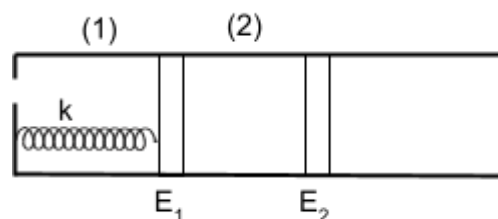


Μια ισόθερμη και ένα ελατήριο

Το οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο που φαίνεται στο σχήμα, έχει στο εσωτερικό του δύο έμβολα E_1 και E_2 , τα οποία ισορροπούν ακίνητα. Έτσι το δοχείο χωρίζεται σε δύο μέρη 1 και 2, που περιέχουν αέρα, ίσου όγκου $V = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. Στο έμβολο E_1 βρίσκεται στερεωμένο το ένα άκρο οριζόντιου



ιδανικού ελατηρίου, που έχει το άλλο άκρο του δεμένο στο αριστερό ακλόνητο τοίχωμα - βάση του δοχείου. Το τοίχωμα αυτό έχει μικρή τρύπα, ώστε ο χώρος 1, που βρίσκεται το ελατήριο να επικοινωνεί με την ατμόσφαιρα.

i) Αποδείξτε ότι το ελατήριο δεν είναι παραμορφωμένο και υπολογίστε το φυσικό του μήκος.

ii) Σπρώχνουμε αργά το έμβολο E_2 προς τα αριστερά και παρατηρούμε ότι και το έμβολο E_1 μετακινείται προς τα αριστερά.

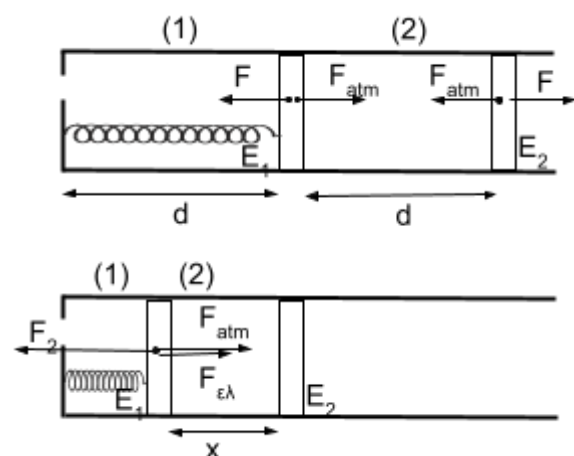
α) Γιατί μετακινείται το έμβολο E_1 ;

β) Αν το έμβολο E_2 φτάσει τελικά στη θέση που βρισκόταν αρχικά το έμβολο E_1 ποιος θα είναι ο τελικός όγκος του αέρα ανάμεσα στα δύο έμβολα; Θεωρήστε τη μεταβολή ισόθερμη.

γ) Ποια θα είναι η τελική πίεση του αέρα ανάμεσα στα δύο έμβολα;

Δίνονται: η σταθερά του ελατηρίου $k = 1000 \text{ N/m}$, το εμβαδόν της κυκλικής βάσης του δοχείου $A = 100 \text{ cm}^2$ και η ατμοσφαιρική πίεση $p_{atm} = 10^5 \text{ N/m}^2$.

Απάντηση



i) Η πίεση του αέρα στο χώρο 2, μπορεί να βρεθεί από τη συνθήκη ισορροπίας του εμβόλου E_2 :

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F = F_{atm}$$

$$\Leftrightarrow F/A = F_{atm}/A \Leftrightarrow p_2 = p_{atm}$$

δηλαδή η πίεση στο χώρο 2 είναι ατμοσφαιρική.

Η πίεση στο χώρο 1 είναι σε κάθε περίπτωση ατμοσφαιρική λόγω της τρύπας.

Τότε στο E_1 , που επίσης ισορροπεί, ασκείται δύναμη $F_{atm} = p_{atm}A$ και από τις δύο πλευρές, άρα το ελατήριο δε μπορεί να ασκεί δύναμη δηλαδή έχει το φυσικό του

μήκος. Άρα το φυσικό μήκος του ελατηρίου ισούται με την ακμή d του κυλινδρικού χώρου 1 ή 2:

$$V = A \cdot d \Leftrightarrow d = \frac{V}{A} \Leftrightarrow d = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{10^{-2}} \Leftrightarrow d = 0,2m$$

ii) α) Σπρώχνοντας το έμβολο, ο αέρας στο χώρο 2 συμπιέζεται ισόθερμα, άρα η πίεση στο χώρο 2 αυξάνει, ενώ στο χώρο 1 η πίεση λόγω της τρύπας παραμένει ατμοσφαιρική. Άρα στο έμβολο E_1 γίνεται $F_2 > F_{atm}$, οπότε αρχίζει να κινείται προς τα αριστερά (ενώ εμφανίζεται και δύναμη από το ελατήριο).

β) Αφού το έμβολο E_1 ισορροπήσει, στη θέση που ήταν αρχικά το E_2 το ελατήριο έχει συμπιεστεί κατά x ώστε

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F_2 = F_{atm} + F_{ελ} \Leftrightarrow F_2/A = F_{atm}/A + F_{ελ}/A$$

$$\Leftrightarrow p_2 = p_{atm} + kx/A \Leftrightarrow p_2 = 10^5 + (1000/10^{-2}) \cdot x$$

$$\Leftrightarrow p_2 = 10^5 + 10^5 \cdot x \quad (1)$$

Ο αέρας στο χώρο 2 έχει όγκο

$$V_2 = A \cdot x \Leftrightarrow V_2 = 10^{-2} \cdot x \quad (2)$$

Η μεταβολή του αέρα στο χώρο 2 είναι ισόθερμη. Από το νόμο Boyle

$$p_{αρχ} V_{αρχ} = p_2 V_2 \xrightarrow[(2)]{(1)} 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = (10^5 + 10^5 \cdot x) \cdot 10^{-2} \cdot x \Leftrightarrow 10^3 x^2 + 10^3 x - 2 \cdot 10^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 5x - 1 = 0. \text{ Η θετική λύση αυτής της εξίσωσης είναι}$$

$$x = \frac{-5 + \sqrt{25 + 20}}{10} \Leftrightarrow x = 0,171m$$

Τότε από την (2) ο αέρας του χώρου 2 θα έχει όγκο $V_2 = 1,71 \cdot 10^{-3} m^3$.

$$\gamma) \text{ Από τη (1) } p_2 = 10^5 + 10^5 \cdot 0,171 \Leftrightarrow p_2 = 1,171 \cdot 10^5 N/m^2$$

Α ν δ ρ έας Ρ ι ζ όπουλος