

Цель занятия:

Деятельностная:

- создать условия для сознательного усвоения учащимися свойств и действий с тригонометрическими функциями произвольного угла.

Содержательная:

- расширить знания учеников за счет включения новых определений: обратных тригонометрических функций (функция арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса);
- познакомиться с задачами на построение и анализ тригонометрических функций.

План занятия:

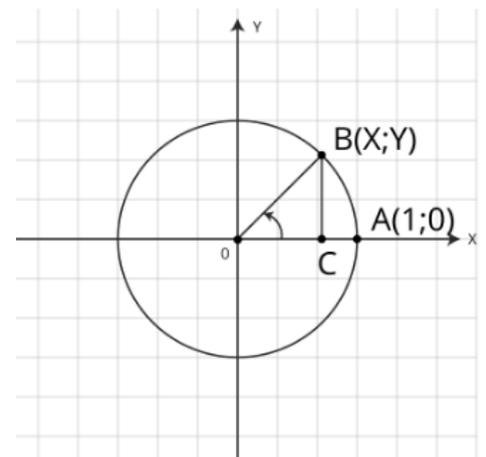
1. Зависимость между синусом, косинусом одного и того же угла.
2. Арксинус, арккосинус, арктангенс числового аргумента

1. Зависимость между синусом, косинусом одного и того же угла

Образовался прямоугольный треугольник ОВС. По теореме Пифагора $OB^2 = OC^2 + BC^2$. Катет ОС – это абсцисса точки В или $\cos \alpha$, катет ВС – её ордината, или $\sin \alpha$, а гипотенуза ОВ – радиус единичной окружности, $OB = 1$. Получаем формулу:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

В тригонометрии её называют основным тригонометрическим тождеством. Она связывает синус с косинусом. А это значит, что зная значения синуса, можно найти значения косинуса и наоборот.



2. Арксинус, арккосинус, арктангенс числового аргумента

Арксинусом числа a называется такое число из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a .

Запись $x = \arcsin a$ означает: 1) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ и 2) $\sin x = a$.

Свойства $\arcsin a$:

1. $\sin(\arcsin a) = a$.
2. $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Арккосинусом числа a называется такое число из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a .

Запись $x = \arccos a$ означает: 1) $0 \leq x \leq \pi$ и 2) $\cos x = a$.

Свойства $\arccos a$:

1. $\cos(\arccos a) = a$.
2. $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Арктангенсом числа a называется такое число из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равняется a .

Запись $x = \operatorname{arctg} a$ означает: 1) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ и 2) $\operatorname{tg} x = a$.

Свойства $\operatorname{arctg} a$:

- $\operatorname{tg} (\operatorname{arctg} a) = a$.
- $\operatorname{arctg} (-a) = -\operatorname{arctg} a$.

Арккотангенсом числа a называется такое число из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a .

Запись $x = \operatorname{arcctg} a$ означает: 1) $0 < x < \pi$ и 2) $\operatorname{ctg} x = a$.

Свойства $\operatorname{arcctg} a$:

- $\operatorname{ctg} (\operatorname{arcctg} a) = a$.
- $\operatorname{arcctg} (-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

Обратите внимание на то, что $\operatorname{arcsin} a$ и $\operatorname{arccos} a$ определены только для $-1 \leq a \leq 1$, $\operatorname{arctg} a$ и $\operatorname{arcctg} a$ определены для всех действительных a .

Значения обратных тригонометрических функций для наиболее употребительных значений аргумента приведены в следующих таблицах.

| Значения x | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 |
|---------------------------|-----------------|-----------------|----------------------|----------------------|-----------------|------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|
| Значение выражения | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{2}$ |
| $\operatorname{arcsin} x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{2}$ |
| $\operatorname{arccos} x$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | 0 | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π |

| Значения x | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | -1 | $-\sqrt{3}$ |
|---------------------------|-----------------|----------------------|-----------------|-----------------|-----------------------|------------------|------------------|
| Значение выражения | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{3}$ |
| $\operatorname{arctg} x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{3}$ |
| $\operatorname{arcctg} x$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ |

Арксинусы и арккосинусы произвольных конкретных чисел из промежутка $[-1; 1]$ можно находить приближенно с помощью математических таблиц или калькуляторов.

Разобранные задания

Задание 1. Вычислить: 1) $\operatorname{arcsin} \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{arcsin} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решение.

1) Так как $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$ и $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Хотя $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, но $\arcsin \frac{1}{2} \neq \frac{5\pi}{6}$, ибо $\frac{5\pi}{6}$ содержится вне промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Поскольку $-\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sin \frac{\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ и $-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

Задание 2. Вычислить $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \arccos \frac{1}{7}\right)$.

Решение. Воспользовавшись сначала периодичностью функции $y = \sin x$, затем формулами приведения и, наконец, определением арккосинуса числа, получим:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \arccos \frac{1}{7}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + \arccos \frac{1}{7}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{1}{7}\right) = \cos\left(\arccos \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7}$$

Задание 3. Вычислить $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Решение. Применяя свойство арккосинуса и формулы приведения, получим:

$$\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \sin\left(\pi - \arccos \frac{1}{3}\right) = \sin\left(\arccos \frac{1}{3}\right)$$

Обозначим $\arccos \frac{1}{3} = \alpha$. Тогда согласно определению арккосинуса числа

имеем: $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, $0 \leq \alpha \leq \pi$. Наша задача свелась к следующей: найти $\sin \alpha$, если

$\cos \alpha = \frac{1}{3}$ и $0 \leq \alpha \leq \pi$. Так как $|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\alpha \in [0;$

$\pi]$, то $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(!) Домашнее задание (!)

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):

- 1.1. Сформулируйте основное тригонометрическое тождество. Как оно связывает синус и косинус одного и того же угла?
- 1.2. Что называется арксинусом числа a ? Укажите область определения функции $y = \arcsin a$ и перечислите её основные свойства.
- 1.3. Дайте определение арккосинуса числа a . В каком промежутке лежит значение $\arccos a$? Перечислите ключевые свойства этой функции.
- 1.4. Что такое арктангенс числа a ? Укажите область определения и промежутки, в котором лежит значение $\operatorname{arctg} a$. Назовите одно из основных свойств этой функции.

- 1.5. Дайте определение арккотангенса числа a . В каком интервале находится значение $\text{arctg } a$? Запишите одно из его свойств, связанное с отрицательным аргументом.
2. Решите предложенные задания (письменно):
- 2.1. Чему равен: а) $\arcsin 0,5$; б) $\arcsin (-0,5)$; в) $\arcsin 1$?
- 2.2. Имеет ли смысл: а) $\arcsin 0,3$; б) $\arcsin(-0,3)$; в) $\arcsin 1,3$; г) $\arcsin(-1,5)$?
- 2.3. Вычислите:

1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$;

2) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

3) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$;

4) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$;

Отчетность

Работы принимаются до 20 января 2026 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание контрольной работы вы присылаете на @mail:

pushistav@mail.ru

В теме письма указываем:

ОД.07 Математика 13.01.26 (Фамилия Имя, группа)

К примеру:

ОД.07 Математика 13.01.26 (Иванов Иван, ТД и БУ 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате:

<https://t.me/+RX9Nb2N84woxOTdi>

С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ

Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463.

