

(C) دائرة مركزها O ونصف قطرها r ، و M نقطة لا تنتمي إلى (C) ،

نرسم مستقيمين (Δ) و (Δ') يشملان النقطة M و يقطعان الدائرة (C) في النقط A ، B ، C ، D على الترتيب.

(1) بين أن المثلثين AMD و CMB متشابهان ،

واستنتج أن $MA \times MB = MC \times MD$.

(2) في حالة M خارج C ، كيف تصبح العلاقة السابقة

عندما يكون (Δ) مماس للدائرة (C) في النقطة A ؟

(3) نعتبر الآن أن (Δ') يشمل النقطة O .

أحسب $MA \times MB$ بدلالة MO و r في كل من الحالتين.

(لاحظ أن الجداء $MA \times MB$ مستقل عن المستقيم الذي يشمل النقطة M القاطع للدائرة (C)).

يسمى قوة النقطة M بالنسبة إلى الدائرة (C) .

تطبيق : إنشاء العددين α و β علم فرقهما : $\beta - \alpha = r$ وجداؤهما $\beta \times \alpha = r^2$.

أرسم دائرة مركزها O ونصف قطرها r ، وعلم عليها نقطة A ، وارسم المماس لها الذي يشمل A ، وعلم على هذا

المماس نقطة M حيث $AM = r$. أرسم [MO] فيقطع الدائرة في نقطتين C ، D .

تحقق من أن : MD ، MC يحققان المطلوب.

الحل :

(1) بين أن المثلثين AMD و CMB متشابهان ، واستنتج أن $MA \times MB = MC \times MD$.

● الحالة الأولى : M خارج الدائرة :

لدينا : $\hat{AMD} = \hat{CMB}$ زاوية مشتركة.

و $\hat{ADM} = \hat{CBM}$ تحصران نفس القوس AC .

ولدينا : $\hat{DAM} = 180^\circ - \hat{DAB}$ و $\hat{BCM} = 180^\circ - \hat{DCB}$ و $\hat{DAB} = \hat{DCB}$ تحصران نفس القوس DB .

إذن : $\hat{DAM} = \hat{BCM}$ ومنه : المثلثان AMD و CMB متشابهان . الرؤوس المتماثلة على الترتيب A ، D ، M و B ، C ، M و

$$\frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MC} \quad \frac{MD}{MC} = \frac{MA}{BC} = \frac{DA}{BC}$$

ومنه : $M ، B ، C$ ومنه : $\frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MC} = \frac{DA}{BC}$ إذن : $MA \times MB = MC \times MD$ وبالتالي

● الحالة الثانية : M داخل الدائرة :

لدينا : $\hat{AMD} = \hat{CMB}$ متقابلتان بالرأس.

و $\hat{ADM} = \hat{CBM}$ تحصران نفس القوس AC .

و $\hat{DAM} = \hat{BCM}$ تحصران نفس القوس BD .

ومنه : المثلثان AMD و CMB متشابهان . الرؤوس المتماثلة على الترتيب A ، D ، M و B ، C ، M و

$$\frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MC} \quad \frac{MD}{MC} = \frac{MA}{BC} = \frac{DA}{BC}$$

ومنه : $\frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MC} = \frac{DA}{BC}$ إذن : $MA \times MB = MC \times MD$ وبالتالي

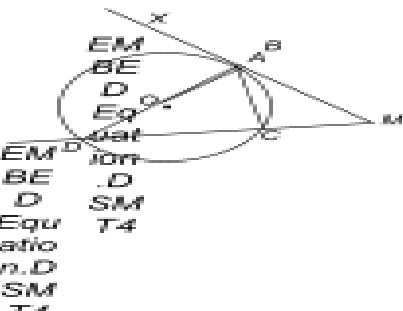
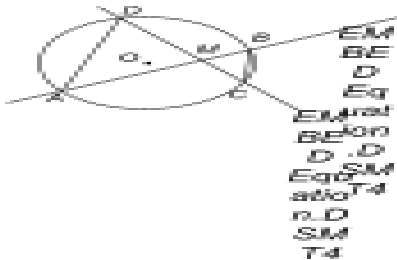
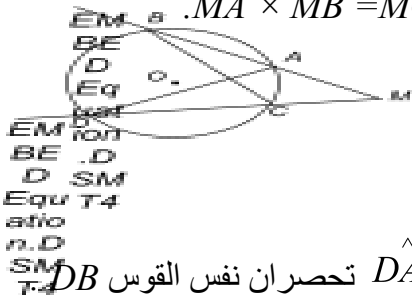
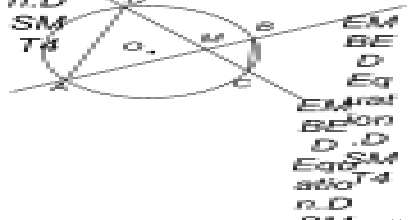
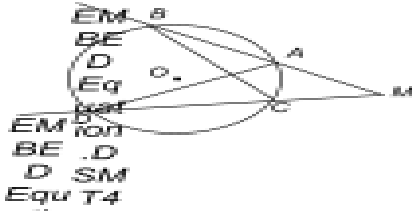
خلاصة : من أجل كل نقطة M من المستوي لا تنتمي إلى الدائرة (C) لدينا : $MA \times MB = MC \times MD$.

(2) في حالة M خارج C ، كيف تصبح العلاقة السابقة عندما يكون (Δ) مماس للدائرة (C) في النقطة A ؟

تصبح النقطتين A و B منطبقتين ومنه المثلث CMA هو CMB

لنبين أن : AMD و CMA متشابهان :

لدينا : $\hat{AMD} = \hat{AMC}$ زاوية مشتركة.



و $\hat{ADM} = \hat{CAM}$ تحصران نفس القوس AC .

ولدينا : $\hat{DAM} = 180^\circ - \hat{DAX}$ و $\hat{ACM} = 180^\circ - \hat{ACD}$

و $\hat{DAX} = \hat{ACD}$ تحصران نفس القوس AD .

إذن : $\hat{DAM} = \hat{ACM}$ ومنه : المثلثان AMD و CMA متشابهان . الرؤوس المتماثلة على الترتيب A, D, M و



$\frac{MD}{MA} = \frac{MA}{MC}$ و $\frac{MD}{MA} = \frac{MA}{MC} = \frac{DA}{AC}$ ومنه : M, A, C وبالتالي : $MA^2 = MC \times MD$.

(3) نعتبر الآن أن (Δ') يشمل النقطة O . أحسب $MA \times MB$ بدلالة MO و r في كل من الحالتين.

● الحالة الأولى : M خارج الدائرة (C).

لدينا : $MD = MO + r$ و $MC = MO - r$

إذن : $MA \times MB = MC \times MD$

تعني $(MA \times MB = (MO - r) \times (MO + r))$

أي : $MA \times MB = MO^2 - r^2$

● الحالة الثانية : M داخل الدائرة (C).

لدينا : $MD = MO + r$ و $MC = r - MO$

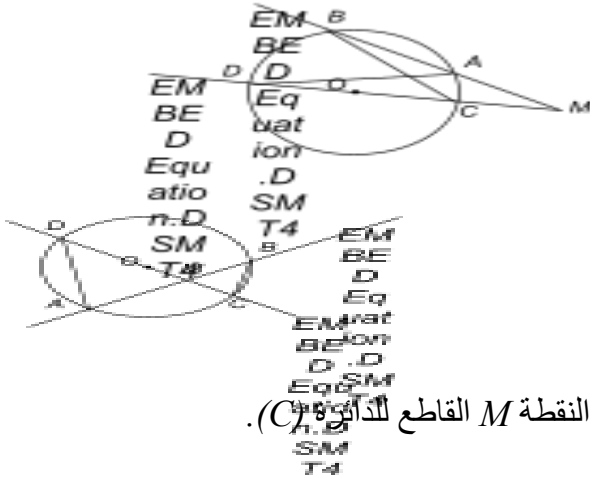
إذن : $MA \times MB = MC \times MD$

تعني $(MA \times MB = (r - MO) \times (MO + r))$

أي : $MA \times MB = r^2 - MO^2$

(لاحظ أن الجداء $MA \times MB$ مستقل عن المستقيم الذي يشمل النقطة M القاطع للدائرة (C).

يسمى قوة النقطة M بالنسبة إلى الدائرة (C).



تطبيق : إنشاء العددين α و β علم فرقهما : $\beta - \alpha = r$ وجداؤهما $\beta \times \alpha = r^2$.

أرسم دائرة مركزها O ونصف قطرها r ، وعلم عليها نقطة A ، وارسم المماس لها الذي يشمل A ، وعلم على هذا

المماس نقطة M حيث $AM = r$. أرسم $[MO]$ فيقطع الدائرة في نقطتين C, D .

تحقق من أن : MD, MC يحققان المطلوب.