

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique**

**Université Ferhat ABBAS Sétif 1**

**Faculté des Science**

**DEPARTEMENT : De Mathématiques**

# **MEMOIRE DE MASTER**

**DOMAINE : Mathématique et Informatique**

**FILIERE : Mathématiques**

**SPECIALITE : Modélisation et Aide à la Décision**

## **Thème**

Heuristiques de la Coloration de Graphes

**Présenté par :**

**KHERIBECHE Asma**

**Dirigé par :**

**Pr. BENHOCINE. Abdelhamid**

**Promotion : 2020/2021**

# Remerciement

*Tout d'abord, je remercie Allah qui m'a donné la volonté, la force et la patience durant tous ces années, et m'aide à terminer ce modeste travail (mémoire).*

*Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail, et surtout mon encadreur Pr. Abdelhamid Benhoucine, je le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience et pour ces conseils et sa disponibilité durant ma préparation de ce mémoire.*

*Mes remerciements vont à    membre du jury qui a accepté juger ce modeste travail.*

## *Dédicace*

Je dédie ce travail mémoire :

A ma chère mère

A mon cher père

Qui n'ont jamais cessé, de formuler des prières à mon égard,  
de me soutenir atteindre mes objectifs.

A mon cher frère : Houssein El dine

A ma chère sœur : Nerimène

Pour ses soutiens moraux et leurs conseils précieux tout au  
long de mes études.

A mon grand père

A ma grande mère

Qui je le souhaite une bonne santé.

A mes chères amies et mes collègues en faculté des sciences  
pour leurs aides et supports dans les moments difficiles.

A toute ma famille et à tous ceux qui m'ont connue, soutenue et  
aimée.

## Table des matières

<b>Remerciement</b>	<b>1</b>
<b><i>Dédicace</i></b>	<b>2</b>
<b>Table des matières</b>	<b>3</b>
<b>Table des figures</b>	<b>6</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>8</b>
<b>Chapitre 1 : terminologie de la théorie des graphes</b>	<b>10</b>
1.1 Introduction	10
1.2 Qu'est-ce qu'un graphe :	10
1.3 Graphe orienté :	11
1.4 Graphe non orienté :	11
1.5 L'ensemble des prédécesseurs, successeurs et voisins d'un sommet ;	12
1.6 Degré d'un graphe :	12
1.7 Un sous-graphe :	13
1.8 Graphe partiel :	14
1.9 Un sous- graphe partiel :	14
1.10 Graphe value :	14
1.11 Quelques types de graphes :	15
1.11.1 Graphe simple :	15
1.11.2 Multi-graphe :	15
1.11.3 Graphe complet :	16
1.11.4 Graphe biparti :	16
1.11.5 Graphe biparti complet:	17
1.11.6 Isomorphismes de graphes :	17
1.12 Arbre :	18
1.13 Notion de connexité :	19
1.13.1 Cas graphe non orienté :	19
1.13.1.1 Graphe connexe :	19
1.13.1.2 Graphe composante connexe :	19
1.13.2 Cas graphe orienté :	19

1.13.2.1 Graphe fortement connexe :	20
1.13.2.2 Graphe composante fortement connexe :	20
1.14 Chemin, Chaîne, Cycle et Circuit :	20
1.14.1 Chaîne :	13
1.14.2 Cycle :	20
1.14.3 Chemin :	13
1.14.4 Circuit :	20
1.15 Chemin élémentaire :	22
1.16 Notion de graphe eulérien	22
1.16.1 Chaîne eulérienne :	22
1.16.2 Cycle eulérienne :	22
1.17 Notion de graphe hamiltonien	22
1.17.1 Chaîne hamiltonien :	22
1.17.2 Cycle hamiltonien :	22
1.18 Matrice adjacence sommet-sommet :	22
1.19 Matrice d'indice sommets-arcs :	23
1.20 Conclusion :	24
<b>Chapitre2 : le problème de la coloration</b>	<b>25</b>
2.1 Introduction	25
2.2 L'histoire de la coloration des graphes	25
2.3 Pourquoi la coloration de graphe :	26
2.4 Coloration des sommets :	26
2.5 Le nombre chromatique :	27
2.6 Domaine d'application la coloration :	27
2.7 Coloration des arêtes d'un graphe :	30
2.8 Indice chromatique :	30
2.9 Graphe dual :	30
2.10 Coloration des faces d'un graphe :	31
2.11 Graphe planaire :	31
2.13 Formule d'Euler :	32
2.14 Degré des faces :	32
2.15 Problèmes célèbre de la théorie des graphes :	33
2.16 Domaines d'application de la théorie des graphes :	33
2.17 Nombre chromatique et le degré maximal (théorème de Brooks) :	34
2.18 Définition d'une clique :	34
2.19 Définition d'une stable :	34
2.20 Les bornes pour le nombre chromatique d'un graphe :	34
2.21 Classification des méthodes de résolution :	35

2.21.1 Les méthodes exactes :	35
2.21.2 Les méthodes approchées :	35
2.21.3 Les heuristiques appliquées :	35
2.21.4 Méthodes constructives :	35
2.21.5 Recherches locales ou par voisinages :	35
2.21.6 Application d'évolution ou à population :	35
2.22 Conclusion :	36
<b>Chapitre 3 : les algorithmes de coloration</b>	<b>37</b>
3.1 Introduction	37
3.2 Quelques algorithmes gloutons :	37
3.2.1 Algorithme glouton élémentaire	37
3.2.2 Algorithme de Welsh & Powell	38
3.2.3 Algorithme DSATUR de Brélaz	39
3.2.5 Algorithme de Vitaver	40
3.2.6 Algorithme RLF Leighton <sup>79</sup> (Récursive-Large-First)	40
3.3 La coloration par contraction :	41
3.3.1 Méthode des contractions :	41
3.3.2 Théorème de Zykov 1952	42
3.3.3 Algorithme de Dutton & Brigham (1981)	43
3.4 Algorithme de 2-coloriage	45
3.5 Graphe de Petersen :	46
3.6 Une coloration du graphe de Peterson avec 3 couleurs	47
3.6.1 Algorithme glouton élémentaire	47
3.6.2 Algorithme de Welsh & Powell	48
3.6.3 Algorithme de Vitaver	48
3.6.4 Algorithme DSATUR de Brélaz	50
3.6.5 Algorithme RLF Leighton <sup>79</sup> (Récursive- Large-First)	50
3.6.7 Algorithme de contraction :	50
3.6.7.1 Algorithme de Dutton & Brigham :	50
3.7 Conclusion :	52
<b>Conclusion générale</b>	<b>53</b>
<b>Bibliographie :</b>	<b>54</b>
<b>Résumé :</b>	<b>55</b>

# Table des figures

Figure 1.1 : Les éléments d'un graphe.....	03
Figure 1.2 : Un graphe orienté.....	04
Figure 1.3 : Un graphe non orienté.....	04
Figure 1.4: Représentation de l'ensemble des voisins .....	05
Figure 1.5 : Le degré d'un graphe.....	05
Figure 1.6 : <b>(G') est le sous-graphe de graphe (G)</b> .....	06
Figure 1.7 : Un graphe partiel .....	07
Figure 1.8 : Un sous-graphe partiel.....	07
Figure 1.9 : Un graphe valeur.....	08
Figure 1.10: Un graphe simple.....	08
Figure 1.11 : Un multi-graphe orienté ou non orienté.....	09
Figure 1.12 : Le graphe $K_4$ est un graphe complet.....	09
Figure 1.13 : Le graphe $K_{4,5}$ est un graphe biparti .....	10
Figure 1.14 : Le graphe $K_{2,4}$ est un graphe biparti complet.....	10
Figure 1.15: Les graphes H et G sont.....	11
Figure 1.16 : Un arbre.....	11
Figure 1.17 : Graphe connexe ou non connexe.....	12
Figure 1.18 : Graphe composante connexe (CC).....	12
Figure 1.19 : Fortement connexe et composante fortement connexe.....	13
Figure 1.20 : Chemin, circuit, cycle, chaîne.....	14
Figure 1.21 : Représentation par la matrice d'adjacence d'un graphe .....	16
Figure 1.22 : Représentation par la matrice d'indice d'un graphe .....	17
Figure 2.1: Tentative de 3-coloration d'une carte.....	18
Figure 2.2 : Coloration des sommets d'un graphe G .....	19
Figure 2.3 : Le nombre chromatique de quelques graphes .....	20
Figure 2.4 : Le problème d'emploi du temps .....	21
Figure 2.5 : Un problème d'aquariophilie.....	22
Figure 2.6 : Coloration des arêtes d'un graphe.....	23
Figure 2.7 : Coloration les faces les faces d'un graphe planaire.....	24
Figure 2.8 : Un graphe planaire et un graphe non planaire.....	25
Figure 2.9 : Une coloration optimale des sommets de G.....	27
Figure 3.1 : Coloration des sommets avec l'algorithme glouton élémentaire.....	31
Figure 3.2 : Coloration des sommets avec l'algorithme Welsh et Powell.....	32
Figure 3.3 : Coloration des sommets avec l'algorithme DSATUR.....	32
Figure 3.4 : Coloration des sommets avec l'algorithme Vitaver.....	33
Figure 3.5 : Coloration des sommets avec l'algorithme RLF.....	34
Figure 3.6 : Contraction de deux sommets .....	34
Figure 3.7 : Ajout d'arête .....	34
Figure 3.8 : Coloration des sommets avec l'algorithme Zykov.....	35
Figure 3.9 : Coloration des sommets avec l'algorithme Dutton et Brigham.....	37
Figure 3.10 : Des graphes 2- coloriable.....	38
Figure 3.11 : Quelques familles des graphes bipartis.....	39
Figure 3.12 : Un graphe non 2-coloriable.....	39
Figure 3.13 : Une coloration du graphe de Petersen avec 3 couleurs .....	40
Figure 3.14 : Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme glouton avec	



quatre couleurs.....	40
Figure 3.15 : Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme Welsh et Powell.....	41
Figure 3.16 : Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme Welsh.....	41
Figure 3.17 : Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme RLF.....	43
Figure 3.18 : Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme Dutton et Brigham .....	42
Figure 3.19: Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme DSATUR.....	43
Figure 3.20 : Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme RLF.....	43
Figure 3.21: Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme Dutton et Brigham.....	44

## **Introduction générale**

La recherche opérationnelle est une approche quantitative permettant de produire de meilleures décisions. Elle fournit des outils pour rationaliser, simuler et optimiser l'architecture et le fonctionnement des systèmes industriels et économiques. Elle propose des modèles pour analyser des situations complexes et permet aux décideurs de faire des choix efficaces et robustes. La recherche opérationnelle est une discipline exploitant ce qu'il y a de plus opérationnel dans les mathématiques, l'économie et l'informatique. Elle est en prise directe avec l'industrie et joue un rôle-clé dans le maintien de la compétitivité.

Dans ce mémoire, nous sommes intéressés au problème et les algorithmes heuristiques et métaheuristiques de la coloration des sommets d'un graphe, l'algorithme de résolution heuristique est un fournit une solution réalisable en un temps polynomial pour un problème NP-difficile, l'algorithme de résolution métaheuristique est un algorithme heuristique « générique » qu'il faut adapter à chaque problème.

Ce mémoire contient trois chapitres, nous allons donner une image détaillée sur la théorie des graphes et définit le problème de la coloration qui connue comme un problème difficile, ainsi donnerons quelques algorithmes pour résoudre ce problème, qui organisés de la manière suivante :

Dans le premier chapitre nous avons parlé les définitions fondamentales de la théorie des graphes pour ainsi présentons la notion de graphe et ses variantes et rappelons les types des graphes et expliquant les éléments principaux de la théorie des graphes.

Dans le deuxième chapitre, défini le problème de la coloration des graphes qui composé au trois types (la coloration des sommets, la coloration des arêtes, la coloration des faces) on va s'intéresser à la coloration des sommets, en commençant par donner quelques définitions et les domaines d'application ce problème et comment calcule le nombre chromatique d'un graphe. Ainsi voir les nombreuses méthodes de résolutions a été proposé pour résoudre le problème de coloration de graphe.

Dans le troisième chapitre consiste à présenter des algorithmes couramment utilisés pour déterminer le nombre chromatique (comme l'algorithme glouton élémentaire, l'algorithme de Welsh & Powell, l'algorithme DSATUR de Brélaz, l'algorithme de Vitaver, l'algorithme de RLF, l'algorithme 2-coloriage, l'algorithme de Dutton & Brigham), nous avons appliqué sur le graphe de Petersen colore avec trois couleurs et compare le nombre chromatique de chaque algorithme.

Nous terminons ce mémoire en présentant nos conclusions et quelques perspectives à nos travaux.

# Chapitre01 : Terminologie de la théorie des graphes

## 1.1 Introduction

Les graphes sont actuellement l'outil privilégié pour modéliser des ensembles structurés complexes. Ils sont indispensables si on veut représenter et étudier des relations entre des objets. Leurs applications sont très nombreuses : modélisation de l'évolution d'un système dans le temps (en économie, en automatique), réseaux divers (électriques, routiers, ou d'adduction d'eau), décomposition en tâches d'un projet (en informatique, dans le bâtiment et les travaux publics), liens entre informations dans les bases de données, etc.

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes. Cette théorie s'intéresse peu aux applications et aux questions algorithmiques. Or, les applications pratiques des graphes sont nombreuses et nécessitent des algorithmes de calcul spécialisés.

Dans ce chapitre nous rappelons les définitions de base de la théorie des graphes, pour comprendre la suite de ce mémoire, nous avons défini la notion de graphe et présentons les différents types de graphes.

## 1.2 Qu'est-ce qu'un graphe :

Un graphe  $G$  est un ensemble de points  $V$ , appelés sommets reliés ou non entre eux par un ensemble de ligne  $E$ , appelés arêtes ; on le note  $G = (V, E)$  [9].

- Les éléments de  $V$  appelé les sommets du graphe  $G$ .
- Les éléments de  $E$  appelé les arêtes du graphe  $G$ .
- $e = \{u, v\}$  est une arête de  $G$ , on dit que les sommets  $u$  et  $v$  les extrémités de l'arête  $e$ .
- $n$  désigne le nombre des sommets du graphe  $G$  avec  $n = \text{ordre}$ .
- $m$  désigne le nombre des arêtes du graphe  $G$  avec  $m = \text{Taille}$ .

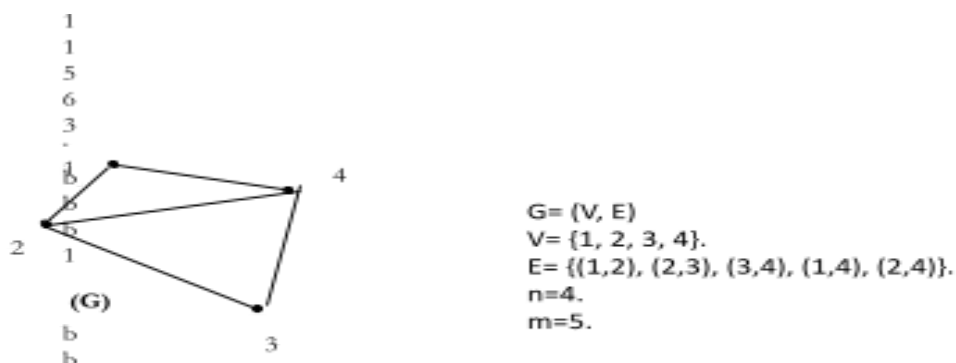


Figure 1.1 : Les éléments d'un graphe

## 1.3 Graphe orienté :

Dans un graphe orienté  $G$ , les couples  $(v_i, v_j) \in E$  sont orientés, c'est-à-dire que  $(v_i, v_j)$  est un couple ordonné, où  $v_i$  est le sommet initial, et  $v_j$  le sommet final.

Une paire  $(v_i, v_j)$  est appelée un arc, et représentée graphiquement par  $v_i \xrightarrow{\quad} v_j$

Une **boucle** est un arc ou une arête reliant un sommet à lui-même.

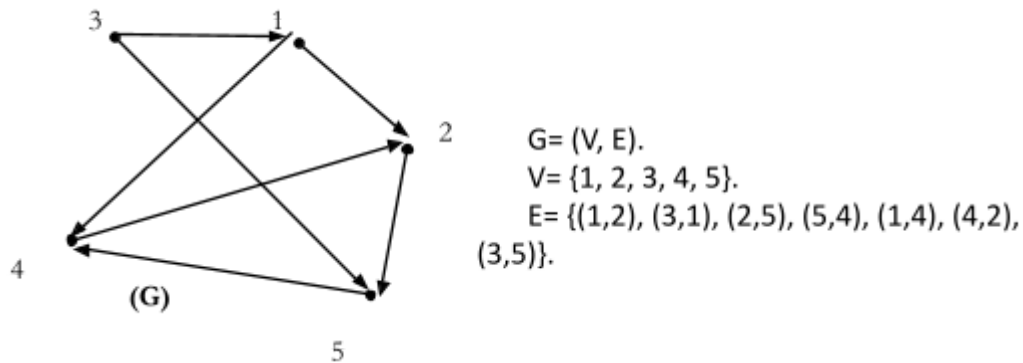


Figure 1.2 : Un graphe orienté

#### 1.4 Graphe non orienté :

Dans un graphe non orienté  $G$ , les couples  $(v_i, v_j) \in E$  ne sont pas orientés, c'est-à-dire que  $(v_i, v_j)$  est équivalent à  $(v_j, v_i)$ .

Une paire  $(v_i, v_j)$  est appelée arête, représentée graphiquement par  $v_i \text{---} v_j$ .

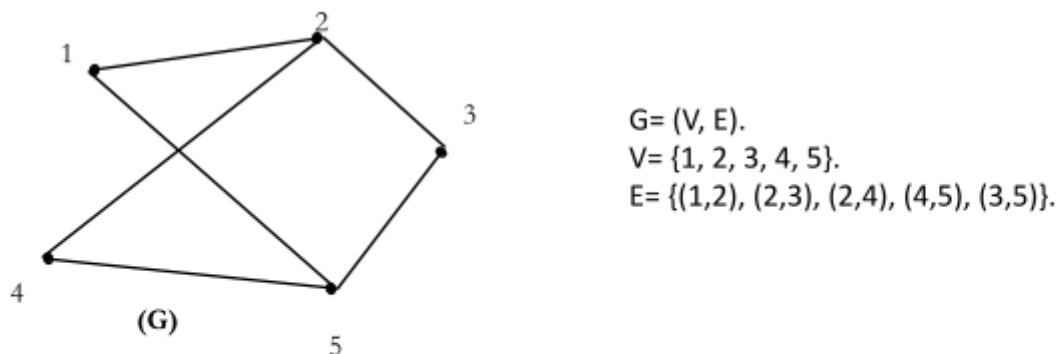


Figure 1.3 : Un graphe non orienté

#### 1.5 L'ensemble des prédécesseurs, successeurs et voisins d'un sommet ;

- De A on peut atteindre B et C par AB et AC. Donc B et C forment l'ensemble des successeurs de A, qu'on note  $^+(A)$ .
- De B et D on peut atteindre A par BA et DA. Donc B et D forment l'ensemble des prédécesseurs de A, qu'on note  $^-(A)$ .
- L'ensemble de voisins de sommet A est égal à la réunion de l'ensemble de ses prédécesseurs et des successeurs.

$$\text{voisins}(A) = ^+(A) \cup ^-(A).$$

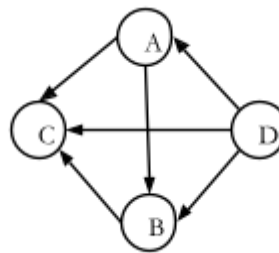


Figure 1.4: Représentation de l'ensemble des voisins

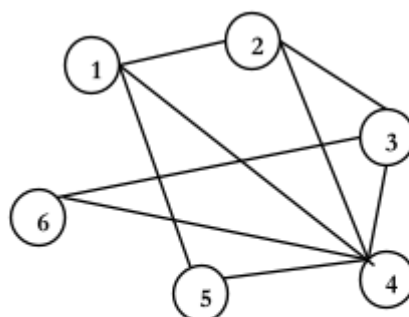
### 1.6 Degré d'un graphe :

Le degré d'un sommet est le nombre de ses voisins qui également le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes.

Un sommet de degré 0 est un sommet isolé.

Le voisin d'un sommet  $v_i$  tout sommet  $v_j$  tel que  $(v_i, v_j)$  ou de façon équivalente est une arête du graphe [1].

Le degré d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets. Dans l'exemple ci-dessous le degré du graphe est 5, à cause de sommet 4.



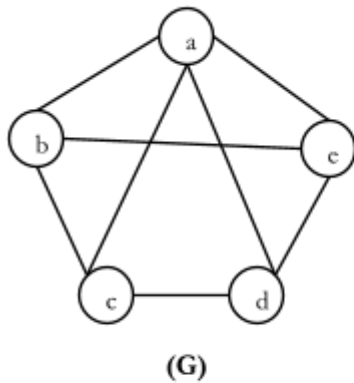
$$D(G) = 5$$

Figure 1.5 : Le degré d'un graphe

### 1.7 Un sous-graphe :

On dira qu'un sous graphe  $G' = (V', E')$  est un sous graphe d'un graphe  $G = (V, E)$  lorsque  $V' \subset V$  et  $E' \subset E$ . Où  $V'$  est l'ensemble des extrémités des arêtes de  $E'$ .

Soit  $G = (V, E)$  le graphe défini par

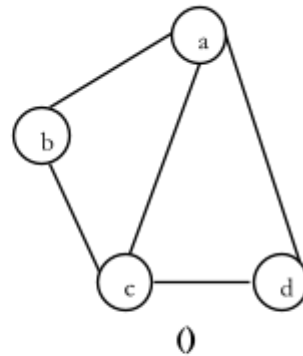


$V = \{a, b, c, d, e\}$ .

$n = 5$ .

$E = \{ab, bc, cd, de, ea, ac, ad, be\}$ .

$m = 8$ .



$V = \{a, b, c, d\}$ .

$n = 4$ .

$E = \{ab, bc, cd, ac, ad\}$ .

$m = 5$ .

**Figure 1.6 : (G') est le sous-graphe de graphe (G)**

### 1.8 Graphe partiel :

D'un graphe orienté ou non est le graphe obtenu en supprimant, certains sommets et tous les arcs ou arêtes aux sommets supprimés.

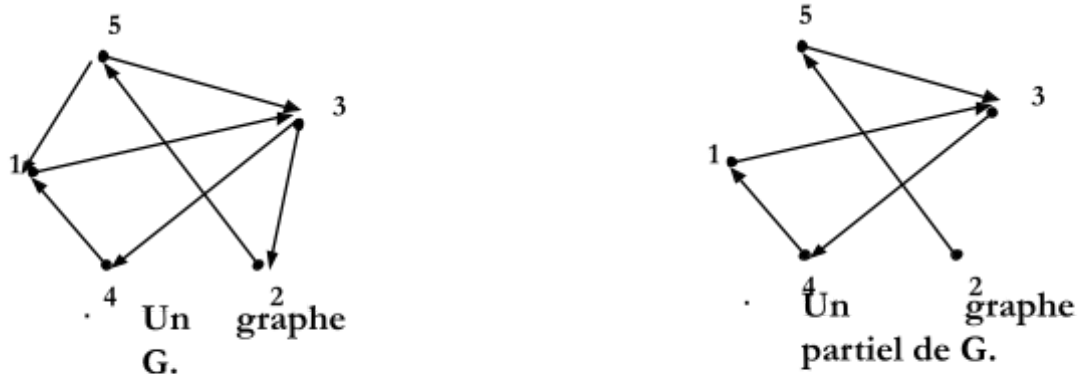


Figure 1.7 : Un graphe partiel

### 1.9 Un sous- graphe partiel :

D'un graphe orienté ou non est le graphe obtenu en supprimant, certains sommets et tous les arcs et arêtes aux sommets supprimés.

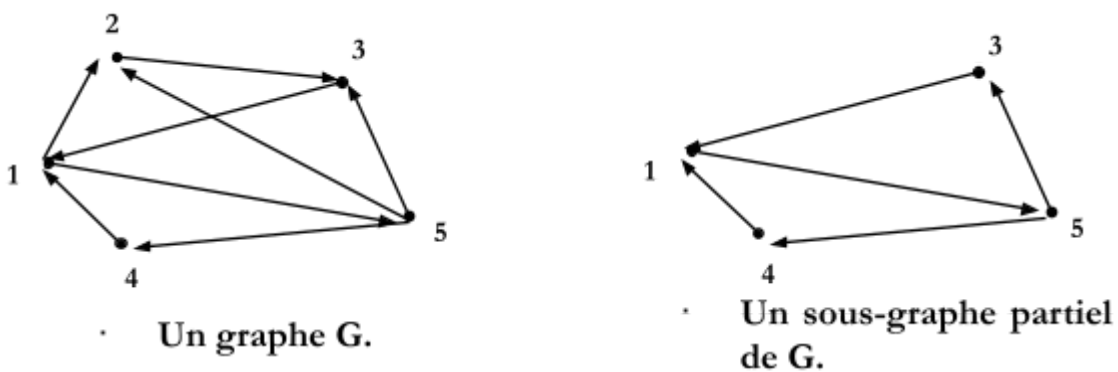


Figure 1.8 : Un sous-graphe partiel

### 1.10 Graphe valué :

Un graphe valué (pondérer) est un graphe muni de poids ou coûts sur ses arcs ce poids peut représenter toute valeur numérique associée à un arc : distance, coût de transports, temps de parcours, probabilité de transition [2].



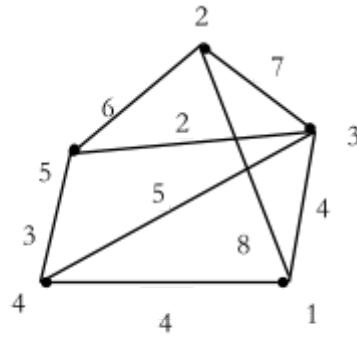


Figure 1.9 : Un graphe valué

## 1.11 Quelques types de graphes :

### 1.11.1 Graphe simple :

Un graphe est dit simple si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet.

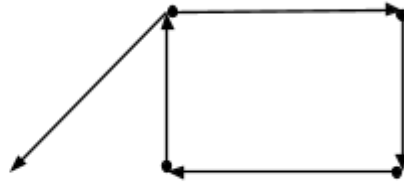


Figure 1.10 : Un graphe simple

### 1.11.2 Multi-graphe :

Un graphe est dit multi-graphe s'il contient deux sommets reliés par plusieurs arêtes ou existe boucle sur un sommet.

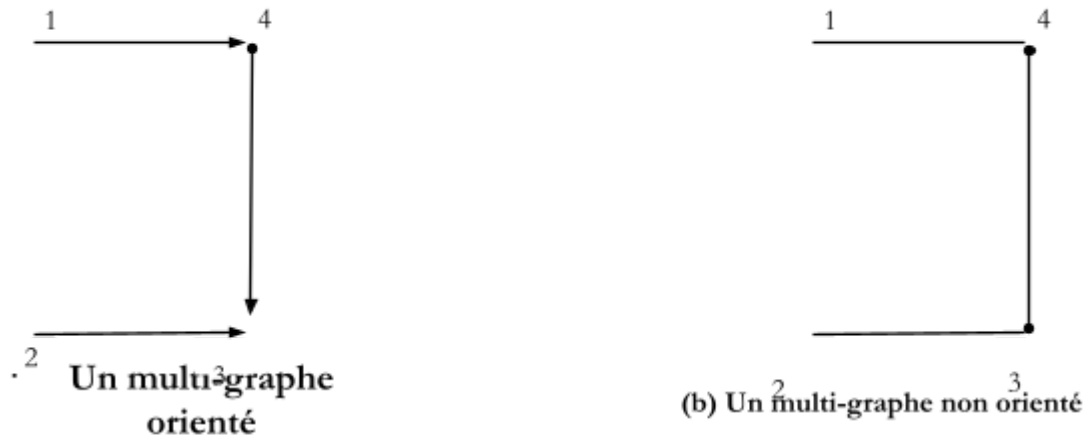


Figure 1.11 : Un multi-graphe orienté ou non orienté

### 1.11.3 Graphe complet :

Un graphe complet est un graphe où chaque sommet est adjacent.

Exemple :

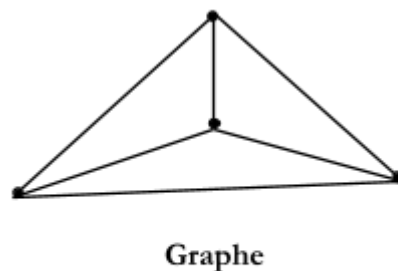


Figure 1.12 : Le graphe est un graphe complet

### 1.11.4 Graphe biparti :

Dans un graphe biparti on partitionner l'ensemble des sommets en deux classes que toute l'arête ait une extrémité dans chacune des deux classes, il existe des cycles, ils sont de longueurs paire [7].

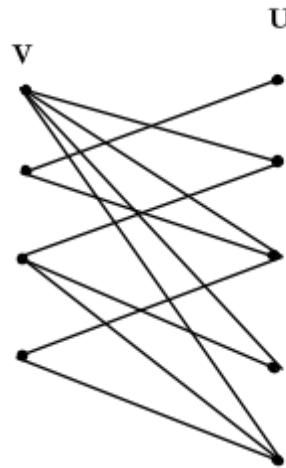


Figure 1.13 : Le graphe est un graphe biparti

#### 1.11.5 Graphe biparti complet :

Dans un graphe biparti complet on partitionner l'ensemble des sommets en deux classes que toute l'arête ait une extrémité dans chacune des deux classes, telle que chaque sommet d'une classe soit adjacent à chaque sommet de l'autre.

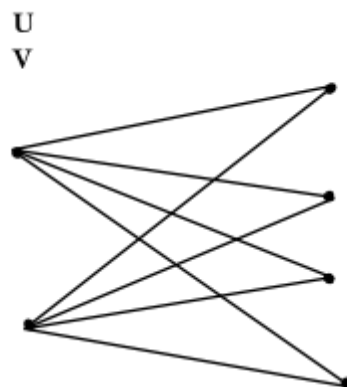
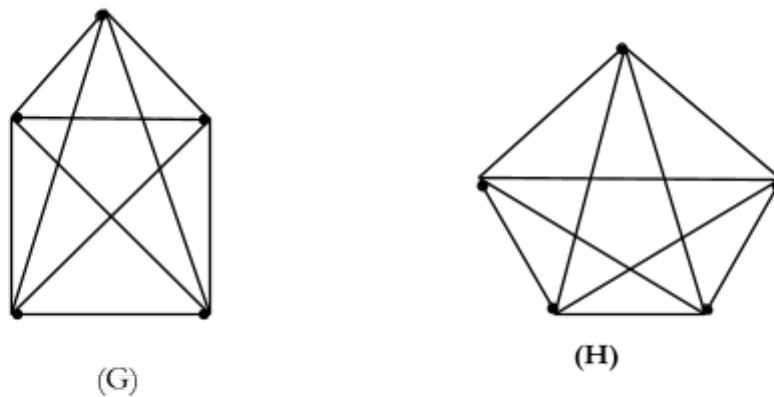


Figure 1.14 : Le graphe est un graphe biparti complet

#### 1.11.6 Isomorphismes de graphes :

Les graphes H et G sont isomorphes s'il existe une bijection entre les ensembles de sommets des deux graphes qui respectent la relation de voisinage.



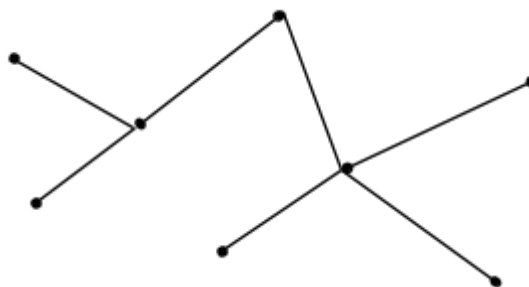
**Figure 1.15: Les graphes H et G sont isomorphes**

### 1.12 Arbre :

Un arbre est un graphe connexe et sans cycles indifféremment orienté ou non orienté.

Les propriétés suivantes sont équivalentes pour caractériser un arbre :

1. G est connexe et sans cycle.
2. G est sans cycle et possède  $n - 1$  arêtes.
3. G est connexe et admet  $n - 1$  arêtes.
4. G est sans cycle, et en ajoutant une arête, on crée un et un seul cycle élémentaire.
5. G est connexe, et en supprimant une arête quelconque, il n'est plus connexe.
6. Il existe une chaîne et une seule entre 2 sommets quelconques de G [9].



**Figure 1.16 : Un arbre**

### 1.13 Notion de connexité :

#### 1.13.1 Cas graphe non orienté

##### 1.13.1.1 Graphe connexe :

Un graphe connexe est un graphe qu'une composante connexe si seulement s'il existe un parcours du graphe qui contient tous les sommets du graphe. Autrement dit pour tout couple de sommets distinct  $(v_i, v_j) \in V^2$ . Il existe une chaîne entre  $v_i, v_j$  [2].



Figure 1.17 : Graphe connexe ou non connexe

### 1.13.1.2 Graphe composante connexe :

D'un graphe non orienté si chaque sommet est accessible à partir de n'importe quel autre, par une chaîne et maximal.

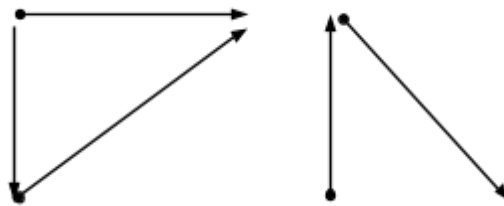


Figure 1.18 : Graphe composante connexe (CC)

### 1.13.2 Cas graphe orienté

Dans le graphe orienté on remplace la notion de chaîne par chemin : on parle de graphe fortement connexe au lieu de connexe. Et de composante fortement connexe au lieu de composante connexe.

#### 1.13.2.1 Graphe fortement connexe :

Si chaque sommet est accessible à partir de n'importe quel autre, si pour tout couple de sommets distincts  $(v_i, v_j) \in V^2$ . Il existe un chemin de  $v_i$  vers  $v_j$  et un chemin de  $v_j$  vers  $v_i$ .

#### 1.13.2.2 Graphe composante fortement connexe :

Si chaque sommet est accessible à partir de n'importe quel autre, par un chemin et maximal.

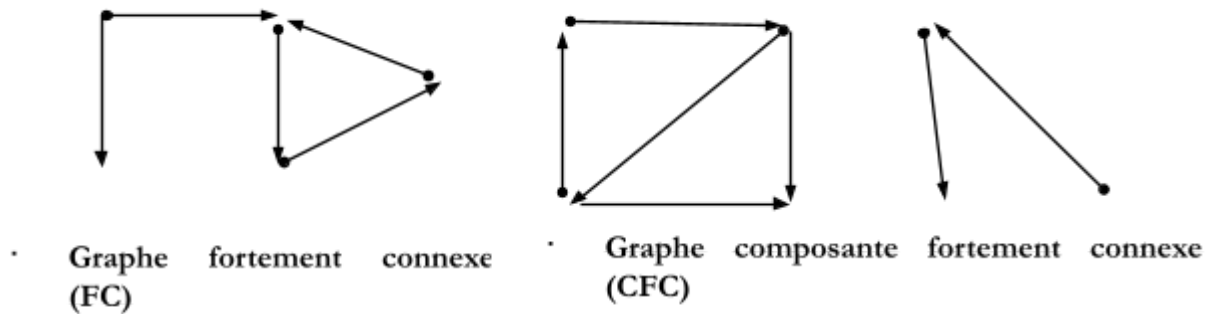


Figure 1.19 : Fortement connexe et composante fortement connexe

## 1.14 Chemin, Chaîne, Cycle et Circuit :

### 1.14.1 Chaîne

Une chaîne dans un graphe  $G$  est une suite ayant pour éléments alternativement des sommets et des arêtes, note  $c_n = v_1, e_1, v_2, \dots, e_n, v_{n+1}$ . La taille d'une chaîne est le nombre des ses arêtes.

### 1.14.2 Cycle

On appelle cycle une chaîne dont les extrémités se confondent. Dans le graphe précédent  $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_1)$  est un cycle.

### 1.14.3 Chemin

C'est une chaîne orientée dans un sens unique.

### 1.14.4 Circuit

C'est un chemin fermé, c'est-à-dire l'extrémité finale et initiale représentées par le même sommet [9].

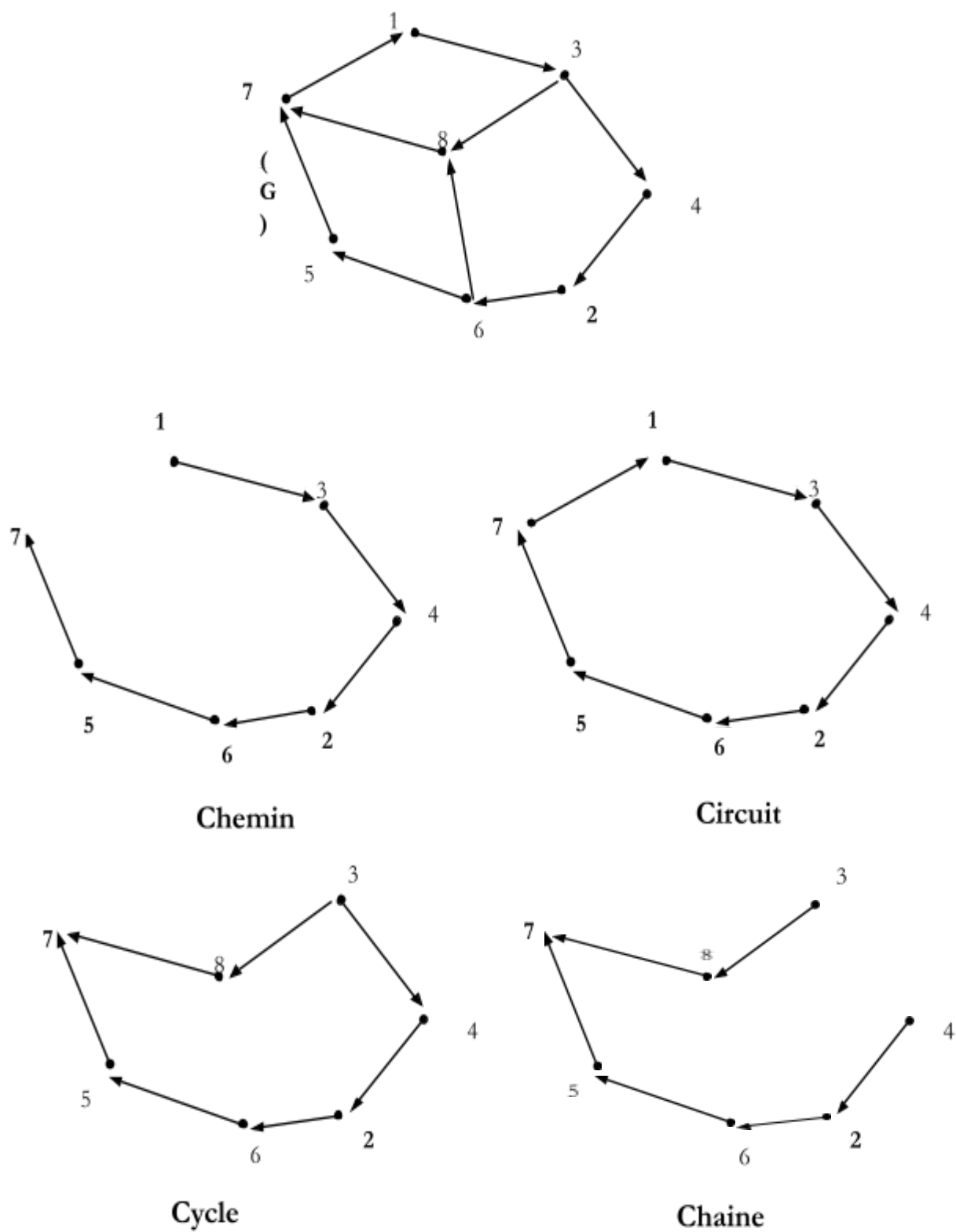


Figure 1.20 : chemin, circuit, cycle, chaîne.

**1.15 Chemin élémentaire :**

Si les sommets qu'il contient sont tous distincts.

**1.16 Notion de graphe eulérien****1.16.1 Chaîne eulérienne :**

C'est une chaîne passant une et une seule fois par chacune des arêtes de G.

**1.16.2 Cycle eulérienne :**

C'est un Cycle passant une et une seule fois par chacune des arêtes de G.

**1.17 Notion de graphe hamiltonien****1.17.1 Chaîne hamiltonien**

C'est une chaîne passant une et une seule fois par tous les sommets de G.

**1.17.2 Cycle hamiltonien**

C'est un Cycle passant une et une seule fois par chacun des sommets de G sauf le sommet de départ.

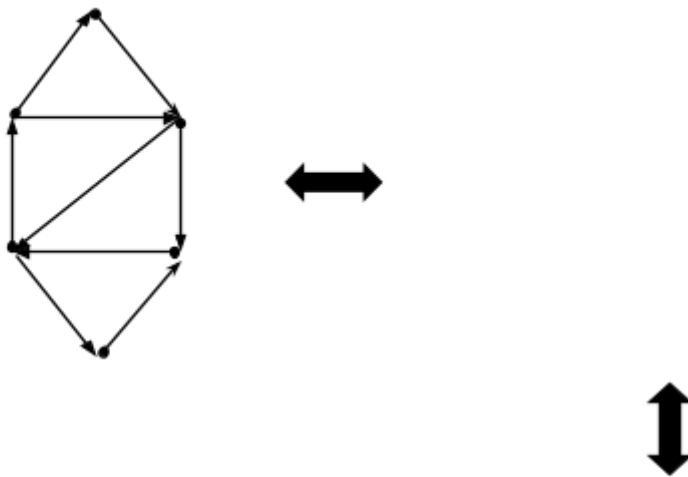
**1.18 Matrice adjacence sommet-sommet :**

La matrice d'adjacence d'un graphe  $G = (V, E)$  est une matrice carrée  $M$  de dimension  $n \times n$  (c'est-à-dire un tableau à  $n$  lignes et  $n$  colonnes) et dont les éléments valent 0 ou 1. On note  $m_{ij}$  [9].

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i, v_j \text{ sont voisins.} \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

**Exemple :**





**Figure 1.21 : Représentation par la matrice d'adjacence d'un graphe**

### 1.19 Matrice d'indice sommets-arcs :

La matrice d'indice d'un graphe  $G = (V, E)$  est une matrice de taille  $n \times m$ , si éléments prennent les valeurs 1, 0 ou -1. Chaque ligne de la matrice est associée à un sommet et chaque colonne à un arc. Chaque élément de la matrice indique la relation entre un sommet et un arc comme suit :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le sommet est une extrémité initiale de l'arc.} \\ -1 & \text{si le sommet est une extrémité finale de l'arc.} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exemple :**

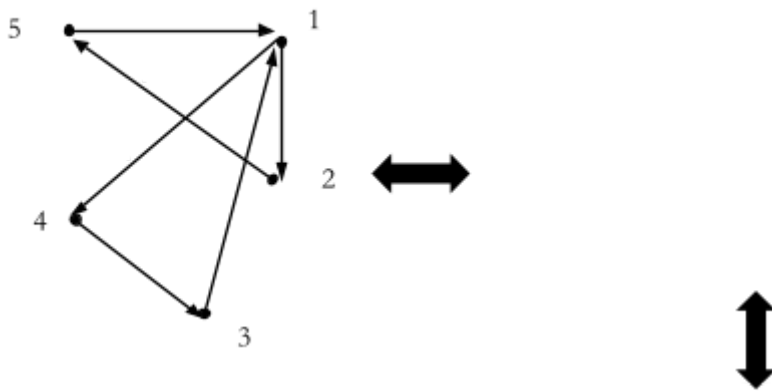


Figure 1.22 : Représentation par la matrice d'indice d'un graphe

### 1.20 Conclusion

La théorie des graphes est la discipline mathématique et informatique qui étudie les graphes, lesquels sont des modèles abstraits de dessin de réseaux reliant des objets.

Cette évolution constante est sans doute due au large spectre des applications telles qu'électronique, la linguistique, la chimie, la sociologie et autres.

Dans ce chapitre nous avons parlé des concepts fondamentaux liés à La théorie des graphes expliquant ainsi les éléments principaux, et quelques définitions générale pour utilisées dans les chapitres suivants.

## Chapitre 02 : Le problème de la coloration

### 2.1 Introduction

Le problème planaire vient du coloriage de pays sur une carte de géographie. Combien de couleur un imprimer doit il utiliser pour chaque deux pays à frontière commune n'aient par la même couleur ?

Deux pays qui se touchent par un seul point sont considérés sans frontière commune. Le graphe sous-jacent à pour sommets les pays, et une arête entre toute paire de pays à frontière commune. Coloration (en rouge, vert, bleu) d'une carte de 17 pays : il y a  $3^{17} = 129.10^6$  colorations possibles par énumération complétée.

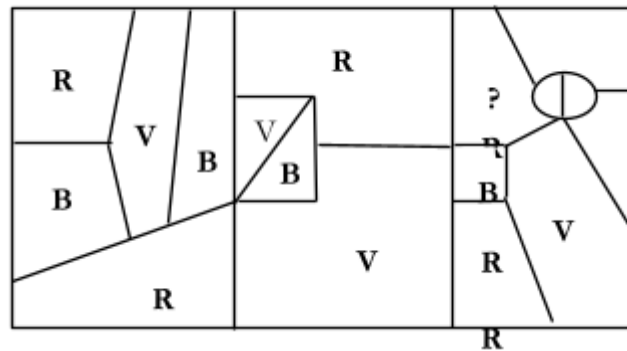


Figure 2.1: Tentative de 3-coloration d'une carte

Dans ce chapitre, nous discutons des différentes colorations de graphes et des problèmes de complexité associées.

Dans la littérature, il existe trois types de colorations sont : la coloration des sommets, la coloration des arêtes et la coloration des faces, mais on peut ramener à la coloration des sommets.

Le terme de coloration désigne en générale une coloration des sommets.

### 2.2 L'histoire de la coloration des graphes

Les premiers résultats de coloration de graphe concernent presque exclusivement la coloration des cartes. En cherchant à mettre en couleurs une carte des comtés d'Angleterre, Francis Guthrie (mathématicien et botaniste sud-africain 1831 – 1899) postule en 1852 la conjecture des quatre couleurs : il remarqua en effet qu'il n'y avait besoin que de quatre couleurs pour que deux comtés ayant une frontière commune soient de couleurs différentes.

En 1879, Alfred Kempe (mathématicien anglais 1849 – 1922) publia ce qu’il prétendit en être une démonstration et pendant une décennie, on crut que le problème des quatre couleurs était résolu.

En 1890, Percy John Heawood (mathématicien anglais 1861 – 1955) fit remarquer que la démonstration de Kempe était fausse. Il montra quant à lui le théorème des cinq couleurs en reprenant des idées de Kempe.

De nombreux travaux ont été publiés lors du siècle suivant pour réduire le nombre de couleurs à quatre, jusqu’à la démonstration finale de Kenneth Appel (mathématicien américain né en 1932) et Wolfgang Haken (mathématicien allemand né en 1928). Il s’agit aussi de la première preuve majeure utilisant massivement l’ordinateur.

Outre le problème de cartes, la coloration des graphes intervient également pour le problème d’optimisation avec contraintes (planning, incompatibilités), dans les réseaux, la cryptographie... Aucune formule miracle ne permet de déterminer le nombre chromatique d’un graphe quelconque [8].

### 2.3 Pourquoi la coloration de graphe :

- Pour résoudre le problème central en théorie des graphes.
- Nombreux champs d’application.
- Optimisation avec contraintes.

### 2.4 Coloration des sommets d’un graphe :

Soit un graphe simple  $G(V, E)$ .  $G$  est  $K$ -coloriable si on peut colorer ses sommets avec  $k$  couleurs distinctes, sans que deux sommets voisins aient la même couleur [2].

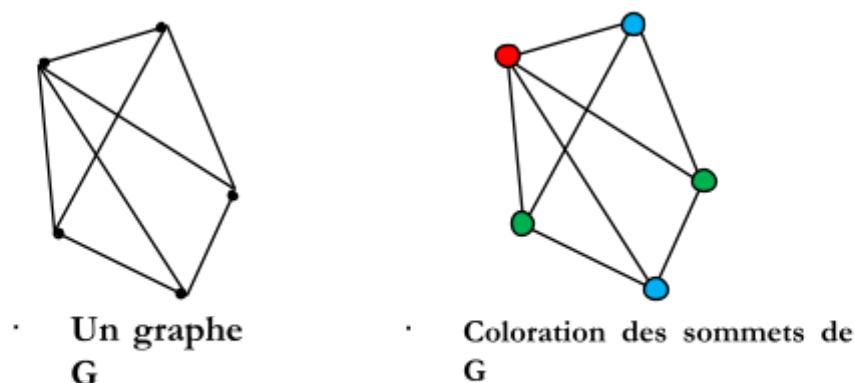


Figure 2.2 : Coloration des sommets d’un graphe  $G$

### 2.5 Le nombre chromatique :

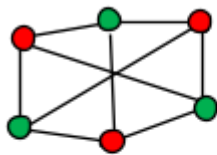
Le plus petit entier  $K$  pour lequel  $G$  est  $K$ -colorable, est noté  $\chi(G)$ .

Le problème de calcul de  $\chi(G)$  est très difficile nous verrons des algorithmes adéquats au chapitre 3.

### Propriété :

- Le nombre chromatique d'un graphe d'ordre  $n$  est inférieur ou égal à  $n$ .
- Le nombre chromatique du graphe complet  $K_n$  est  $n$ .
- Si un graphe d'ordre  $n$  a un sous graphe complet d'ordre  $k$  alors son nombre chromatique est compris entre  $k$  et  $n$ .
- Si  $\Delta$  est le degré maximal d'un graphe alors son nombre chromatique est inférieur ou égal à  $\Delta + 1$ .

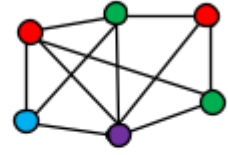
### Exemple :



Un graphe  $G$  avec  $\chi(G)=2$ .



Un graphe  $G$  avec  $\chi(G)=3$ .



Un graphe  $G$  avec  $\chi(G)=4$ .

Figure 2.3 : Le nombre chromatique de quelques graphes

## 2.6 Domaine d'application la coloration :

- Ordonnancement.
- L'affectation de fréquences dans les réseaux cellulaires.
- L'affectation de registres dans les compilateurs.
- Les emplois du temps.
- La gestion des chaînes logistiques.
- La calcul de dérivées, de matrice jacobienne et hessiennes.
- La gestion du trafic aérien.
- L'allocation de ressources en réseau [4].

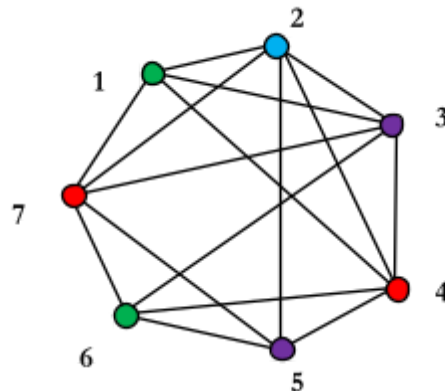
### Exemple 01 : Le problème d'emploi du temps

Une université doit organiser les horaires des examens. On suppose qu'il y a 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7 et que les paires de cours suivantes ont des

étudiants communs : 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 7, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et 7, et 6 et 7. Comment organiser ces épreuves de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps autre et cela sur une durée minimale ? [5]

**Solution :**

Construisons le graphe  $G$  dont les sommets sont les épreuves numérotées de 1 à 7, une arête relie deux de ses sommets lorsque les deux cours correspondants possèdent des étudiants communs :



**Figure 2.4 : Le problème d'emploi du temps**

Planifier les examens en un temps minimal consiste à déterminer une  $K$ -coloration de  $G$ , avec  $K = \chi(G)$ ,  $G$  possède un sous-graphe complet d'ordre 4 (de sommets 1,2,3,4), donc

$\chi(G) \geq 4$ . Déterminons une partition des sommets de  $G$  en sous-ensembles stables :

$$S_1 = \{1,6\}.$$

$$S_2 = \{2\}.$$

$$S_3 = \{3,5\}.$$

$$S_4 = \{4,7\}.$$

D'où  $\chi(G) \leq 4$ , et finalement  $\chi(G) = 4$ .

Les examens peuvent être répartis en 4 périodes, de la manière suivante :

- 1<sup>ère</sup> période, épreuves des cours 1 et 6.
- 2<sup>ème</sup> période, épreuves des cours 2.
- 3<sup>ème</sup> période, épreuves des cours 3 et 5.
- 4<sup>ème</sup> période, épreuves des cours 4 et 7.

**Exemple 02 : Un problème d'aquariophilie**

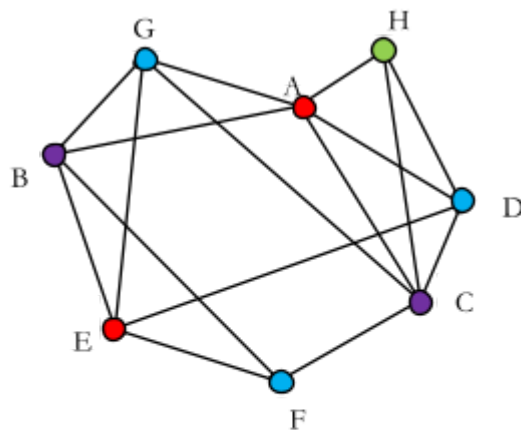
A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit poissons, dans le tableau-ci-dessous une croix signifie que les poissons ne peuvent cohabiter dans un même aquarium :

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		×	×	×			×	×
B	×				×	×	×	
C	×			×		×	×	×
D	×		×		×			×
E		×		×		×	×	
F		×	×		×			
G	×	×	×		×			
H	×		×	×				

Quel nombre minimum d'aquariums faut-il ?

**Solution :**

Construisons le graphe  $G$  dont les sommets sont les huit poissons tel que ses sommets sont reliés lorsque les poissons associés à ces sommets ne peuvent cohabiter le nombre minimum d'aquariums est égal au nombre chromatique de ce graphe



**Figure 2.5 : Un problème d'aquariophilie**

G contient un sous-graphe complet d'ordre 4 (de sommet A, C, D, H), donc  $\chi(G) \geq 4$ .

Déterminons une partition des sommets de G en sous-ensemble stables :

$$S_1 = \{A, E\}.$$

$$S_2 = \{B, C\}.$$

$$S_3 = \{D, F, G\}.$$

$$S_4 = \{H\}.$$

Donc  $\chi(G) \leq 4$ , et on en déduit que  $\chi(G) = 4$ .

## 2.7 Coloration des arêtes d'un graphe :

On peut colorer ses arêtes telles que chaque deux arêtes adjacentes de G doivent des couleurs différentes [9].

**Exemple :**

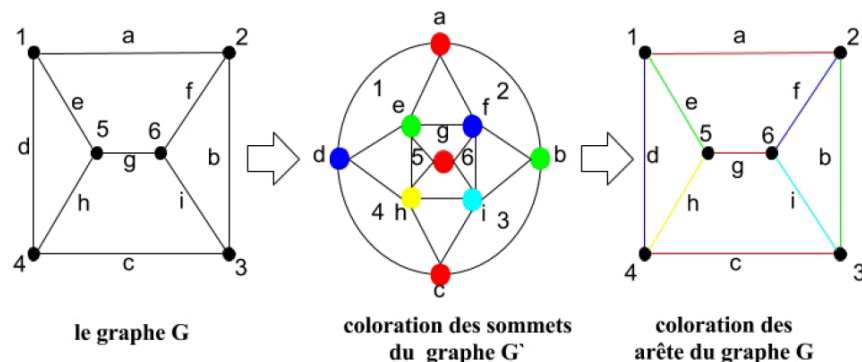


Figure 2.6 : coloration des arêtes d'un graphe

## 2.8 Indice chromatique :

Le plus petit entier K pour lequel G admet une K-colorable des arêtes, est notés  $\chi'(G)$ .

## 2.9 Graphe dual :

On appelle dual d'un graphe planaire appelé primal qui obtenu de la façon suivante :

- Dans toute face du primal on dessine un sommet du dual.
- Pour toute arête séparent deux faces du primal, on dessine une arête joignant les deux sommets correspondants du dual (et qui traverse l'arête correspondante du primal).



Remarquons que cette relation est symétrique : si  $G_2$  est le dual de  $G_1$ , alors  $G_1$  est le dual de  $G_2$ .

### 2.10 Coloration des faces d'un graphe :

La coloration des faces d'un graphe planaire revient à colorier les sommets de son dual.

Exemple :

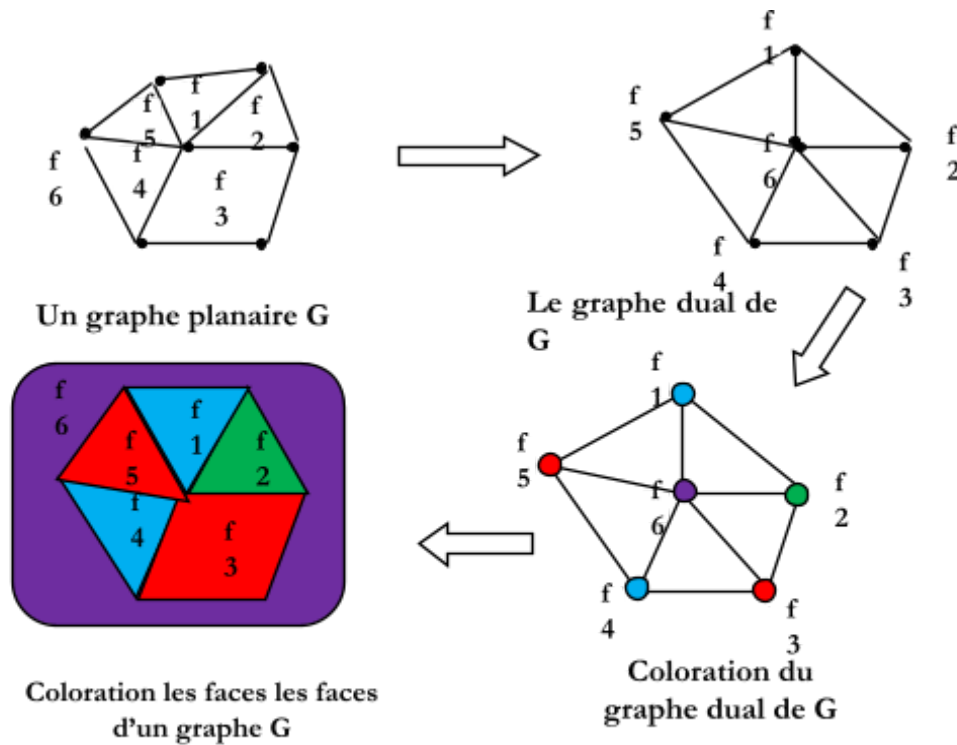


Figure 2.7 : Coloration les faces d'un graphe planaire

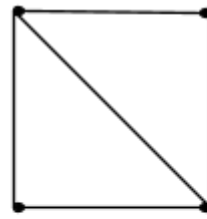
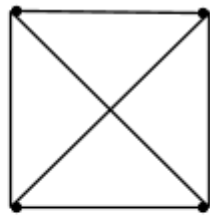
### 2.11 Graphe planaire :

Un graphe est appelé planaire s'il peut être dessiné dans le plan sans que deux arêtes ne s'intersectent.

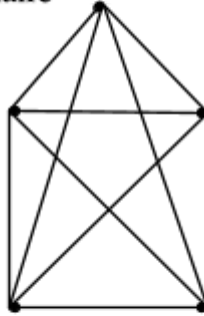
Un graphe peut ne pas avoir de représentation planaire et s'il en a, il en a plusieurs.

Un graphe est dit planaire s'il possède au moins une représentation planaire.

Exemple :



Un graphe  $K_4$  est un graphe planaire



Un graphe  $K_5$  n'est pas un graphe planaire

Figure 2.8 : Un graphe planaire et un graphe non planaire

### 2.13 Formule d'Euler :

Soit  $G$  un graphe planaire connexe d'ordre  $n$ , ayant  $m$  arêtes, si  $f$  désigne le nombre de faces d'une représentation plane de  $G$  [9], on a :

$$n + f = m + 2.$$

### 2.14 Degré des faces :

Soit  $G$  un graphe planaire connexe d'ordre  $n$ , ayant  $m$  arêtes, si  $f$  on effectue la somme  $S$  des degrés de toutes faces, comme les arêtes sont toutes comptées exactement deux fois, on a :  $S=2m$ .

Dans une représentation plane, le degré moyen  $\bar{f}$  des faces du graphe vérifie :

$$\bar{f} = 2m / f.$$

### Exemple 01 :

La formule d'Euler dans le cas d'un arbre.

Un arbre a une seule face, car il n'a pas de cycle. Par ailleurs, le nombre d'arêtes d'un Arbre est égal au nombre de sommets - 1. La formule d'Euler est donc bien vérifiée.

### Exemple 02 :

Utilisant la formule d'Euler que  $K_5$  n'est pas planaire.

En effet,  $K_5$  possède 10 arêtes et 5 sommets. D'après la formule d'Euler, si  $K_5$  est planaire, alors il a  $10 - 5 + 2 = 7$  faces, d'où  $\bar{f} = 20 / 7 < 3$  ; or pour la moyenne de  $k$  nombres soit strictement inférieur à 3, il faut que l'un d'entre eux au moins soit strictement inférieur à 3, ce qui est impossible car pour toute représentation plane d'un graphe connexe d'ordre  $n > 2$ , le degré d'une face quelconque est supérieur ou égal à 3.

On a une contradiction avec la formule d'Euler qui nous dit qu'on doit avoir 7 faces.

### 2.15 Problèmes célèbres de la théorie des graphes :

- Problème des ponts de Königsberg (18<sup>ème</sup> siècle) : peut-on imaginer une promenade dans la ville en empruntant chacun de ses 7 ponts une fois et un seul pour revenir à son point de départ ?
- Problème du plus court chemin (Algorithme de Dijkstra).
- Problème du flot maximal, problème de la coupe maximale, problème de couplage.
- Problème de voyageur de commerce (TSP) : NP-difficile ne peut être résolu qu'avec des heuristiques, pour des tailles modestes.
- Coloration des sommets ou des arêtes d'un graphe.
- Théorème de quatre couleurs [6].

### 2.16 Domaines d'application de la théorie des graphes :

- De nombreux problèmes distincts peuvent se modéliser avec des graphes.
- Tous les domaines où la notion de réseau intervient : problèmes d'ordonnancement, de transport, de flots, ...etc.
- Informatique, télécommunication, réseaux sociaux.
- Gestion d'horaires, planification de tâches, ...etc.

### 2.17 Nombre chromatique et le degré maximal (théorème de Brooks) :

En mathématiques, et plus particulièrement dans la théorie des graphes, le théorème de Brooks donne une relation entre le degré maximal d'un graphe connexe non orienté et son nombre chromatique.

Selon ce théorème, dans un graphe où chaque sommet a au plus  $\Delta$  voisins, les sommets peuvent être colorés avec au plus  $\Delta$  couleurs, sans que deux sommets adjacents n'aient la même couleur, sauf dans deux cas, les graphes complets et les graphes cycles de longueur impaire, qui ont besoin de  $\Delta + 1$  couleurs.

### 2.18 Définition d'une clique :

Une clique dans un graphe  $G$  est un ensemble de sommets tous reliés 2 à 2. La taille de la plus grande clique dans un graphe  $G$  se note  $\omega(G)$ .

### 2.19 Définition d'une stable :

Une stable dans un graphe  $G$  est un ensemble de sommets qui n'est pas reliés 2 à 2.

### 2.20 Les bornes pour le nombre chromatique d'un graphe :

Le nombre chromatique du graphe, on désigne par :

- $\omega(G)$  le cardinal maximum d'une clique de  $G$ .
- $\alpha(G)$  le cardinal maximum d'un stable de  $G$ .
- $\Delta(G)$  le degré maximum de  $G$ .

Les propositions qui donnent  $\chi(G)$  :

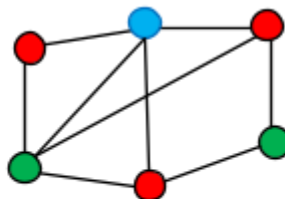
**Proposition 01 :**  $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

**Proposition 02 :**  $\chi(G) \leq 1 + n - \alpha(G)$ .

**Proposition 03 :**  $\chi(G) \geq n / \alpha(G)$ .

### Exemple :

Le graphe de la figure admet comme invariants :  $n=6$ ,  $\Delta=4$ ,  $\omega=3$ ,  $\alpha=2$ .  
 Les bornes sont donc :  $3 \leq \chi(G) \leq 5$ ,  $\chi(G) \leq 1 + 6 - 2 = 5$ ,  $\chi(G) \geq 3$ .  
 Cependant.  
 $\omega(G) = 3$  car une 3-coloration existe : elle est indiquée sur la figure.



**Figure 2.9: Une coloration optimale des sommets de  $G$ .**

### 2.21 Classification des méthodes de résolution :

Les méthodes de résolution peuvent être classées en deux grandes familles de classes qui sont les méthodes exactes et les méthodes approchées.

#### 2.21.1 Les méthodes exactes :

Les méthodes exactes produisent une solution optimale pour une instance de problème d'optimisation donné. Elles se reposent généralement sur la recherche arborescente et sur l'énumération partielle de l'espace de solutions. Elles sont utilisées pour trouver au moins une solution optimale d'un problème. Permettent d'aboutir à la solution, mais elles sont trop gourmandes en termes de temps de calcul et d'espace mémoire requis.

Les algorithmes exacts les plus connus sont les méthodes de séparation et évaluation, la programmation dynamique [7].

### **2.21.2 Les méthodes approchées :**

Contrairement aux méthodes exactes, les méthodes approchées ne procurent pas forcément une solution optimale, mais seulement une bonne solution (de qualité raisonnable) en un temps de calcul aussi faible que possible. Ils composent en deux classes : des méthodes heuristiques et des méthodes métaheuristiques. Une partie importante des méthodes approchées est désignée sous le terme de Méta heuristiques.

### **2.21.3 Les heuristiques appliquées :**

Il existe différentes heuristiques selon les problèmes à traiter, on distingue trois types : la méthode constructives, recherche locale et les heuristiques évolutives.

**2.21.4 Méthodes constructives :** méthodes gloutonnes, évaluations et séparations, arborescentes, programmation... recherches

**2.21.5 Recherches locales ou par voisinages :** descentes, recuits simulé, méthode tabou, min-conflit...

**2.21.6 Application d'évolution ou à population :** algorithme génétique, stratégies d'évaluation, programmation évaluative...

## **2.22 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons vu l'histoire problème de la coloration des graphes, en donnant toutes les définitions et les notions de bases nécessaires puis les différents domaines d'applications de la coloration et intéressons comment calculer le nombre chromatique par les proportions de la coloration des sommets, nous avons vu aussi la classification des méthodes de résolution.

## Chapitre 03 : les algorithmes de la coloration

### 3.1 Introduction

Il est difficile d'affirmer qu'il existe un meilleur algorithme pour la coloration de graphe. L'ordre de complexité des algorithmes exacts les rend impraticables dans la vie réelle où les graphes ont un grand nombre de sommets. Quant aux algorithmes constructifs connus, leur temps d'exécution est rapide mais la qualité des résultats obtenus ne peut égaler celle des métas heuristiques. Ces dernières sont très complexes, indéterministes et exigent souvent le réglage méticuleux d'un grand nombre de paramètres initiaux, selon le graphe. Ce choix forcé entre la simplicité, l'efficacité et ou la rapidité d'exécution a été le leitmotiv de la conception de l'algorithme.

Tout algorithme qui colore un graphe avec un minimum de couleurs et en garantissant que ce nombre de couleurs est bien minimal a une complexité exponentielle sauf pour des graphes particuliers pour lesquels ce problème est plus facile.

Il existe plusieurs algorithmes de coloration, que nous allons voir plus en détail dans ce chapitre.

### 3.2 Quelques algorithmes gloutons :

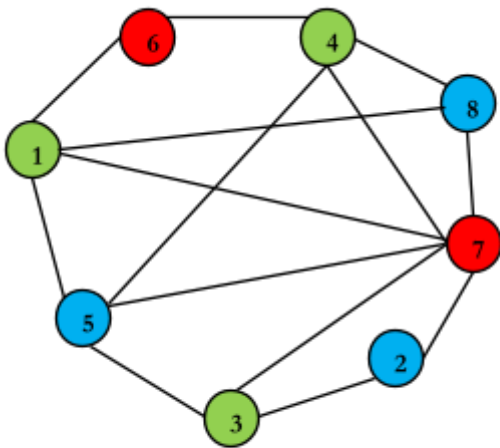
#### 3.2.1 Algorithme glouton élémentaire

Les étapes de l'algorithme suivantes :

1. Prendre une permutation quelconque des sommets.
2. Prendre le premier sommet colorie et lui affecter le premier couleur autorisé.

Une coloration gloutonne ne donne pas forcément le nombre chromatique.

**Exemple :**



**Figure 3.1: Coloration des sommets avec l'algorithme glouton élémentaire**

### 3.2.2 Algorithme Welsh & Powell

Les étapes de l'algorithme suivantes :

1. Repérer le degré à chaque sommet.
2. Ranger les sommets par l'ordre de degrés de croissants.
3. Attribuer au premier sommet (A) de la liste une couleur.
4. Suivre la liste en attribuant la même couleur au premier sommet (B) qui ne soit pas adjacent à (A).
5. Suivre (si possible) la liste jusqu'au prochain sommet (C) qui ne soit adjacent ni à A ni à B.
6. Continuer jusqu'à ce que la liste soit finie.
7. Prendre une deuxième couleur pour le premier sommet (D) non encore colore de la liste.
8. Répéter les opérations 4 à 7.
9. Continue jusqu'à avoir colorie tous les sommets.

**Exemple :**

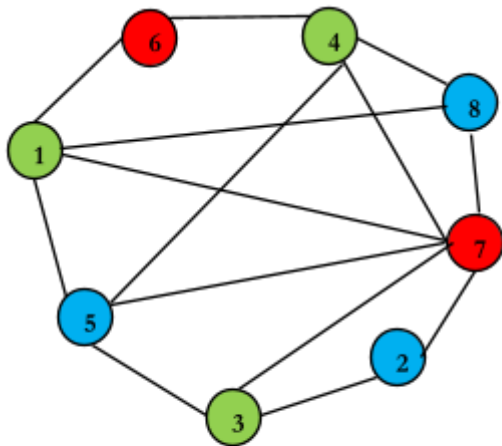


Figure 3.2 : Coloration des sommets avec l'algorithme Welsh &amp; Powell

Sommet	7	1	4	5	3	8	2	6
degré	6	4	4	4	3	3	2	2
rouge	✓							✓
vert		✓	✓		✓			
bleu				✓		✓	✓	

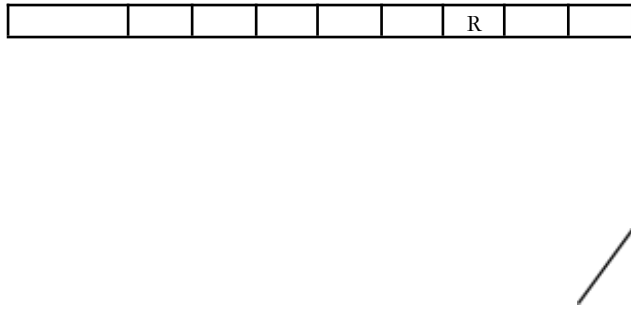
### 3.2.3 Algorithme DSATUR de Brélaz

1. Initialement, aucun sommet n'est colorié, donc  $DSAT(i)=d(i)$ ,  $i=1, \dots, n$ .
2. Tant qu'il existe un sommet non colorié.
3. Prendre un sommet non colorié  $i$  avec DSAT maximum, (s'il y en a plusieurs, on prend celui de degré maximum et s'il y en a plusieurs, on prend celui de numéro minimum).
4. Colorier  $i$  avec la première couleur disponible autorisée.
5. Mettre à jour le DSAT des voisins de  $i$ .

#### Exemple :

Sommets	1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	2	3	4	4	4	6, R	3
1	1	1	1	1	1	1	-	3, B
1, V	1	1	2	1	1	1	-	-
-	1	1	1	1	1	1	-	-
-	-	3, C	2	1	1	1	-	-
-	-	-	2, V	1	1	1	-	-
-	-	-	-	2, B	1	1	-	-
-	-	-	-	-	2, -	1	-	-



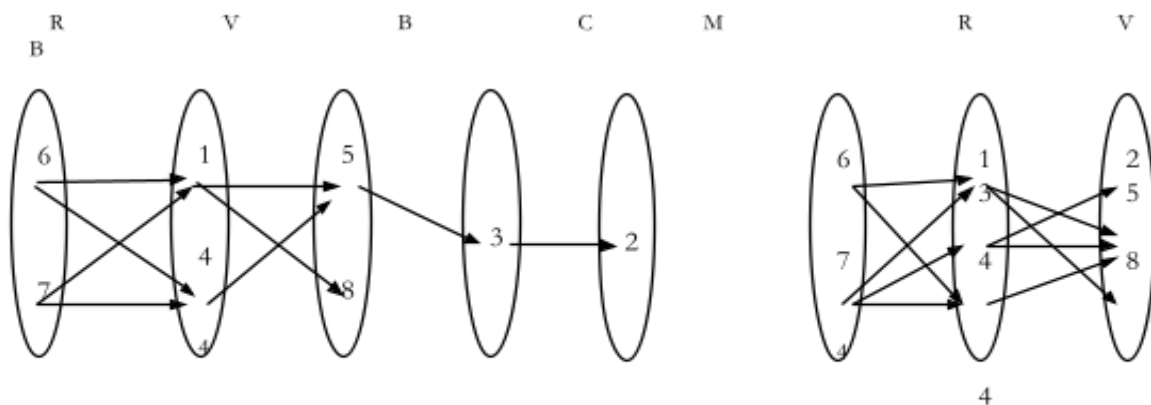


**Figure 3.3 : Coloration des sommets avec l'algorithme DSATUR de Brélaz**

### 3.2.5 Algorithme de Vitaver

1. Une orientation des arêtes sans circuits quelconque.
2. Améliorer l'orientation pour obtenir le minimum des niveaux.
3.  $\chi(G)$  Est égal au nombre minimum de niveaux d'une orientation sans surcircuit de  $G$ .

**Exemple :**



**Figure 3.4 : Coloration des sommets avec l'algorithme de Vitaver**

4

### 3.2.6 Algorithme RLF Leighton 79 (Recursive-Large-First)

1. Choisir un sommet  $u$  de degré maximum.
2. Choisir une version de ce sommet  $v$  tel que  $vc(u, v)$  soit maximum.
3. Contracter  $v$  et  $u$ .
4. Répéter 2 et 3 jusqu'à ce que  $u$  soit voisin à tous les autres sommets.
5. Enlever le sommet  $u$  et reprendre à l'étape 1[10].

**Exemple :**

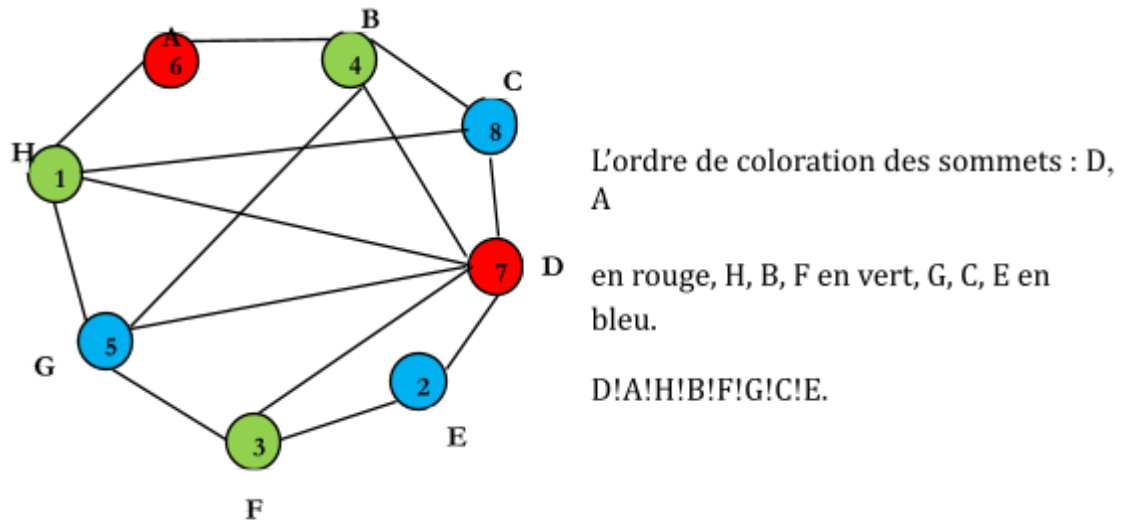


Figure 3.5 : Coloration des sommets avec l'algorithme RLF

### 3.3 La coloration par contraction :

#### 3.3.1 Méthode des contractions :

- Contraction de deux sommets :  $G \longrightarrow G / uv$ .



Figure 3.6 : contraction de deux sommets

- Ajout d'arête  $G \longrightarrow G : uv$ .

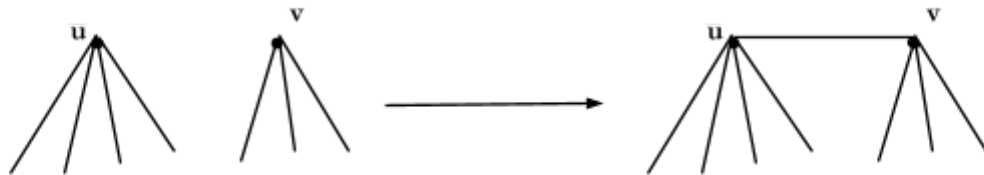


Figure 3.7 : Ajout d'arête

#### 3.3.2 Théorème de Zykov 1952

- Pour tout graphe  $G$  et tous sommets  $u$  et  $v$  non adjacents,
 
$$\chi(G) = \min \{ \chi(G / uv), \chi(G : uv) \}$$
- Arbre de Zykov par applications multiples de ce théorème les feuilles de cet arbre sont des graphes complets  $G_i = (V_i, E_i)$  et  $\chi(G) = \max_i |V_i|$ .

Exemple :

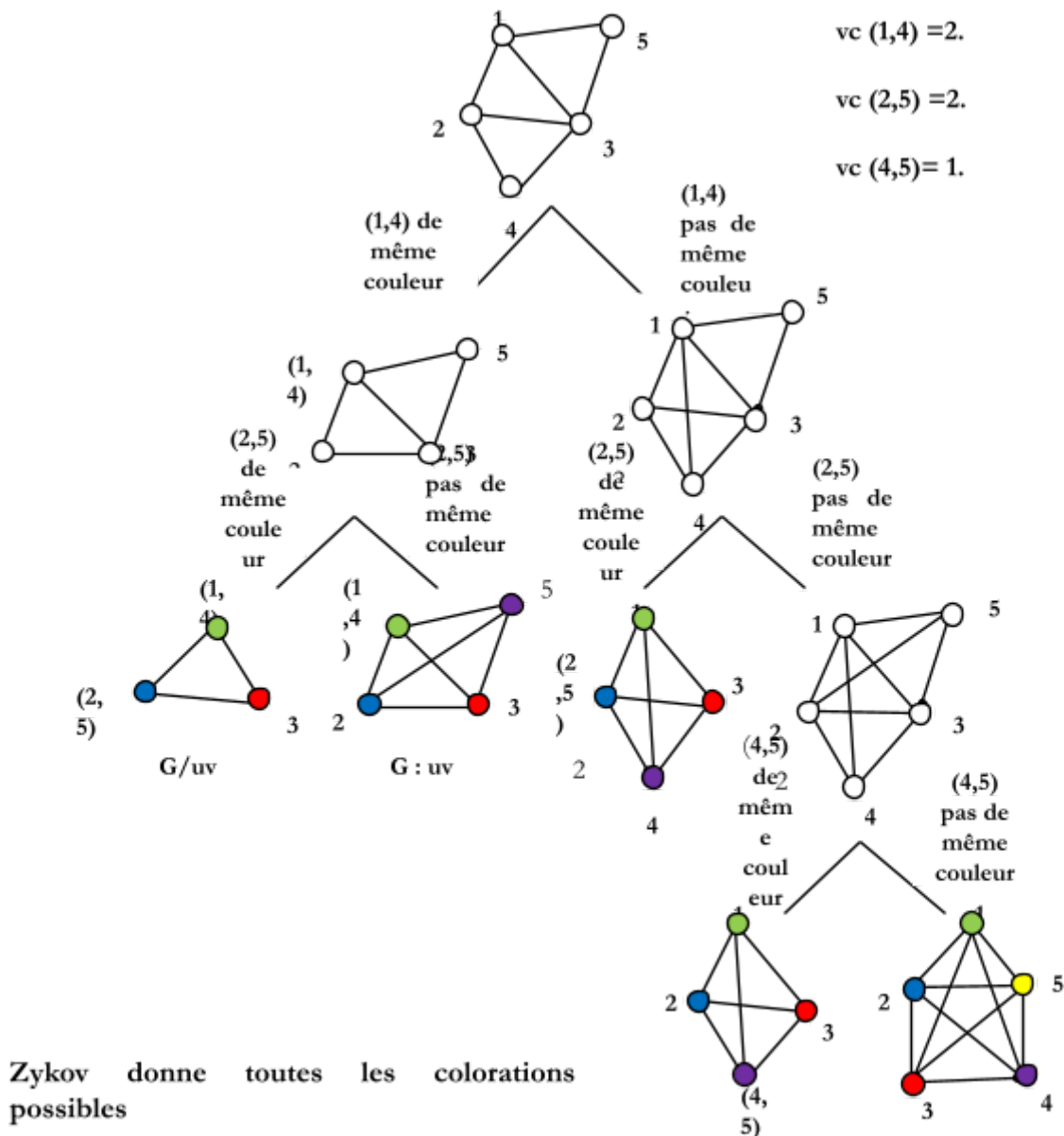


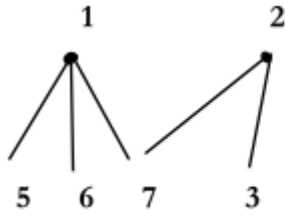
Figure 3.8 : Coloration des sommets avec l'algorithme Zykov

### 3.3.3 Algorithme de Dutton & Brigham (1981)

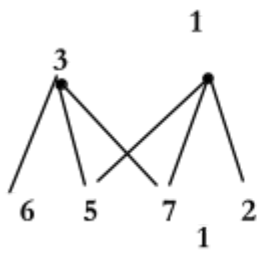
$VC(u, v)$  est le nombre de voisins commun entre  $u$  et  $v$  non adjacents

1. Choisir deux sommets  $u, v$  tels que  $VC(u, v)$  est maximum.
2. Contracter  $v$  en  $u$ .
3. Si le graphe n'est pas complet alors retour au 1 [11].

**Exemple :**



$vc(1,2)=1.$

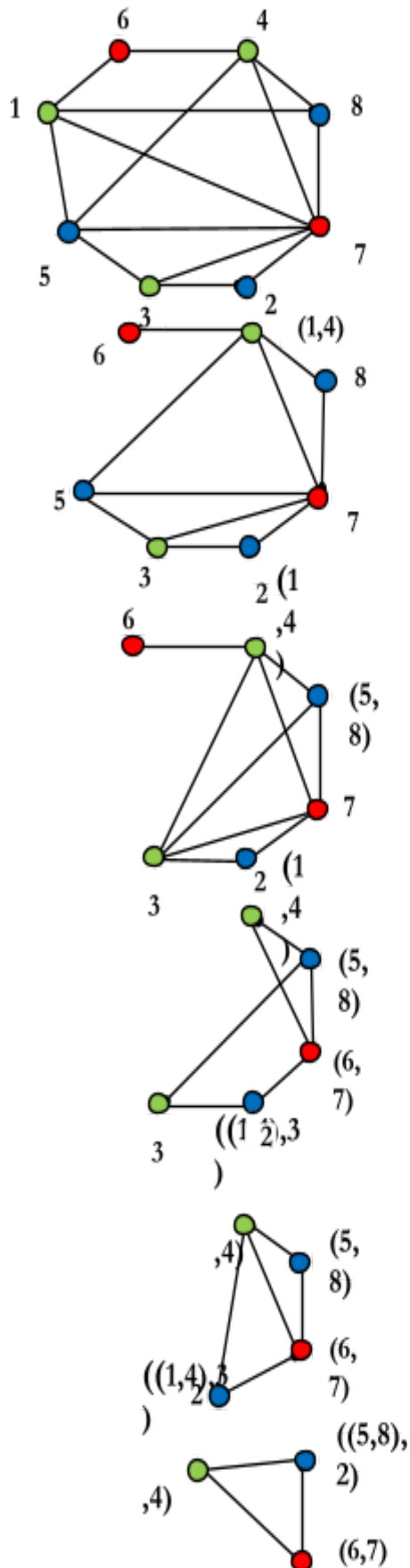


$vc(1,3)=2.$



$vc(1,4)=3.$

$max=3.$



$$vc(2,4)=1.$$

$$vc(2,5)=2.$$

$$vc(2,6)=0.$$

$$vc(2,8)=1.$$

$$vc(3,6)=0.$$

$$vc(3,8)=1.$$

$$vc(5,8)=3.$$

$$\text{Max}=3.$$

$$vc(6,7)=2.$$

$$\text{Max}=2.$$

$$vc((1,4),3)=4.$$

$$\text{Max}=4.$$

Figure 3.9: Coloration des sommets avec l'algorithme Dutton & Brigham

### 3.4 Algorithme de 2-coloriage

On considère un graphe  $G = (V, E)$  2-coloriable.

Pour chaque composante connexe de  $G$ , on se donne un sommet  $v \in V$ , on lui attribue la couleur 0 et on attribue la couleur 1 à ses voisins. Pour chacun de ses voisins, on attribue la couleur 0 à ses voisins non coloriés. Et ainsi de suite : on réalise ainsi un parcours en largeur du graphe, en coloriant les sommets rencontrés de la façon énoncée précédemment.

L'algorithme de 2-coloriage renvoie bien un coloriage si le graphe en entrée est 2-coloriable. En effet, si on prend 2 sommets voisins, l'un des sommets a été parcouru le premier. Le deuxième sommet est donc colorié de l'autre couleur par l'algorithme, et sa couleur n'est pas modifiée par la suite. De plus, l'algorithme effectue un parcours en largeur. Donc tous les sommets sont coloriés.

On rappelle les théorèmes de caractérisation des graphes bipartis.

- Un graphe  $G$  est biparti si et seulement si  $\chi(G) = 2$  (les sommets sont coloriés en 2 couleurs).
- Un graphe  $G$  est biparti si et seulement si tous les cycles de  $G$  sont pairs.

**Exemple :** graphe 2-coloriable

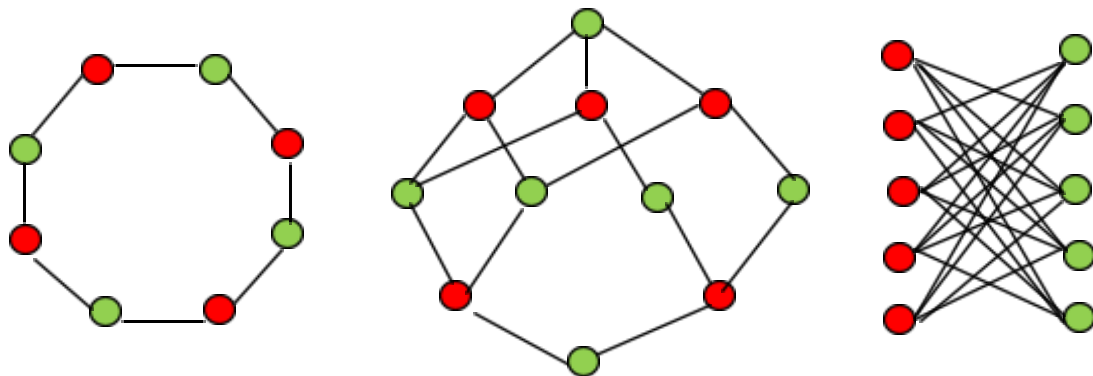


Figure 3.10 : Des graphes 2- coloriable

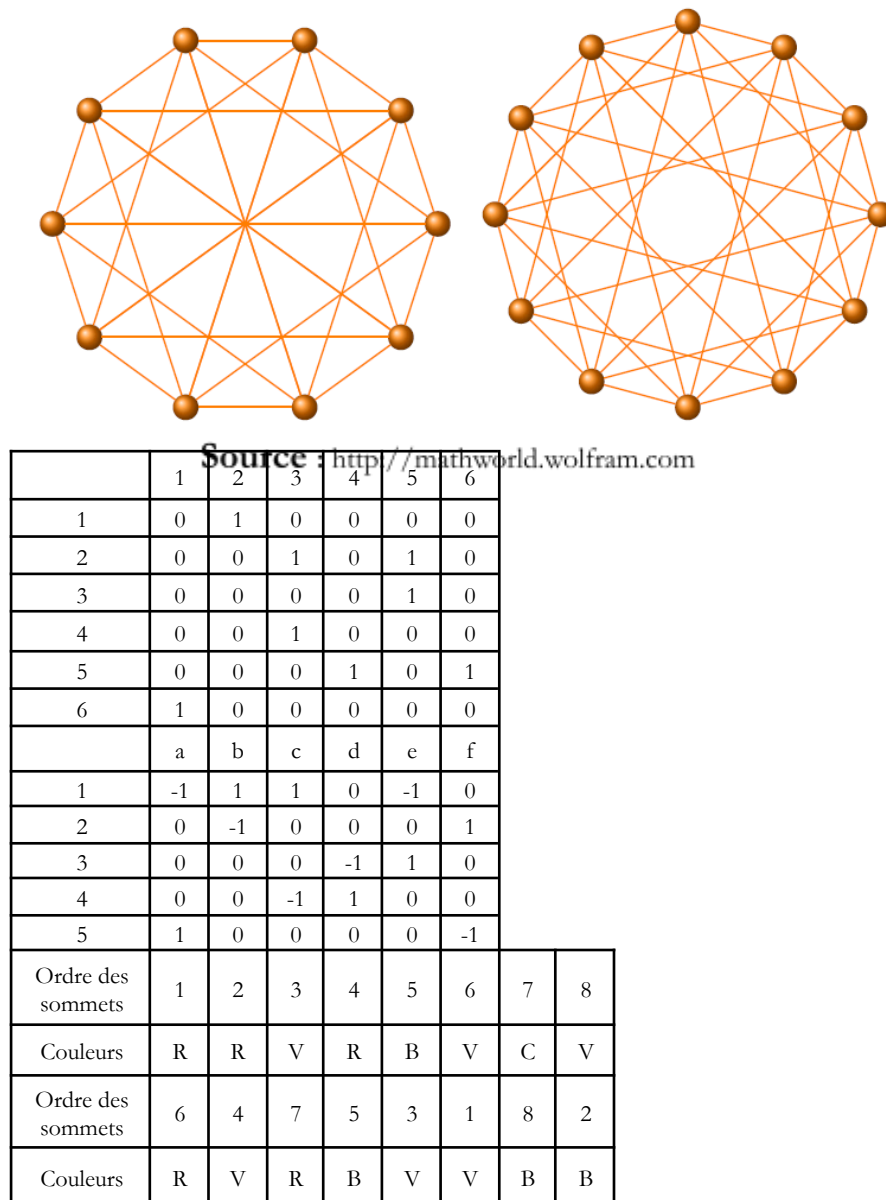


Figure 3.11 : Quelques familles des graphes bipartis

**Exemple :** graphe non 2-coloriable

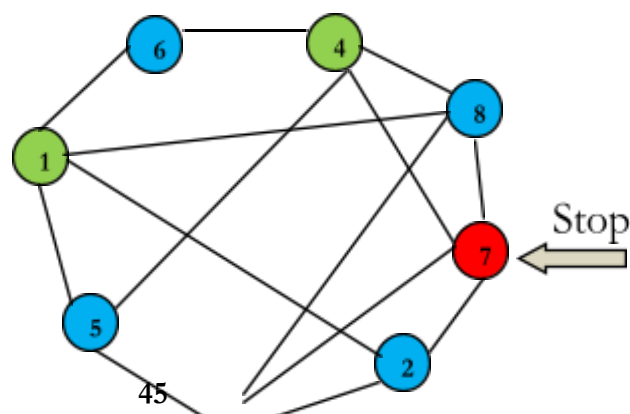




Figure 3.12 : Un graphe non 2-coloriable

### 3.5 Graphe de Petersen :

Le graphe de Petersen est une théorie des graphes un graphe particulier possèdent 10 sommets et 15 arêtes.

Le nombre chromatique du graphe de Petersen est 3. C'est-à-dire qu'il est possible de colorier ses sommets avec 3 couleurs, de telle façon que deux sommets reliés par une arête soient d'une couleur différente. Ce nombre est minimal [3].

#### 3.5.1 Une coloration du graphe de Petersen avec 3 couleurs :

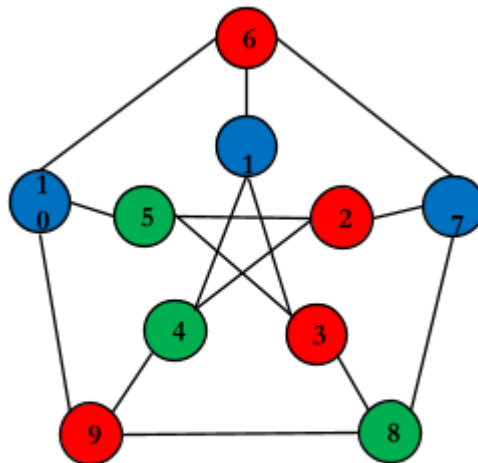


Figure 3.13 : Une coloration du graphe de Petersen avec 3 couleurs

Appliqué quelques algorithmes à graphe de Petersen :

#### 3.6.1 Algorithme glouton élémentaire



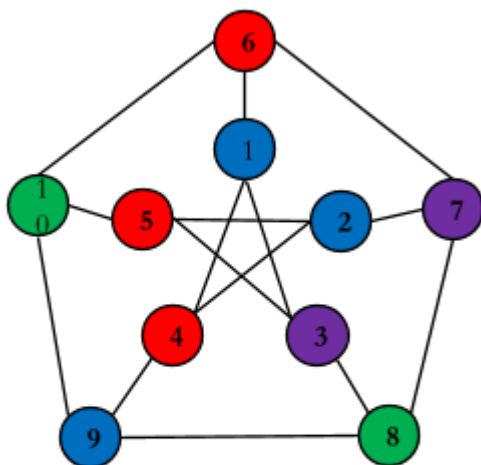


Figure 3.14 : Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme glouton avec quatre couleurs

### 3.6.2 Algorithme de Welsh & Powell

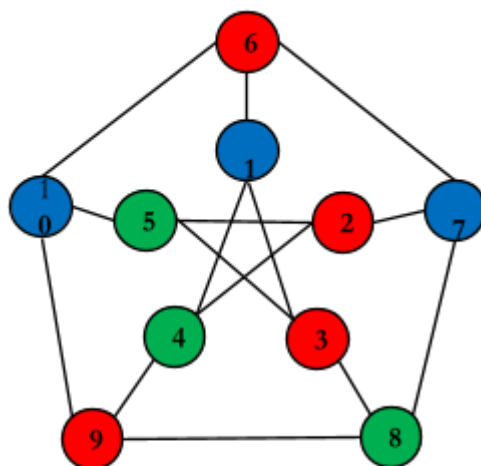


Figure 3.15 : Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme Welsh & Powell avec trois couleurs

### 3.6.3 Algorithme de Vitaver

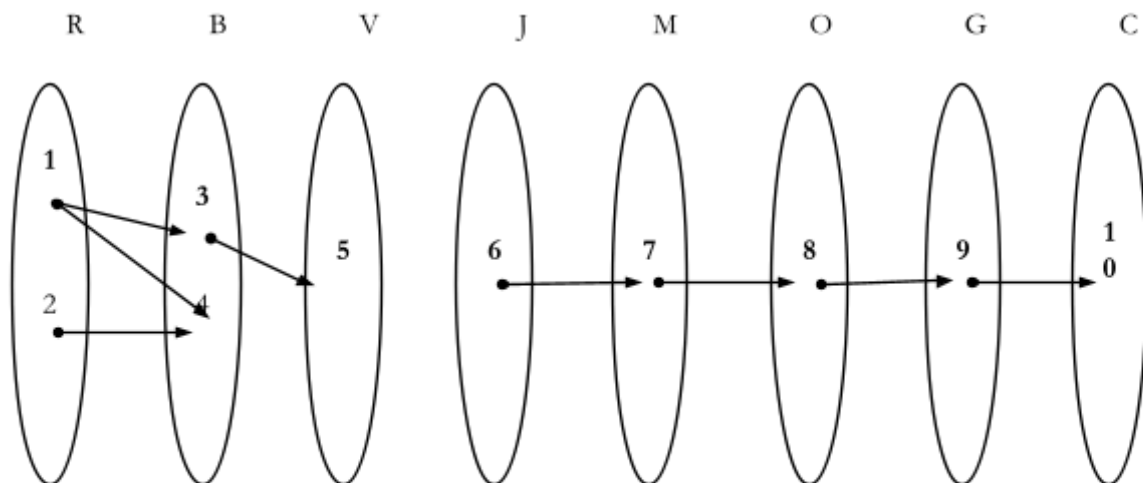


Figure 3.16 : Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme de Vitaver  
avec huit couleurs

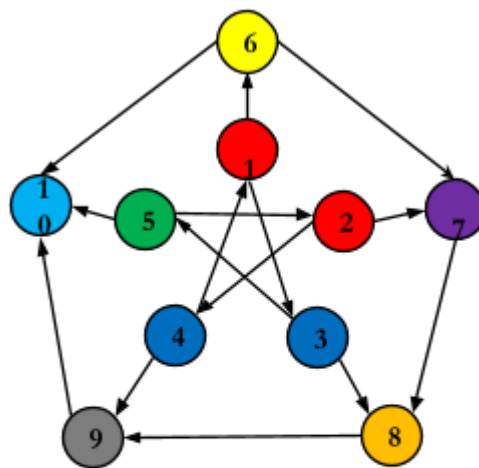


Figure 3.17 : Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme de Vitaver  
avec huit couleur

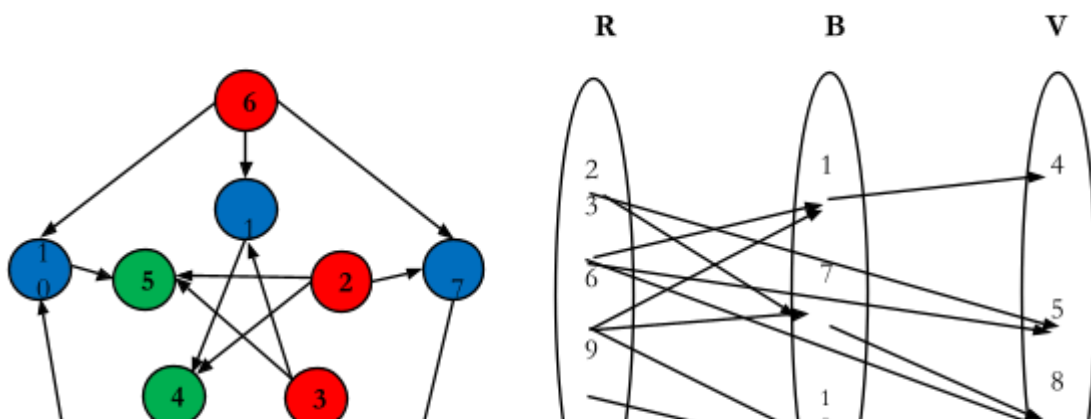


Figure 3.18 : Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme de Vitaver avec trois couleurs

### 3.6.4 Algorithme DSATUR de Brélaz

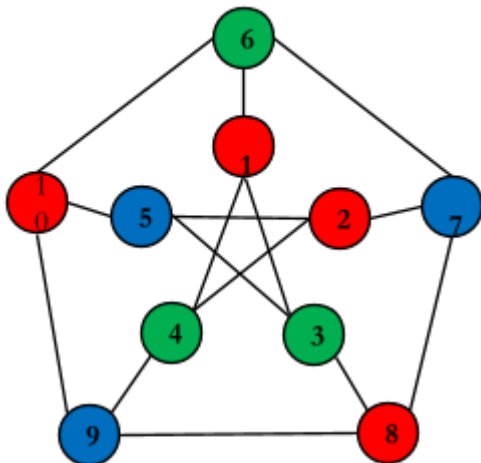
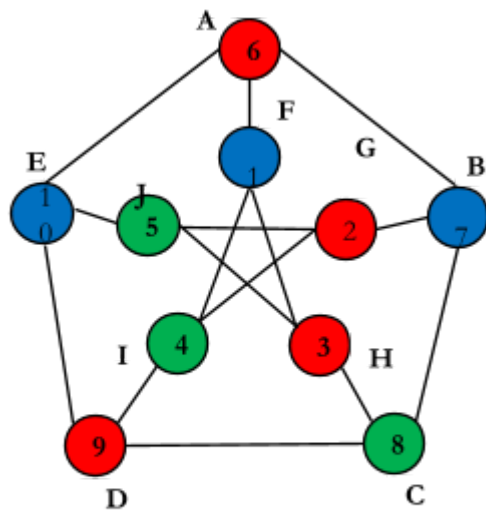


Figure 3.19: Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme DSATUR avec 3 couleurs

### 3.6.5 Algorithme RLF Leighton79 (Récursive-Large-First)



L'ordre de coloration des sommets : A, D, G, H en

rouge, B, E, F en bleu, C, I, J en vert.

A!D!G!H!B!E!F!C!I!E.

Figure 3.20 : Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme RLF avec trois couleurs

### 3.6.7 Algorithme de contraction :

#### 3.6.7.1 L'algorithme de Dutton & Brigham :

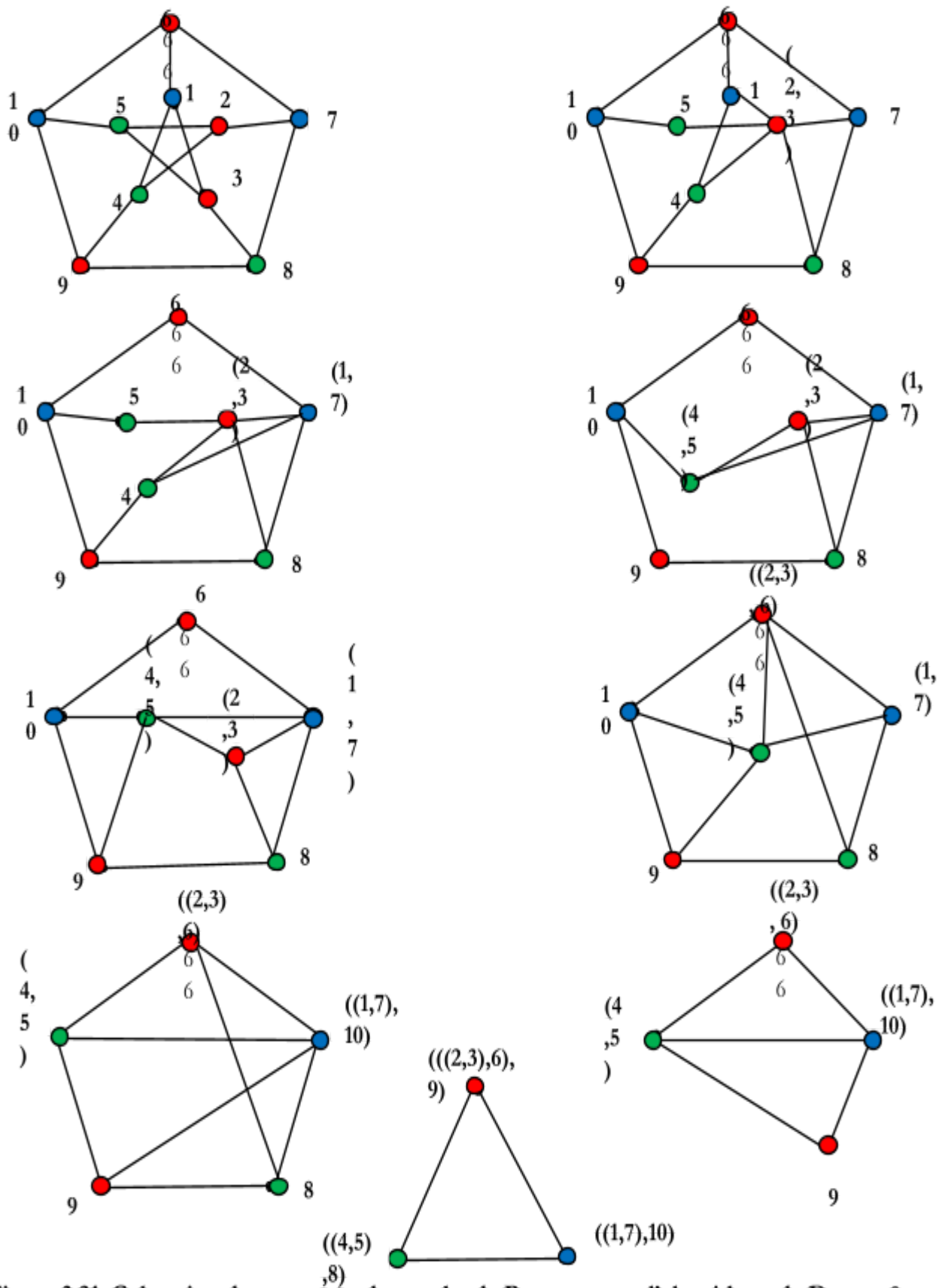


Figure 3.21: Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme de Dutton & Brigham avec trois couleurs

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de la coloration par quelques algorithmes pour déterminer le nombre chromatique (comme l'algorithme glouton élémentaire, l'algorithme Welsh & Powell, l'algorithme DSATUR, l'algorithme de Vitaver, l'algorithme de RLF, l'algorithme 2-coloriage, l'algorithme Dutton & Brigham). Ainsi appliqué quelques algorithmes à graphe de Petersen et comparé le nombre chromatique.

## Conclusion générale

Dans ce travail nous avons intéressé à calculer le nombre chromatique d'un graphe, c'est-à-dire le nombre minimal de couleurs pour colorer les sommets sans que deux sommets voisins aient le même couleur.

Pour le premier chapitre, nous rappelons les définitions de la théorie des graphes. Dans le deuxième chapitre nous avons parlé au problème de la coloration qui concentré au terme de la coloration des sommets (trouve le nombre minimal de couleurs des sommets). Dans le troisième chapitre, ont proposé quelques algorithmes heuristiques pour trouver le nombre chromatique.

Le problème de coloration est difficile c'est-à-dire qu'il n'existe pas à ce jour un algorithme polynomial qui donne la coloration optimale pour tous graphes.

## **Bibliographie :**

- [1] B. Wack, Algorithmique et Analyse d'Algorithmes, Cours 10, L3 Info, 2020.
- [2] C. Prins & M. Sevaux, Algorithmes de Graphes, Philippe Lacomme, France 2007.
- [3] D.A. Holton & J. Sheehan, The Petersen Graph, Cambridg, Cup, 1993.
- [4] D.C. Porumbel, Algorithmes Heuristiques et Techniques d'Apprentissage Applications au Problème de Coloration de Graphe, thèse de doctorat, Ecole Doctorale. STIM ED 503 Angers, France 2009.
- [5] E. Sigward, [www.Imo](http://www.Imo). Université-paris-saclay, 19.05.2021.
- [6] J. Guérin & N. Lahrichi & S. Le Digbal, Graphe et Réseaux, MTM 1007, 2019.
- [7] M. Bensouyad, Approches Métaheuristiques à base de population pour la Coloration de Graphes, thèse de doctorat, Université de Constantine 2-Abdelhamid Mehri, 2015.
- [8] M. Kubale, History of Graph Coloring, in Kubale 2004.
- [9] O. Cogis & C. Schwartz, Theorie des Graphes, Cassini Eds, 2018.
- [10] O. Togni, Coloration de Graphe, Cours graphes l6S3, IEM/LE21, 7 janvier 2019.
- [11] R. D. Dutton & R. C. Brigham, A new Graph Coloring, Received jun 1979.



## **ملخص:**

تعتبر مشكلة تلوين الرسوم البيانية من المشاكل الشهيرة التي يمكننا تصنيفها إلى ثلاثة أنواع ( تلوين القمم، تلوين الحواف و تلوين الوجوه).

تهتم هذه المذكرة بتلوين القمم حيث نحاول تقليل عدد الألوان المستخدمة. أصغر عدد من الألوان يسمح لنا بالتلوين قمم الرسم البياني و الذي يسمى بالعدد اللوني.

لا تعطي الاستدلالات الخاصة بتلوين قمم الرسم البياني بالضرورة الحد الأدنى لعدد الألوان.

**الكلمات المفتاحية :** الرسم البياني، تلوين القمم، عدد لوني، خوارزمية استدلالية.

---

## **Résumé :**

Le problème de coloration des graphes est un problème célèbre, dont on distingue trois types (la coloration des sommets, la coloration des arêtes et la coloration des faces).

Ce mémoire s'intéresser à la coloration des sommets. On cherche à minimiser le nombre de couleurs utilisées. Le plus petit nombre de couleurs permettant la coloration des sommets d'un graphe est appelé le nombre chromatique.

Les heuristiques de la coloration des sommets d'un graphe ne donnent pas forcément le nombre minimum de couleurs.

**Mots-clés :** graphe, coloration des sommets, algorithme heuristique, nombre chromatique.

---

## **Abstract:**

The problem of coloring graphs is a famous problem, of which we can distinguish three types (coloring of vertices, coloring of edges and coloring of faces).

This memory is concerned with the coloring of vertices. We try to minimize the number of used. The smallest number of colors allowing the vertices of a graph to be colored is called the chromatic number.

The heuristics of coloring the vertices of a graph do not necessarily give the minimum number of colors.

**Key-words:** graph, coloring of the vertices, heuristic algorithm, chromic number.