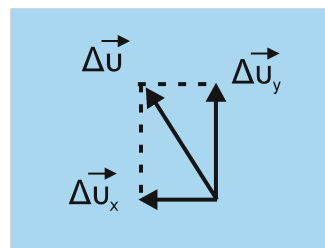
και αν $v_{2,x} < v_{1,x}$, το διάνυσμα Δv_x θα έχει κατεύθυνση

προς τα αριστερά και το διάνυσμα Δv_y θα έχει κατεύθυνση προς τα πάνω, οπότε παίρνουμε το διπλανό σχήμα. Επομένως καταλήγουμε έτσι σε

δύο διανύσματα Δv_x και Δv_y που είναι πάντοτε κάθετα μεταξύ τους. Η

συνισταμένη τους είναι το διάνυσμα Δv της μεταβολής της ταχύτητας. Για το μέτρο της μεταβολής ταχύτητας θα ισχύει

$$|\Delta v| = \sqrt{|\Delta v_x|^2 + |\Delta v_y|^2}$$



Σχόλιο

Στην περίπτωση της αφαίρεσης μη συγγραμμικών διανυσμάτων, επιλέγουμε τη μέθοδο ανάλογα με το πρόβλημα. Για παράδειγμα, στην οριζόντια βολή βολεύει η ανάλυση σε άξονες, αφού στον οριζόντιο άξονα x η ταχύτητα δεν μεταβάλλεται. Επομένως η μεταβολή της ταχύτητας οφείλεται στη μεταβολή της κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας και το διάνυσμα Δv μεταξύ δύο

στιγμών είναι ίσο με το διάνυσμα Δv_y . Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα Δv είναι

κατακόρυφο και το μέτρο του μεταξύ δύο στιγμών t_1 και t_2 με $t_2 > t_1$ θα είναι ίσο με

$$|\Delta v| = |\Delta v_y| = |v_{y,2} - v_{y,1}| = g \cdot (t_2 - t_1)$$

Περισσότερα για τη μεταβολή ταχύτητας στην οριζόντια βολή μπορείτε να δείτε [εδώ](#).

Παπάζογλου Αποστόλης

apostolospapazoglou@gmail.com