République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Ferhat ABBAS Sétif 1
Faculté des Science

DEPARTEMENT : De Mathématiques

<u>MEMOIRE DE MASTER</u>

DOMAINE : Mathématique et Informatique

FILIERE : Mathématiques

SPECIALITE : Modélisation et Aide à la Décision

<u>Thème</u>

Heuristiques de la Coloration de Graphes

Présenté par :
KHERIBECHE Asma

Dirigé par :
Pr. BENHOCINE. Abdelhamid

Promotion : 2020/2021

Remerciement

Tout d'abord, je remercie Allah qui m'à donner la volonté, la force et la patience durant tous ces aimées, et m'aide à terminer ce modeste travail (mémoire).

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué de près au de loin à la réalisation de ce travail, et surtout mon encadreur Pr. Abdelhamid Benhoucine, je le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience et pour ces conseils et sa disponibilité durant ma préparation de ce mémoire.

Mes remerciements vont à membre du jury qui a accepté juger ce modeste travail.

Dédicace

Je dédie ce travail mémoire :

A ma chère mère

A mon cher père

Qui n’ont jamais cessé, de formuler des prières à mon égard, de me soutien atteindre mes objectifs.

A mon cher frère : Houssem El dine

A ma chère sœur : Nerimène

Pour ses soutiens moraux et leurs conseils précieux tout au long de mes études.

A mon grand père

A ma grande mère

Qui je le souhaite une bonne santé.

A mes chères amies et mes collègues en faculté des sciences pour leurs aides et supports dans les moments difficiles.

A toute ma famille et à tous ceux qui m’ont connue, soutenue et aimée.

Table des matières

Table des figures

Introduction générale

La recherche opérationnelle est une approche quantitative permettant de produire de meilleures décisions. Elle fournit des outils pour rationaliser, simuler et optimiser l'architecture et le fonctionnement des systèmes industriels et économiques. Elle propose des modèles pour analyser des situations complexes et permet aux décideurs de faire des choix efficaces et robustes. La recherche opérationnelle est une discipline exploitant ce qu'il y a de plus opérationnel dans les mathématiques, l'économie et l'informatique. Elle est en prise directe avec l'industrie et joue un rôle-clé dans le maintien de la compétitivité.

Dans ce mémoire, nous sommes intéressés au problème et les algorithmes heuristiques et métaheuristiques de la coloration des sommets d'un graphe, l'algorithme de résolution heuristique est un fournit une solution réalisable en un temps polynomial pour un problème NP-difficile, l'algorithme de résolution métaheuristique est un algorithme heuristique « générique » qu'il faut adapter à chaque problème.

Ce mémoire contient trois chapitres, nous allons donner une image détaillée sur la théorie des graphes et définit le problème de la coloration qui connue comme un problème difficile, ainsi donnerons quelques algorithmes pour résoudre ce problème, qui organisés de la manière suivante :

Dans le premier chapitre nous avons parlé les définitions fondamentales de la théorie des graphes pour ainsi présentons la notion de graphe et ses variantes et rappelons les types des graphes et expliquant les éléments principaux de la théorie des graphes.

Dans le deuxième chapitre, défini le problème de la coloration des graphes qui composé au trois types (la coloration des sommets, la coloration des arêtes, la coloration des faces) on va s'intéresser à la coloration des sommets, en commencent par donner quelques définitions et les domaines d'application ce problème et comment calcule le nombre chromatique d'un graphe. Ainsi voir les nombreuses méthodes de résolutions a été proposé pour résoudre le problème de coloration de graphe.

Dans le troisième chapitre consiste à présenter des algorithmes couramment utilisés pour déterminer le nombre chromatique (comme l'algorithme glouton élémentaire, l'algorithme de Welsh & Powell, l'algorithme DSATURE de Brélaz, l'algorithme de Vitaver, l'algorithme de RLF, l'algorithme 2-coloriage, l'algorithme de Dutton & Brigham), nous avons appliqué sur le graphe de Petersen colore avec trois couleurs et compare le nombre chromatique de chaque algorithme.

Nous terminons ce mémoire en présentent nos conclusions et quelques perspectives à nos travaux.

Chapitre01 : Terminologie de la théorie des graphes

1.1 Introduction

Les graphes sont actuellement l'outil privilégié pour modéliser des ensembles structurés complexes. Ils sont indispensables si on veut représenter et étudier des relations entre des objets. Leurs applications sont très nombreuses : modélisation de l'évolution d'un système dans le temps (en économie, en automatique), réseaux divers (électriques, routiers, ou d'adduction d'eau), décomposition en taches d'un projet (en informatique, dans le bâtiment et les travaux publics), liens entre informations dans les bases de données, etc.

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes. Cette théorie s'intéresse peu aux applications et aux questions algorithmiques. Or, les applications pratiques des graphes sont nombreuses et nécessitent des algorithmes de calcul spécialisés.

Dans ce chapitre nous rappelons les définitions de base de la théorie des graphes, pour comprendre la suite de ce mémoire, nous avons définir la notion de graphe et présentons les différents types de graphes.

1.2 Qu'est-ce qu'un graphe :

Un graphe G est un ensemble de points V, appelés sommets reliés ou non entre eux par un ensemble de ligne E, appelés arêtes ; on le note G= (V, E) [9].

- Les éléments de V appelé les sommets du graphe G.
- Les éléments de E appelé les arêtes du graphe G.
- e= {u, v} est une arête de G, on dit que les sommets u et v les extrémités de l'arête e.
- n désigne le nombre des sommets du graphe G avec n= ordre.
- m désigne le nombre des arêtes du graphe G avec m= Taille.

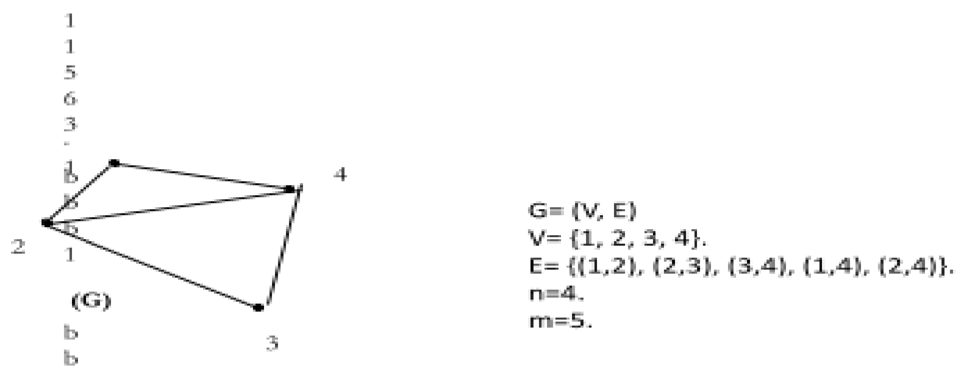


Figure 1.1 : Les éléments d'un graphe

1.3 Graphe orienté :

Dans un graphe orienté G, les couples $(v_i, v_j) \in E$ sont orienté, c'est-à-dire que (v_i, v_j) est un couple ordonné, où v_i est le sommet initial, et v_j le sommet final.

Une paire (v_i, v_j) est appelée un arc, et représentée graphiquement par $v_i \longrightarrow v_j$

Une boucle est un arc ou une arête reliant un sommet à lui-même.

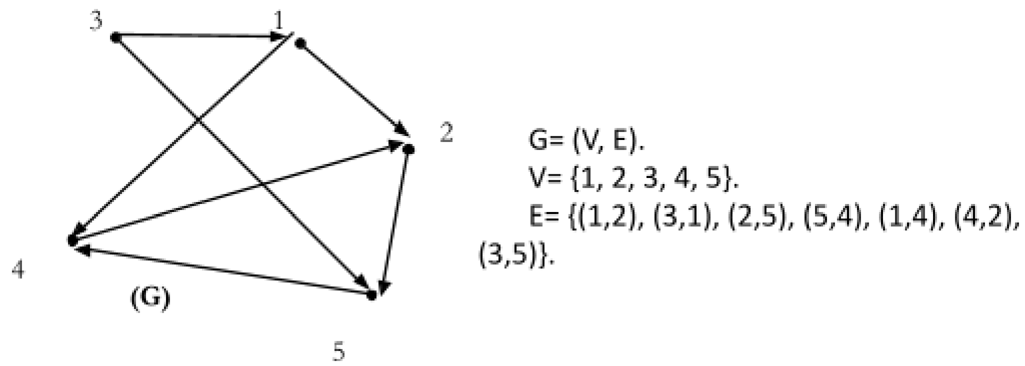


Figure 1.2 : Un graphe orienté

1.4 Graphe non orienté :

Dans un graphe non orienté G, les couples $(v_i, v_j) \in E$ ne sont pas orienté, c'est-à-dire que (v_i, v_j) est équivalent à (v_j, v_i).

Une paire (v_i, v_j) est appelée arête, représentée graphiquement par v_i —— v_j [1].

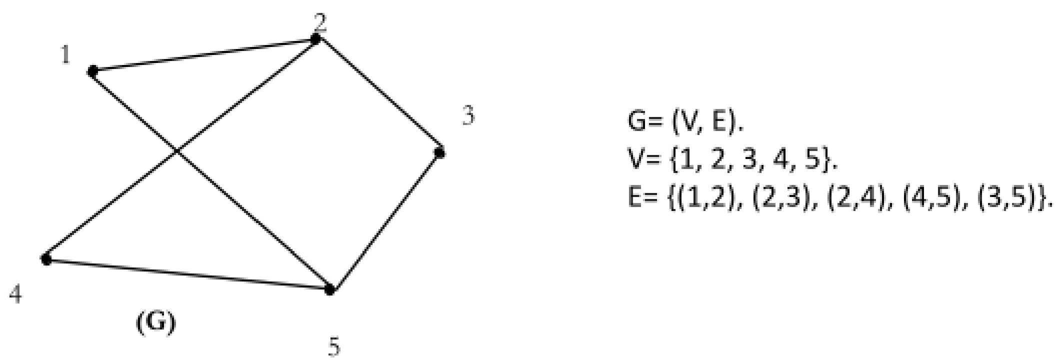


Figure 1.3 : Un graphe non orienté

1.5 L'ensemble des prédécesseurs, successeurs et voisins d'un sommet ;

- De A en peut atteindre B et C par AB et AC. Donc B et C forment l'ensemble des successeurs de A, qu'on note $^{+}(A)$.
- De B et D en peut atteindre A par BA et DA. Donc B et D forment l'ensemble des prédécesseurs de A, qu'on note $^{-}(A)$.
- L'ensemble de voisins de sommet A et égal à la réunion de l'ensemble de ses prédécesseurs et des successeurs.

$$(A) = {}^{+}(A) \cup {}^{-}(A).$$

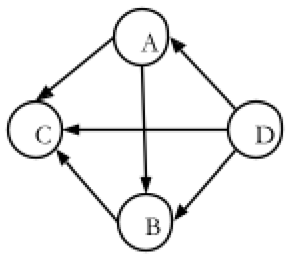


Figure 1.4: Représentation de l'ensemble des voisins

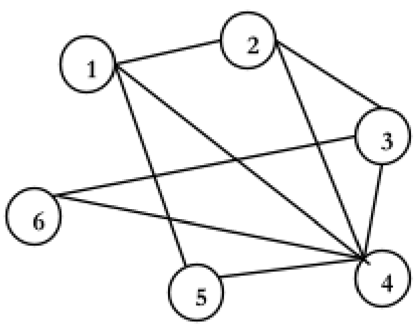
1.6 Degré d'un graphe :

Le degré d'un sommet est le nombre de ses voisins qui également le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes.

Un sommet de degré 0 est un sommet isolé.

Le voisin d'un sommet v_i tout sommet v_j tel que (v_i, v_j) ou de façon équivalente est une arête du graphe [1].

Le degré d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets. Dans l'exemple ci-dessous le degré du graphe est 5, à cause de sommet 4.



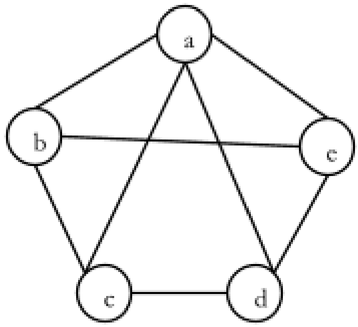
D (G)=5

Figure 1.5 : Le degré d'un graphe

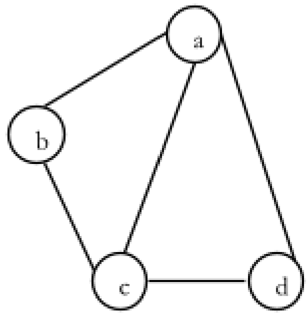
1.7 Un sous-graphe :

On dira qu'un sous graphe $G' = (V',E')$ est un sous graphe d'un graphe G= (V, E) lorsqueV' V et $E' \subset$ E. Où V' est l'ensemble des extrémités des arêtes deE'.

Soit G= (V, E) le graphe défini par



(G)



()

V= {a, b, c, d, e}.
n= 5.

E= {ab, bc, cd, de, ea, ac, ad, be}.

m= 8.

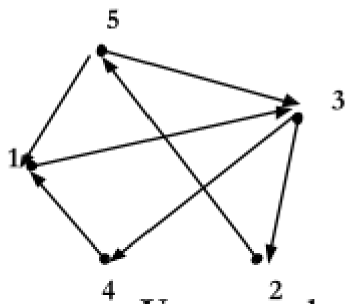
V= {a, b, c, d}.
n= 4.

E= {ab, bc, cd, ac, ad}.
m= 5.

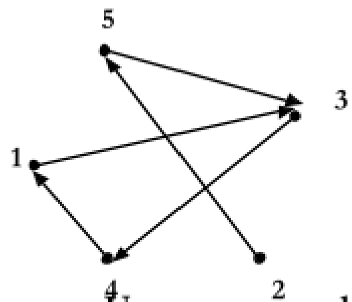
Figure 1.6 : () est le sous-graphe de graphe (G)

1.8 Graphe partiel :

D'un graphe orienté ou non est le graphe obtenu en supprimant, certains sommets et tous les arcs ou arêtes aux sommets supprimés.



Un graphe G.

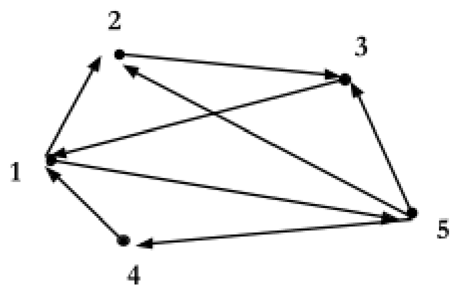


Un graphe partiel de G.

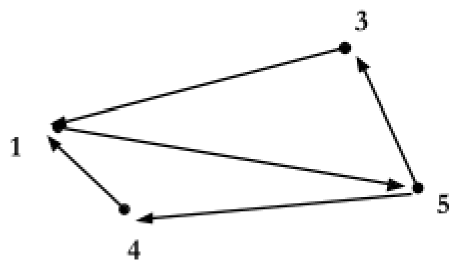
Figure 1.7 : Un graphe partiel

1.9 Un sous- graphe partiel :

D'un graphe orienté ou non est le graphe obtenu en supprimant, certains sommets et tous les arcs et arêtes aux sommets supprimés.



Un graphe G.



Un sous-graphe partiel de G.

Figure 1.8 : Un sous-graphe partiel

1.10 Graphe valué :

Un graphe valué (pondérer) est un graphe muni de poids ou coûts sur ses arcs ce poids peut représenter toute valeur numérique associée à un arc : distance, coût de transports, temps de parcours, probabilité de transition [2].

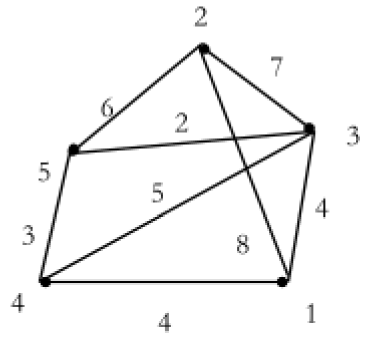


Figure 1.9 : Un graphe valué

1.11 Quelques types de graphes :

1.11.1 Graphe simple :

Un graphe est dit simple si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet.

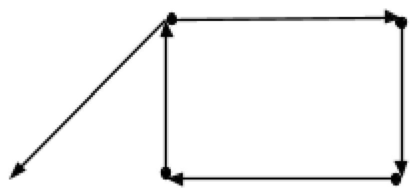


Figure 1.10 : Un graphe simple

1.11.2 Multi-graphe :

Un graphe est dit multi-graphe s'il contient deux sommets sont relies par plusieurs arêtes ou existe boucle sur un sommet.

Un multi-graphe orienté

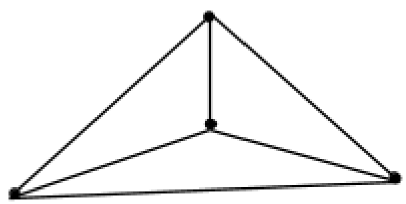
(b) Un multi-graphe non orienté

Figure 1.11 : Un multi-graphe orienté ou non orienté

1.11.3 Graphe complet :

Un graphe complet est un graphe où chaque sommet est adjacent.

Exemple :



Graphe

Figure 1.12 : Le graphe est un graphe complet

1.11.4 Graphe biparti :

Dans un graphe biparti on partitionner l'ensemble des sommets en deux classes que toute l'arête ait une extrémité dans chacune des deux classes, il existe des cycles, ils sont de longueurs paire [7].

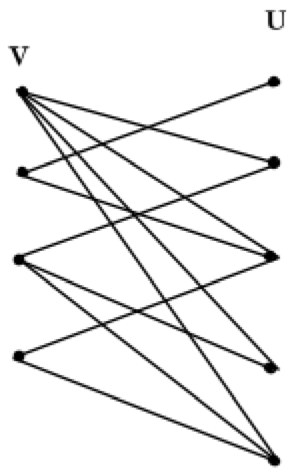


Figure 1.13 : Le graphe est un graphe biparti

1.11.5 Graphe biparti complet :

Dans un graphe biparti complet on partitionner l'ensemble des sommets en deux classes que toute l'arête ait une extrémité dans chacune des deux classes, telle que chaque sommet d'une classe soit adjacent à chaque sommet de l'autre.

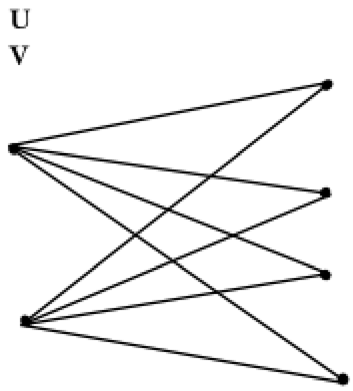


Figure 1.14 : Le graphe est un graphe biparti complet

1.11.6 Isomorphismes de graphes :

Les graphes H et G sont isomorphes s'il existe une bijection entre les ensembles de sommets des deux graphes qui respectent la relation de voisinage.

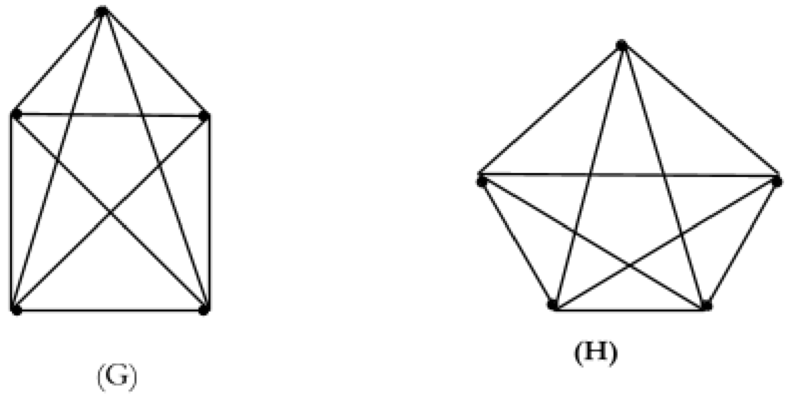


Figure 1.15: Les graphes H et G sont isomorphes

1.12 Arbre :

Un arbre est un graphe connexe et sans cycles indifféremment orienté ou non orienté.

Les propriétés suivantes sont équivalentes pour caractériser un arbre :

1. G est connexe et sans cycle.
2. G est sans cycle et possède n −1 arêtes.
3. G est connexe et admet n −1 arêtes.
4. G est sans cycle, et en ajoutant une arête, on crée un et un seul cycle élémentaire.
5. G est connexe, et en supprimant une arête quelconque, il n'est plus connexe.
6. Il existe une chaine et une seule entre 2 sommets quelconques de G [9].

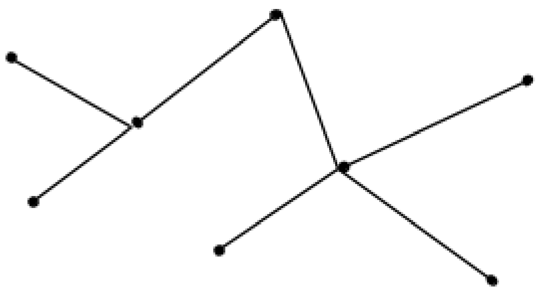


Figure 1.16 : Un arbre

1.13 Notion de connexité :

1.13.1 Cas graphe non orienté

1.13.1.1 Graphe connexe :

Un graphe connexe est un graphe qu'une composante connexe si seulement s'il existe un parcours du graphe qui contient tous les sommets du graphe. Autrement dit pour tout couple de sommets distinct $(v_i, v_j) \in V^2$. Il existe une chaine entre v_i, v_j [2].

Un graphe connexe

Un graphe non connexe

Figure 1.17 : Graphe connexe ou non connexe

1.13.1.2 Graphe composante connexe :

D'un graphe non orienté si chaque sommet est accessible à partir de n'importe quel autre, par une chaine et maximal.

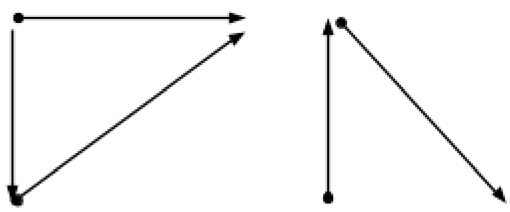


Figure 1.18 : Graphe composante connexe (CC)

1.13.2 Cas graphe orienté

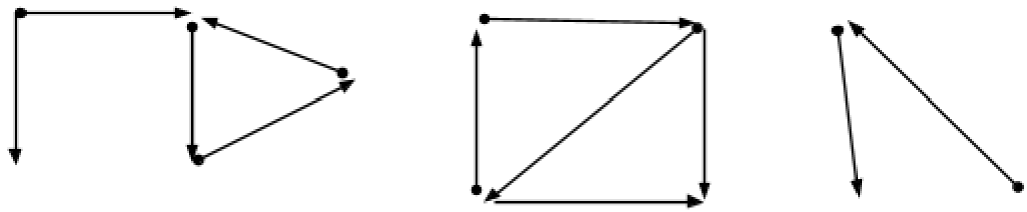
Dans le graphe orienté en remplace la notion de chaine par chemin : on parle de graphe fortement connexe au lieu de connexe. Et de composante fortement connexe au lieu de composante connexe.

1.13.2.1 Graphe fortement connexe :

Si chaque sommet est accessible à partir de n'importe quel autre, si pour tout couple de sommets distincts $(v_i, v_j) \in V^2$. Il existe un chemin de v_i vers v_j, et un chemin de v_j vers v_i.

1.13.2.2 Graphe composante fortement connexe :

Si chaque sommet est accessible à partir de n'importe quel autre, par un chemin et maximal.



- **Graphe fortement connexe (FC)**
- **Graphe composante fortement connexe (CFC)**

Figure 1.19 : Fortement connexe et composante fortement connexe

1.14 Chemin, Chaine, Cycle et Circuit :

1.14.1 Chaine

Une chaine dans un graphe G est une suite ayant pour éléments alternativement des sommets et des arêtes, note $c_n = v_1, e_1, v_2, \ldots e_n, v_{n+1}$. La taille d'une chaine est le nombre des ses arêtes.

1.14.2 Cycle

On appelle cycle une chaine dont les extrémités se confondent. Dans le graphe précédent $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_1)$ est un cycle.

1.14.3 Chemin

C'est une chaine orientée dans un sens unique.

1.14.4 Circuit

C'est un chemin fermé, c'est-à-dire l'extrémité finale et initiale représentées par le même sommet [9].

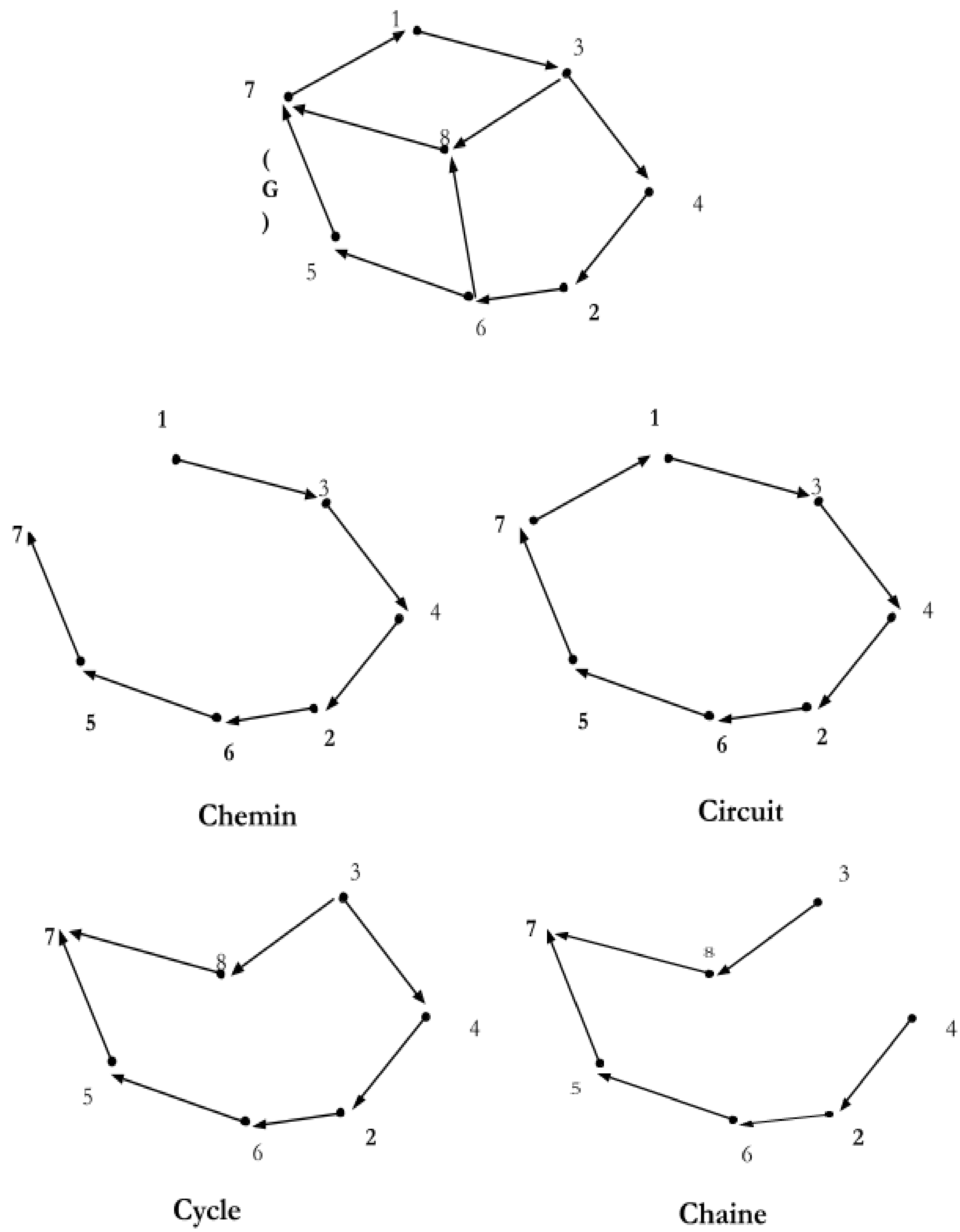


Figure 1.20 : chemin, circuit, cycle, chaine.

1.15 Chemin élémentaire :

Si les sommets qu'il contient sont tous distincts.

1.16 Notion de graphe eulérien

1.16.1 Chaine eulérienne :

C'est une chaine passant une et une seul fois par chacune des arêtes de G.

1.16.2 Cycle eulérienne :

C'est un Cycle passant une et une seul fois par chacune des arêtes de G.

1.17 Notion de graphe hamiltonien

1.17.1 Chaine hamiltonien

C'est une chaine passant une et une seul fois par tous les sommets de G.

1.17.2 Cycle hamiltonien

C'est un Cycle passant une et une seul fois par chacun des sommets de G sauf le sommet de départ.

1.18 Matrice adjacence sommet-sommet :

La matrice d'adjacence d'un graphe G= (V, E) est une matrice carrée M de dimension n*n (c'est-à-dire un tableau à n lignes et n colonnes) et dont les éléments valent 0 ou 1. On note $m_{i,j}$ [9].

$$m_{i,j}=\{1\ si\ v_i, v_j\ sont\ voisins.\ 0 \qquad si\ non.$$

Exemple :

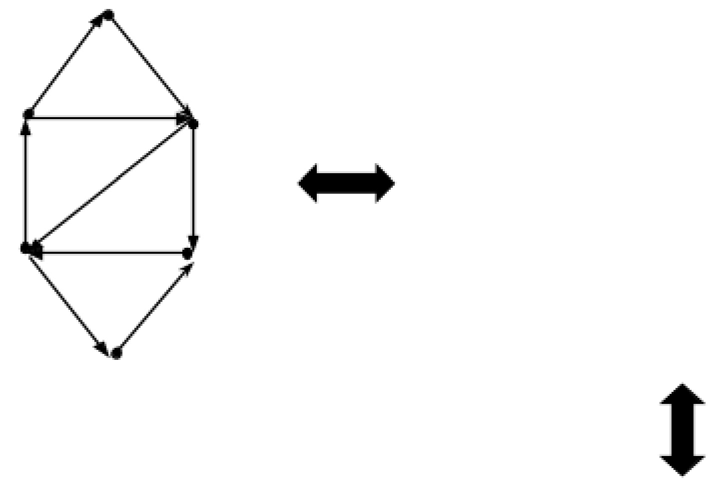


Figure 1.21 : Représentation par la matrice d'adjacence d'un graphe

1.19 Matrice d'indice sommets-arcs :

La matrice d'indice d'un graphe G= (V, E) est une matrice de taille n*m, si éléments prennent les valeurs 1, 0 ou -1. Chaque ligne de la matrice est associée à un sommet et chaque colonne à un arc. Chaque élément de la matrice indique la relation entre un sommet et un arc comme suit :

$$m_{i,j}=$$

$$\{ \quad 1 \ si\ le\ sommet\ est\ une\ extrimité\ initiale\ de\ l'arc. \quad -1\ si\ le\ sommet\ est\ une\ extrimité\ finale\ de$$

Exemple :

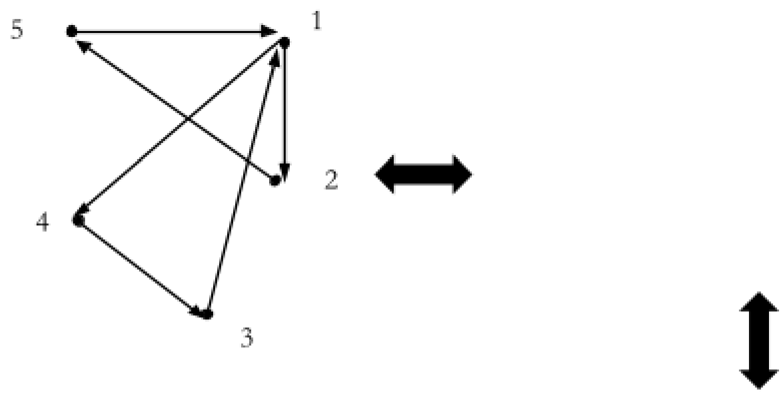


Figure 1.22 : Représentation par la matrice d'indice d'un graphe

1.20 Conclusion

La théorie des graphes est la discipline mathématique et informatique qui étudie les graphes, lesquels sont des modèles abstraits de dessin de réseaux reliant des objets.

Cette évolution constante est sans doute due au large spectre des applications telles qu'électronique, la linguistique, la chimie, la sociologie et autres.

Dans ce chapitre nous avons parlé des concepts fondamentaux liés à La théorie des graphes expliquant ainsi les éléments principaux, et quelques définitions générale pour utilisées dans les chapitres suivants.

Chapitre 02 : Le problème de la coloration

2.1 Introduction

Le problème planaire vient du coloriage de pays sur une carte de géographie. Combien de couleur un imprimer doit il utiliser pour chaque deux pays à frontière commune n'aient par la même couleur ?

Deux pays qui se touchent par un seul point sont considérés sans frontière commune. Le graphe sous-jacent à pour sommets les pays, et une arête entre toute paire de pays à frontière commune. Coloration (en rouge, vert, bleu) d'une carte de 17 pays : il y a $3^{17} = 129.10^{6}$ colorations possibles par énumération compléte.

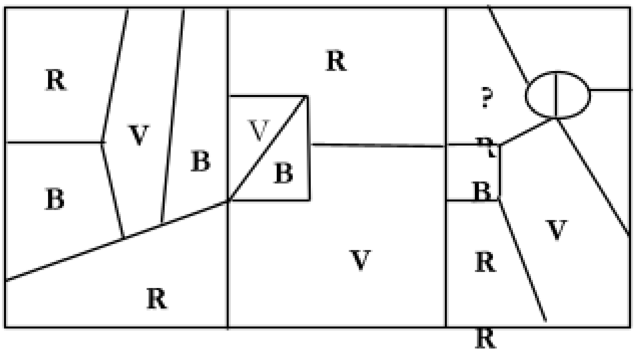


Figure 2.1: Tentative de 3-coloration d'une carte

Dans ce chapitre, nous discutons des différentes colorations de graphes et des problèmes de complexité associées.

Dans la littérature, il existe trois types de colorations sont : la coloration des sommets, la coloration des arêtes et la coloration des faces, mais on peut ramener à la coloration des sommets.

Le terme de coloration désigne en générale une coloration des sommets.

2.2 L'histoire de la coloration des graphes

Les premiers résultats de coloration de graphe concernent presque exclusivement la coloration des cartes. En cherchant à mettre en couleurs une carte des comtés d'Angleterre, Francis Guthrie (mathématicien et botaniste sud-africain 1831 − 1899) postule en 1852 la conjecture des quatre couleurs : il remarqua en effet qu'il n'y avait besoin que de quatre couleurs pour que deux comtés ayant une frontière commune soient de couleurs différentes.

En 1879, Alfred Kempe (mathématicien anglais 1849 − 1922) publia ce qu'il prétendit en être une démonstration et pendant une décennie, on crut que le problème des quatre couleurs était résolu.

En 1890, Percy John Heawood (mathématicien anglais 1861 − 1955) fit remarquer que la démonstration de Kempe était fausse. Il montra quant à lui le théorème des cinq couleurs en reprenant des idées de Kempe.

De nombreux travaux ont été publiés lors du siècle suivant pour réduire le nombre de couleurs à quatre, jusqu'à la démonstration finale de Kenneth Appel (mathématicien américain né en 1932) et Wolfgang Haken (mathématicien allemand né en 1928). Il s'agit aussi de la première preuve majeure utilisant massivement l'ordinateur.

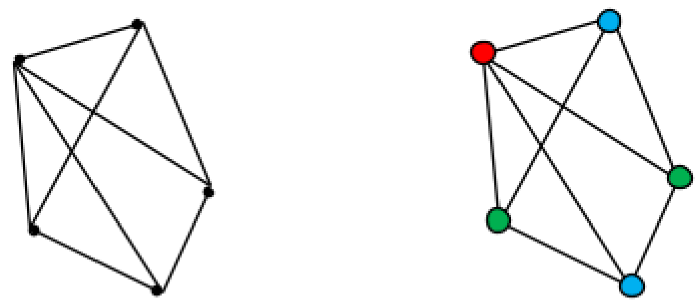
Outre le problème de cartes, la coloration des graphes intervient également pour le problème d'optimisation avec contraintes (planning, incompatibilités), dans les réseaux, la cryptographie… Aucune formule miracle ne permet de déterminer le nombre chromatique d'un graphe quelconque [8].

2.3 Pourquoi la coloration de graphe :

- Pour résoudre le problème central en théorie des graphes.
- Nombreux champs d'application.
- Optimisation avec contraintes.

2.4 Coloration des sommets d'un graphe :

Soit en graphe simple G (V, E). G est K-coloriable si on peut colorer ses sommets avec k couleurs distinctes, sans que deux sommets voisins aient la même couleur [2].



- Un graphe G
- Coloration des sommets de G

Figure 2.2 : Coloration des sommets d'un graphe G

2.5 Le nombre chromatique :

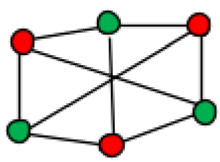
Le plus petit entier K pour lequel G est K-colorable, est note $\chi(G)$.

Le problème de calcul de χ(G) est très difficile nous verrons des algorithmes adéquats au chapitre3.

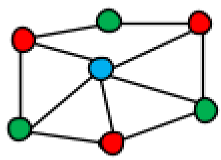
Propriété :

- Le nombre chromatique d'un graphe d'ordre n et inférieur ou égal à n.
- Le nombre chromatique du graphe complet K_n et n.
- Si un graphe d'ordre n à un sous graphe complet d'ordre K alors son nombre chromatique est compris entre k et n.
- Si Δ est le degré maximal d'un graphe alors son nombre chromatique est inferieur où égal a Δ+1.

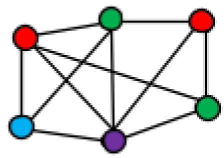
Exemple :



Un graphe G avec (G)=2.



Un graphe G avec (G)=3.



Un graphe G avec (G)=4.

Figure 2.3 : Le nombre chromatique de quelques graphes

2.6 Domaine d'application la coloration :

- Ordonnancement.
- L'affectation de fréquences dans les réseaux cellulaires.
- L'affectation de registres dans les compilateurs.
- Les emplois du temps.
- La gestion des chaines logistiques.
- La calcule de dérivées, de matrice jacobienne et hessiennes.
- La gestion du trafic aérien.
- L'allocalisation de ressources en réseau [4].

Exemple 01 : Le problème d'emploi du temps

Une université doit organiser les horaires des examens. On suppose qu'il y a 7 épreuves à planifier, correspondant aux cous numérotés de 1 à 7 et que les paires de cours suivantes ont des étudiants communs : 1 et 2, 1 et 3, 1et 4, 1 et 7, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et 7, et 6 et 7. Comment organiser ces épreuves de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps autre et cela sur une durée minimale ? [5]

Solution :

Construisons le graphe G dont les sommets sont les épreuves numérotées de 1 à 7, une arête relie deux de ses sommets lorsqueles deux cours correspondants possèdent des étudiants communs :

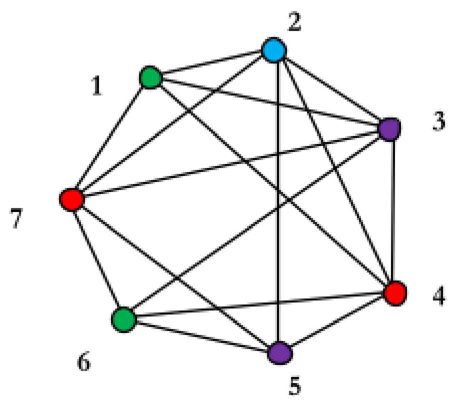


Figure 2.4 : Le problème d'emploi du temps

Planifier les examens en un temps minimal consiste à déterminer une K-coloration de G, avec K= $\chi(G)$, G possède un sous-graphe complet d'ordre 4 (de sommets 1,2,3,4), donc

$\chi(G) \geq 4$. Déterminons une partition des sommets de G en sous-ensembles stables :

$$S_1 = \{1,6\}.$$

$$S_2 = \{2\}.$$

$$S_3 = \{3,5\}.$$

$$S_4 = \{4,7\}.$$

D'où $\chi(G) \leq 4$, et finalement $\chi(G) = 4$.

Les examens peuvent être répartis en 4 périodes, de la manière suivante :

- $1^{ere\ période}$, épreuves des cours 1 et 6.
- $2^{éme}$ période, épreuves des cours 2.
- $3^{éme}$ période, épreuves des cours 3 et 5.
- $4^{éme}$période, épreuves des cours 4 et 7.

Exemple 02 : Un problème d'aquariophilie

A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit poissons, dans le tableau-ci-dessous une croix signifie que les poissons ne peuvent cohabiter dans un même aquarium :

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		×	×	×			×	×
B	×				×	×	×	
C	×			×		×	×	×
D	×		×		×			×
E		×		×		×	×	
F		×	×		×			
G	×	×	×		×			
H	×		×	×				

Quel nombre minimum d'aquariums faut-il ?

Solution :

Construisons le graphe G dont les sommets sont les huit poissons tel que ses sommets sont reliés lorsque les poissons associés à ces sommets ne peuvent cohabiter le nombre minimum d'aquariums est égal au nombre chromatique de ce graphe

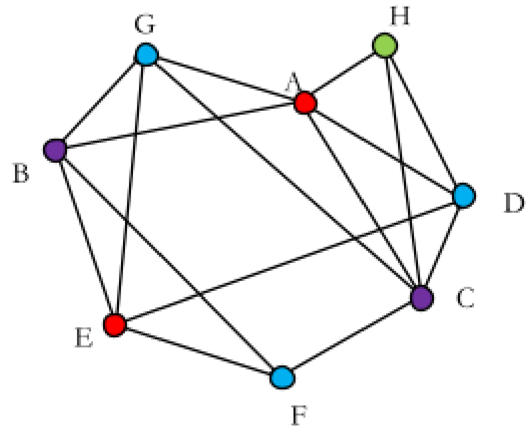


Figure 2.5 : Un problème d'aquariophilie

G contient un sous-graphe complet d'ordre 4 (de sommet A, C, D, H), donc $\chi(G) \geq 4$.
Déterminons une partition des sommets de G en sous-ensemble stables :

$$S_1 = \{A, E\}.$$

$$S_2 = \{B, C\}.$$

$$S_3 = \{D, F, G\}.$$

$$S_4 = \{H\}.$$

Donc $\chi(G) \leq 4$, et on en déduit que $\chi(G) = 4$.

2.7 Coloration des arêtes d'un graphe :

On peut colorer ses arêtes telles que chaque deux arêtes adjacentes de G doivent des couleurs différentes [9].

Exemple :

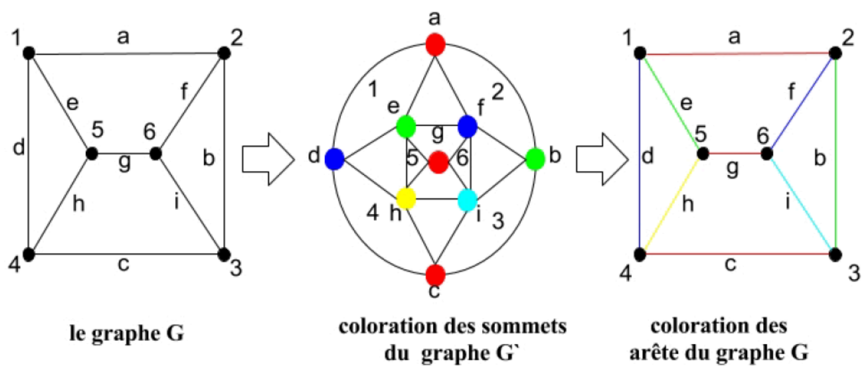


Figure 2.6 : coloration des arêtes d'un graphe

2.8 Indice chromatique :

Le plus petit entier K pour lequel G admet une K-colorable des arêtes, est notés ' (G).

2.9 Graphe dual :

On appelle dual d'un graphe planaire appelé primal qui obtenu de la façon suivante :

- Dans toute face du primal on dessine un sommet du dual.
- Pour toute arête séparent deux faces du primal, on dessine une arête joignant les deux sommets correspondants du dual (et qui traverse l'arête correspondante du primal).

Remarquons que cette relation et symétrique : si G_2 est le dual de G_1, alors G_1 est le dual de G_2.

2.10 Coloration des faces d'un graphe :

La coloration des faces d'un graphe planaire revient à colorier les sommets de son dual.

Exemple :

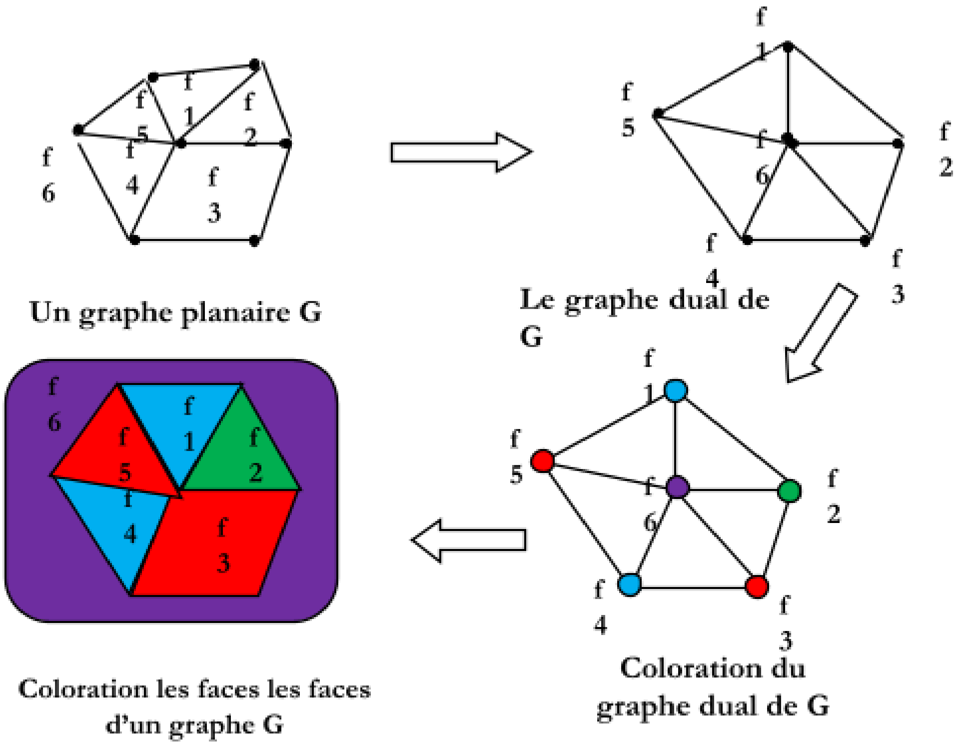


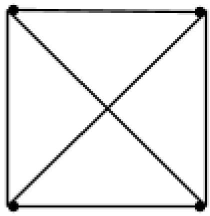
Figure 2.7 : Coloration les faces d'un graphe planaire

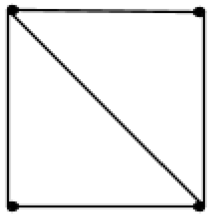
2.11 Graphe planaire :

Un graphe est appelé planaire s'il peut être dessiné dans le plan sans que deux arêtes ne s'intersectent.

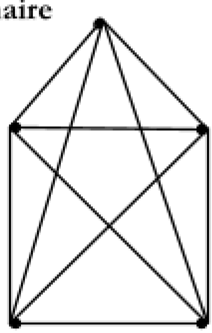
Un graphe peut ne pas avoir de représentation planaire et s'il en a, il en a plusieurs.
Un graphe est dit planaire s'il possède au moins une représentation planaire.

Exemple :





Un graphe K_4 est un graphe planaire



Un graphe K_5 n'est pas un graphe planaire

Figure 2.8 : Un graphe planaire et un graphe non planaire

2.13 Formule d'Euler :

Soit G un graphe planaire connexe d'ordre n, ayant m arêtes, si f désigne le nombre de faces d'une représentation plane de G [9], on a :

$$n + f = m + 2.$$

2.14 Degré des faces :

Soit G un graphe planaire connexe d'ordre n, ayant m arêtes, si f on effectue la somme S des degrés de toutes faces, comme les arêtes sont toutes comptées exactement deux fois, on a : S=2m.

Dans une représentation plane, le degré moyen $\overline{f}$ des faces du graphe vérifie :

$$\overline{f} = 2m / f.$$

Exemple 01 :

La formule d'Euler dans le cas d'un arbre.

Un arbre a une seule face, car il n'a pas de cycle. Par ailleurs, le nombre d'arêtes d'un Arbre est égal au nombre de sommets - 1. La formule d'Euler est donc bien vérifiée.

Exemple 02 :

Utilisant la formule d'Euler que K_5n'est pas planaire.

En effet, K_5 possède 10 arêtes et 5 sommets. D'après la formule d'Euler, si K_5est planaire, alors il a 10-5+2=7 faces, d'où $\overline{f} = 20 / 7 < 3$; or pour la moyenne de k nombres soit strictement inferieur à 3, il faut que l'un d'entre eux au moins soit strictement inférieur à 3, ce qui est impossible car pour toute représentation plane d'un graphe connexe d'ordre n >2, le degré d'une face quelconque est supérieur ou égal à 3.
On a une contradiction avec la formule d'Euler qui nous dit qu'on doit avoir 7 faces.

2.15 Problèmes célèbre de la théorie des graphes :

- Problème des ponts de Königsberg (18eme siècle) : peut-on imaginer une promenade dans la ville en empruntant chacun de ses 7 ponts une fois et un seul pour revenir à son point de départ ?
- Problème du plus court chemin (Algorithme de Dijkstra).
- Problème du flot maximal, problème de la coupe maximale, problème de couplage.
- Problème de voyageur de commerce (TSP) : NP-difficile ne peut être résolu qu'avec des heuristiques, pour des tailles modestes.
- Coloration des sommets ou des arêtes d'un graphe.
- Théorème de quatre couleurs [6].

2.16 Domaines d'application de la théorie des graphes :

- De nombreux problèmes distincts peuvent se modéliser avec des graphes.
- Tous les domaines où la notion de réseau intervient : problèmes d'ordonnancement, de transport, de flots, …etc.
- Informatique, télécommunication, réseaux sociaux.
- Gestion d'horaires, planification de taches, …etc.

2.17 Nombre chromatique et le degré maximal (théorème de Brooks) :

En mathématiques, et plus particulièrement dans la théorie des graphes, le théorème de Brooks donne une relation entre le degré maximal d'un graphe connexe non orienté et son nombre chromatique.
Selon ce théorème, dans un graphe où chaque sommet a au plus Δ voisins, les sommets peuvent être colorés avec au plus Δ couleurs, sans que deux sommets adjacents n'aient la même couleur, sauf dans deux cas, les graphes complets et les graphes cycles de longueur impaire, qui ont besoin de $\Delta + 1$ couleurs.

2.18 Définition d'une clique :

Une clique dans un graphe G est un ensemble de sommets tous reliés 2 à 2. La taille de la plus grande clique dans un graphe G se note ω(G).

2.19 Définition d'une stable :

Une stable dans un graphe G est un ensemble de sommets qui n'est pas reliés 2 à 2.

2.20 Les bornes pour le nombre chromatique d'un graphe :

Le nombre chromatique du graphe, on désigne par :

- ω(G) le cardinal maximum d'une clique de G.
- α(G) le cardinal maximum d'un stable de G.
- Δ(G) le degré maximum de G.

Les propositions qui donnent χ(G) :

Proposition 01 : $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.
Proposition 02 : $\chi(G) \leq 1 + n - \alpha(G)$.
Proposition 03 : $\chi(G) \geq n / \alpha(G)$.

Exemple :

Le graphe de la figure admet comme invariants : n=6, Δ=4, ω=3, α=2.
Les bornes sont donc : $3 \leq \chi(G) \leq 5$, $\chi(G) \leq 1 + 6 - 2 = 5$, $\chi(G) \geq 3$.
Cependant.
ω(G) = 3 car une 3-coloration existe : elle est indiquée sur la figure.

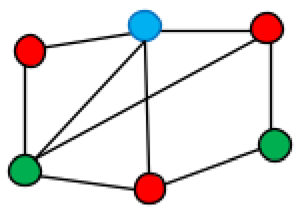


Figure 2.9: Une coloration optimale des sommets de G.

2.21 Classification des méthodes de résolution :

Les méthodes de résolution peuvent être classées en deux grandes fumailles de classes qui sont les méthodes exactes et les méthodes approchées.

2.21.1 Les méthodes exactes :

Les méthodes exactes produisent une solution optimale pour une instance de problème d'optimisation donné. Elles se reposent généralement sur la recherche arborescente et sur l'énumération partielle de l'espace de solutions. Elles sont utilisées pour trouver au moins une solution optimale d'un problème. Permettent d'aboutir à la solution, mais elles sont trop gourmandes en termes de temps de calcul et d'espace mémoire requis.

Les algorithmes exacts les plus connus sont les méthodes de séparation et évaluation, la programmation dynamique [7].

2.21.2 Les méthodes approchées :

Contrairement aux méthodes exactes, les méthodes approchées ne procurent pas forcément une solution optimale, mais seulement une bonne solution (de qualité raisonnable) en un temps de calcul aussi faible que possible. Ils composent en deux classes : des méthodes heuristiques et des méthodes métaheuristiques. Une partie importante des méthodes approchées est désignée sous le terme de Méta heuristiques.

2.21.3 Les heuristiques appliquées :

Il existe déférentes heuristiques selon les problèmes à traiter, on distingue trois types : la méthode constructives, recherche locale et les heuristiques évolutives.

2.21.4 Méthodes constructives : méthodes gloutonnes, évaluations et séparations, arborescentes, programmation… recherches

2.21.5 Recherches locales ou par voisinages : descentes, recuits simulé, méthode tabou, min-conflit…

2.21.6 Application d'évolution ou à population : algorithme génétique, stratégies d'évaluation, programmation évaluative…

2.22 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons voir l'histoire problème de la coloration des graphes, en donnant toutes les définitions et les notions de bases nécessaires puis les déférents domaines d'applications de la coloration et intéressons comment calculer le nombre chromatique par les proportions de la coloration des sommets, nous avons voir aussi la classification des méthodes de résolution.

Chapitre 03 : les algorithmes de la coloration

3.1 Introduction

Il est difficile d'affirmer qu'il existe un meilleur algorithme pour la coloration de graphe. L'ordre de complexité des algorithmes exacts les rend impraticables dans la vie réelle où les graphes ont un grand nombre de sommets. Quant aux algorithmes constructifs connus, leur temps d'exécution est rapide mais la qualité des résultats obtenus ne peut égaler celle des métas heuristiques. Ces dernières sont très complexes, indéterministes et exigent souvent le réglage méticuleux d'un grand nombre de paramètres initiaux, selon le graphe. Ce choix forcé entre la simplicité, l'efficacité et ou la rapidité d'exécution a été le leitmotiv de la conception de l'algorithme.

Tout algorithme qui colore un graphe avec un minimum de couleurs et en garantissant que ce nombre de couleurs est bien minimal a une complexité exponentielle sauf pour des graphes particuliers pour lesquels ce problème est plus facile.

Il existe plusieurs algorithmes de coloration, que nous allons voir plus en détail dans ce chapitre.

3.2 Quelques algorithmes gloutons :

3.2.1 Algorithme glouton élémentaire

Les étapes de l'algorithme suivantes :

1. Prendre une permutation quelconque des sommets.
2. Prendre le premier sommet colorie et lui affecter le premier couleur autorisé.

Une coloration gloutonne ne donne pas forcément le nombre chromatique.

Exemple :

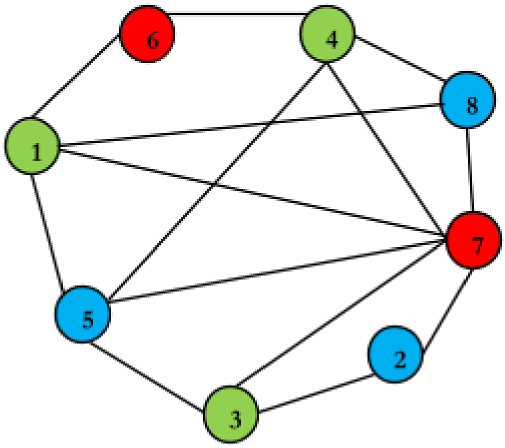


Figure 3.1 : Coloration des sommets avec l'algorithme glouton élémentaire

3.2.2 Algorithme Welsh & Powell

Les étapes de l'algorithme suivantes :

1. Repérer le degré à chaque sommet.
2. Ranger les sommets par l'ordre de degrés de croissants.
3. Attribuer au premier sommet (A) de la liste une couleur.
4. Suivre la liste en attribuant la même couleur au premier sommet (B) qui ne soit pas adjacent à (A).
5. Suivre (si possible) la liste jusqu'au prochain sommet (C) qui ne soit adjacent ni à A ni à B.
6. Continuer jusqu'à ce que la liste soit finie.
7. Prendre une deuxième couleur pour le premier sommet (D) non encore colore de la liste.
8. Répéter les opérations 4 à 7.
9. Continue jusqu'à avoir colorie tous les sommets.

Exemple :

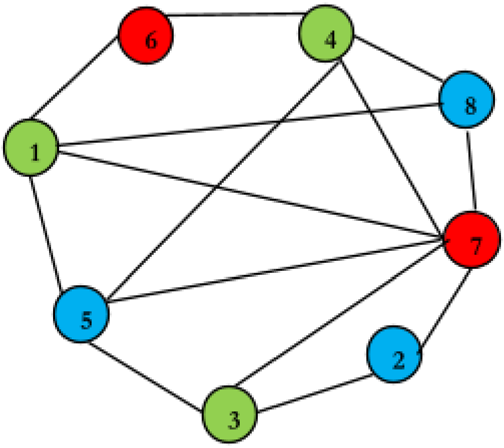


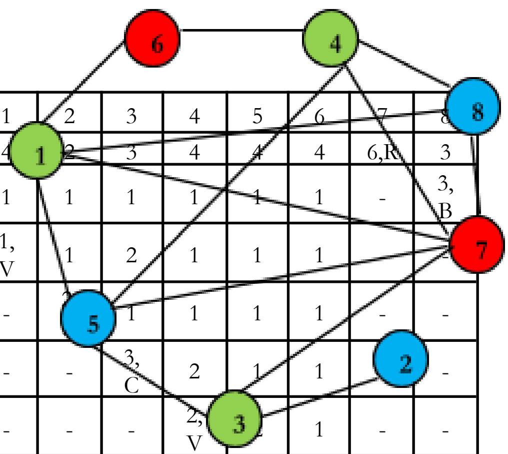
Figure 3.2 : Coloration des sommets avec l'algorithme Welsh & Powell

Sommet	7	1	4	5	3	8	2	6
degré	6	4	4	4	3	3	2	2
rouge	✔							✔
vert		✔	✔		✔			
bleu				✔		✔	✔	

3.2.3 Algorithme DSATURE de Brélaz

1. Initialement, aucun sommet n'est colorié, donc DSAT(i)=d(i), i=1, …, n.
2. Tant qu'il existe un sommet non colorié.
3. Prendre un sommet non colorié i avec DSAT maximum, (s'il y en a plusieurs, on prend celui de degré maximum et s'il y en a plusieurs, on prend celui de numéro minimum).
4. Colorier i avec la première couleur disponible autorisée.
5. Mettre à jour le DSAT des voisins de i.

Exemple :



Sommets	1	2	3	4	5	6	7	8
DSAT	4	2	3	4	4	4	6,R	3
	1	1	1	1	1	1	-	3, B
	1, V	1	2	1	1	1	[illegible]	-
	-	[illegible]	1	1	1	1	-	-
	-	-	3, C	2	1	1	[illegible]	-
	-	-	-	2, V	[illegible]	1	-	-
	-	-	-	-	2, B	1	-	-
	-	-	-	-	-	2,	-	-

						R		

Figure 3.3 : Coloration des sommets avec l'algorithme DSATURE de Brélaz

3.2.5 Algorithme de Vitaver

1. Une orientation des arêtes sans circuits quelconque.
2. Améliorer l'orientation pour obtenir le minimum des niveaux.
3. $x(G)$ Estégal au nombre minimum de niveaux d'une orientation sans surcuit de$G$.

Exemple :

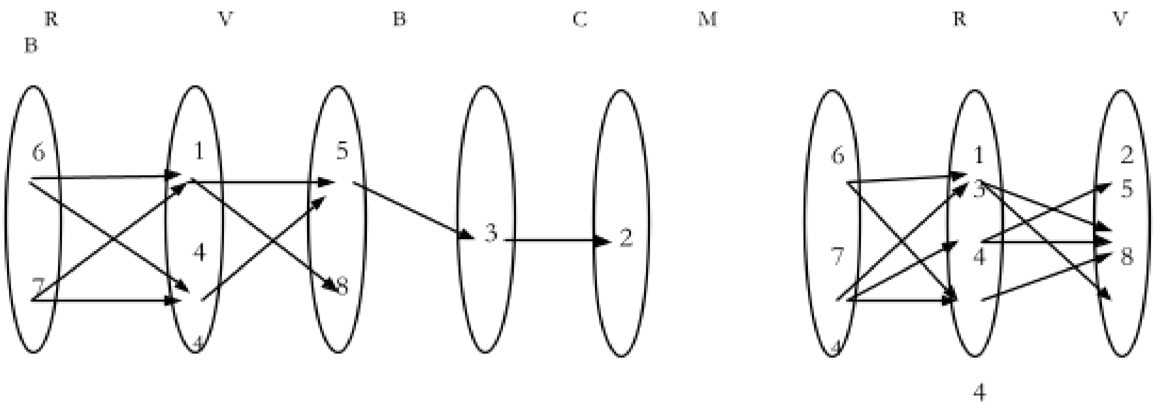


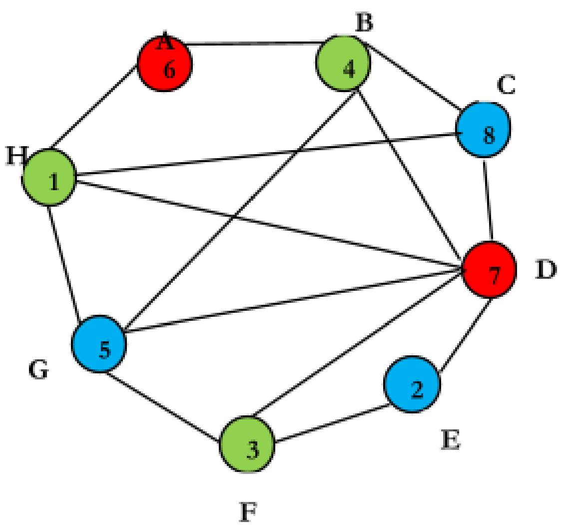
Figure 3.4 : Coloration des sommets avec l'algorithme de Vitaver

4

3.2.6 Algorithme RLF Leighton 79 (Récursive-Large-First)

1. Choisir un sommet u de degré maximum.
2. Choisir une version de ce sommet v tel que $vc(u, v)$ soit maximum.
3. Contracter v et u.
4. Répéter 2 et 3 jusqu'à ce que u soit voisin à tous les autres sommets.
5. Enlever le sommet u et rependre à l'étape 1[10].

Exemple :



L'ordre de coloration des sommets : D, A

en rouge, H, B, F en vert, G, C, E en bleu.

D!A!H!B!F!G!C!E.

Figure 3.5 : Coloration des sommets avec l'algorithme RLF

3.3 La coloration par contraction :

3.3.1 Méthode des contractions :

- Contraction de deux sommets : G → G / uv.

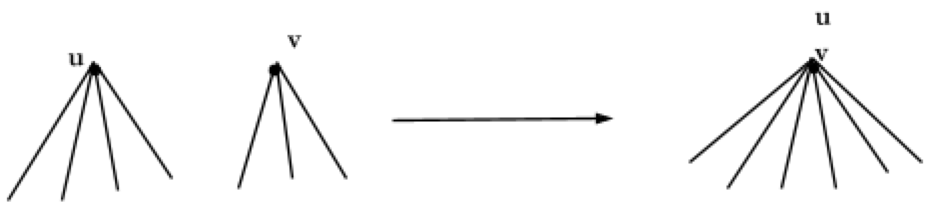


Figure 3.6 : contraction de deux sommets

- Ajout d'arête G → G : uv.

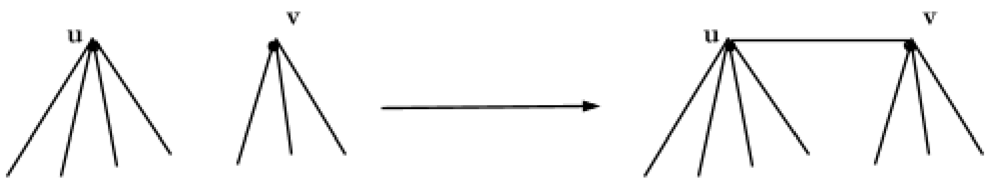


Figure 3.7 : Ajout d'arête

3.3.2 Théorème de Zykov 1952

- Pour tout graphe G et tous sommets u et v non adjacents,

$$\chi(G) = \min \{\chi(G / uv), \chi(G : uv).\}$$

- Arbre de Zykov par applications multiples de ce théorème les feuilles de cet arbre sont des graphes complets $G_i= (V_i,E_i)$ et $\chi(G)= \min_i |V_i|$.

Exemple :

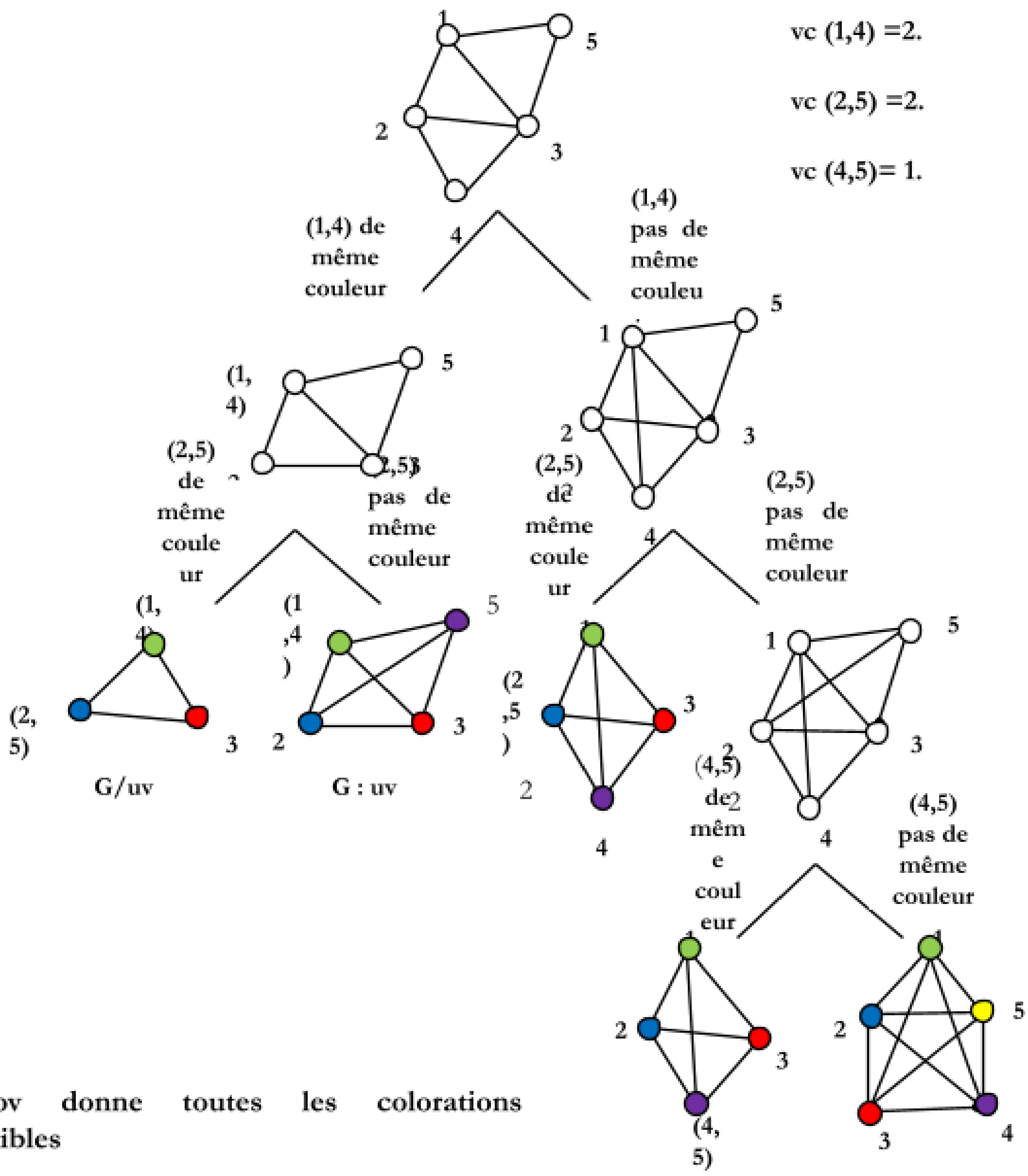


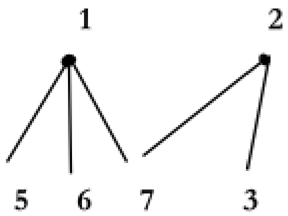
Figure 3.8 : Coloration des sommets avec l'algorithme Zykov

3.3.3 Algorithme de Dutton & Brigham (1981)

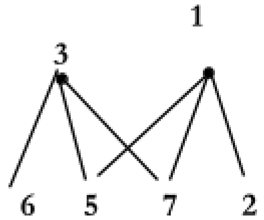
$VC(u, v)$ est le nombre de voisins commun entre u et v non adjacents

1. Choisir deux sommets u, v tels que $VC(u, v)$ est maximum.
2. Contracter v en u.
3. Si le graphe n'est pas complet alors retour au 1 [11].

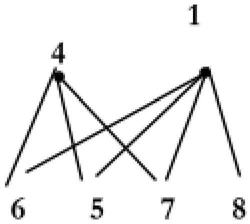
Exemple :



vc (1,2)=1.

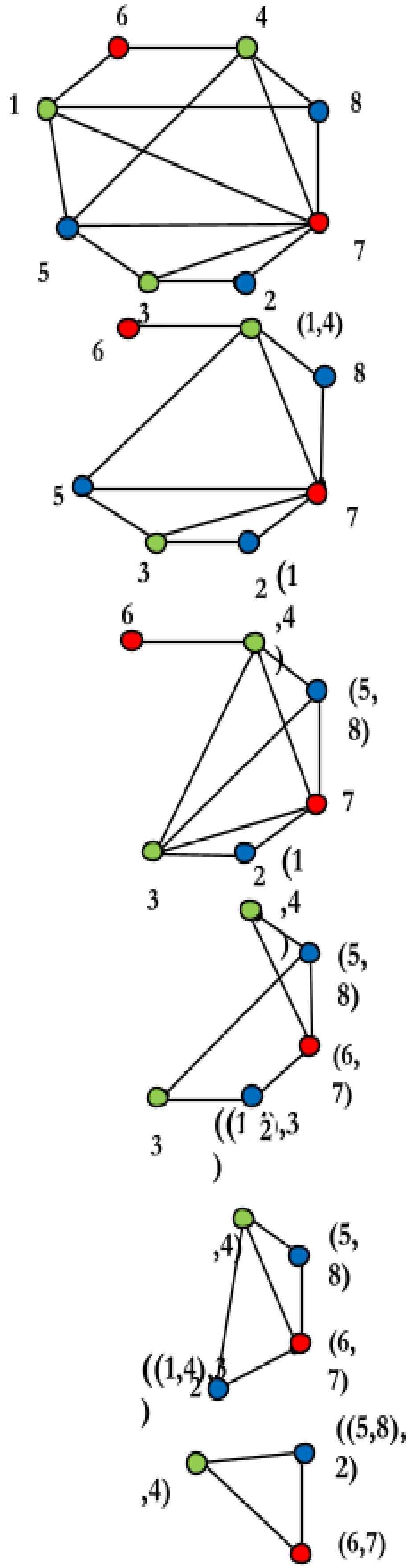


vc (1,3)=2.



vc (1,4)=3.

max=3.



vc (2,4)=1.

vc (2,5)=2.

vc (2,6)=0.

vc (2,8)=1.

vc (3,6)=0.

vc (3,8)=1.

vc (5,8)=3.

Max=3.

vc (6,7)=2.

Max=2.

vc ((1,4),3)=4.

Max=4.

Figure 3.9 : Coloration des sommets avec l'algorithme Dutton & Brigham

3.4 Algorithme de 2-coloriage

On considère un graphe G = (V,E) 2-coloriable.

Pour chaque composante connexe de G, on se donne un sommet $v \in V$, on lui attribue la couleur 0 et on attribue la couleur 1 à ses voisins. Pour chacun de ses voisins, on attribue la couleur 0 à ses voisins non coloriés. Et ainsi de suite : on réalise ainsi un parcours en largeur du graphe, en coloriant les sommets rencontrés de la facon énoncée précédemment.

L'algorithme de 2-coloriage renvoie bien un coloriage si le graphe en entrée est 2-coloriable. En effet, si on prend 2 sommets voisins, l'un des sommets a été parcouru le premier. Le deuxième sommet est donc colorié de l'autre couleur par l'algorithme, et sa couleur n'est pas modifiée par la suite. De plus, l'algorithme effectue un parcours en largeur. Donc tous les sommets sont coloriés.

On rappelle les théorèmes de caractérisation des graphes bipartis.

- Un graphe G est biparti si et seulement si $\chi(G) = 2$ (les sommets sont coloriés en 2 couleurs).
- Un graphe G est biparti si et seulement si tous les cycles de G sont pairs.

Exemple : graphe 2-coloriable

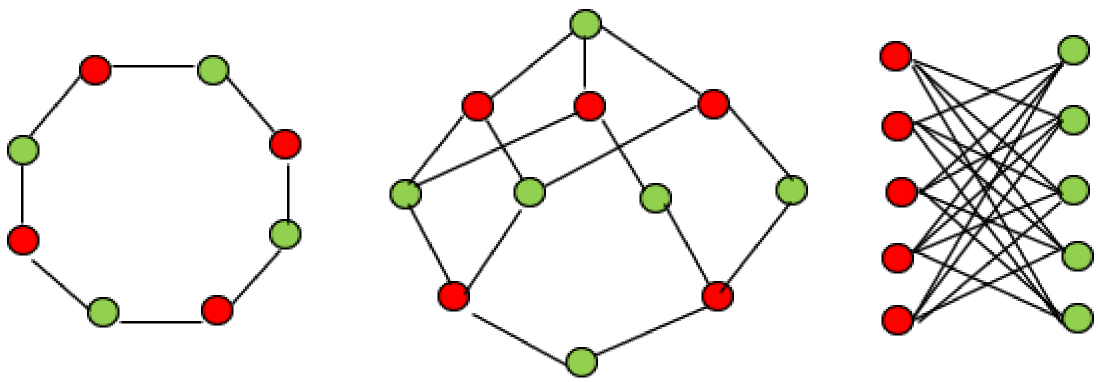
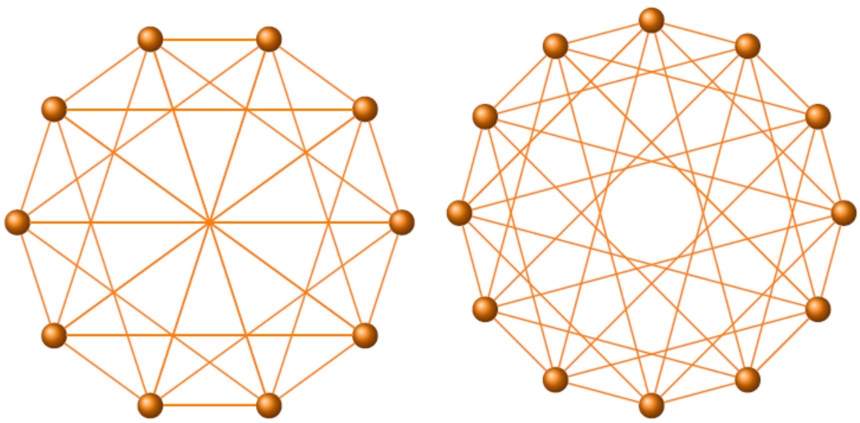


Figure 3.10 : Des graphes 2- coloriable



Source : http://mathworld.wolfram.com

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1	0
3	0	0	0	0	1	0
4	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	1	0	1
6	1	0	0	0	0	0

	a	b	c	d	e	f
1	-1	1	1	0	-1	0
2	0	-1	0	0	0	1
3	0	0	0	-1	1	0
4	0	0	-1	1	0	0
5	1	0	0	0	0	-1

Ordre des sommets	1	2	3	4	5	6	7	8
Couleurs	R	R	V	R	B	V	C	V
Ordre des sommets	6	4	7	5	3	1	8	2
Couleurs	R	V	R	B	V	V	B	B

Figure 3.11 : Quelques familles des graphes bipartis

Exemple : graphe non 2-coloriable

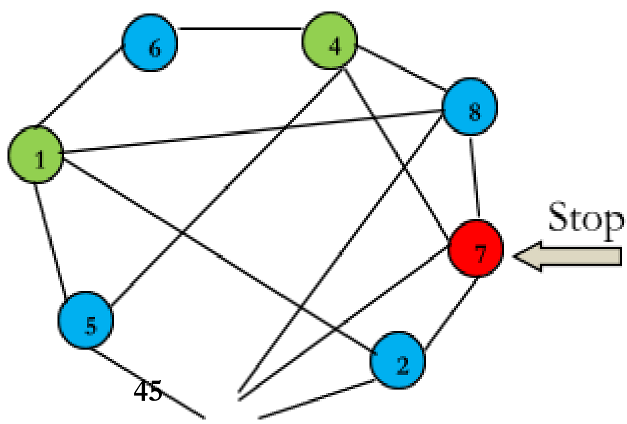


Figure 3.12 : Un graphe non 2-coloriable

3.5 Graphe de Petersen :

Le graphe de Petersen est une théorie des graphes un graphe particulier possèdent 10 sommets et 15 arêtes.

Le nombre chromatique du graphe de Petersen est 3. C'est-à-dire qu'il est possible de colorier ses sommets avec 3 couleurs, de telle façon que deux sommets reliés par une arête soient d'une couleur différente. Ce nombre est minimal [3].

3.5.1 Une coloration du graphe de Petersen avec 3 couleurs :

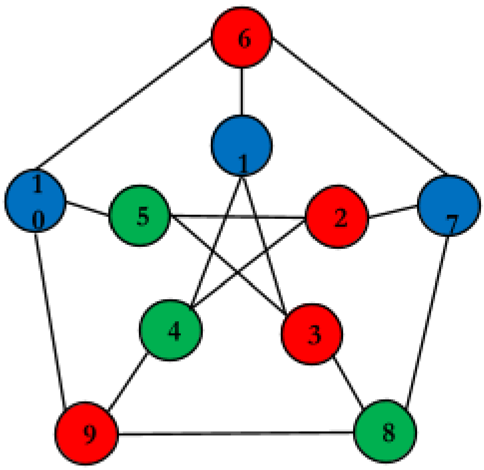


Figure 3.13 : Une coloration du graphe de Petersen avec 3 couleurs

Appliqué quelques algorithmes à graphe de Petersen :

3.6.1 Algorithme glouton élémentaire

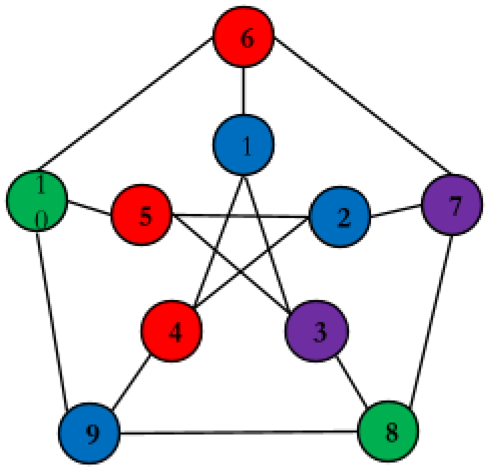


Figure 3.14 : Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme glouton avec quatre couleurs

3.6.2 Algorithme de Welsh & Powell

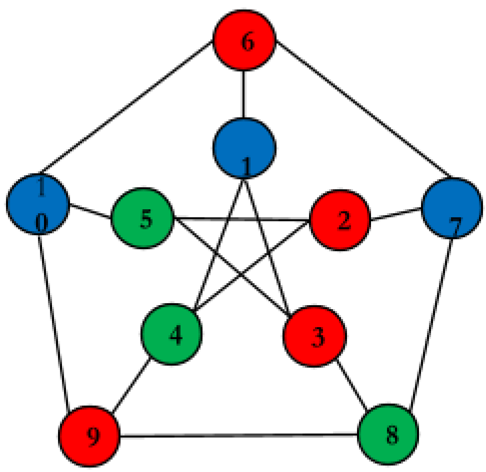


Figure 3.15 : Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme Welsh & Powell

avec trois couleurs

3.6.3 Algorithme de Vitaver

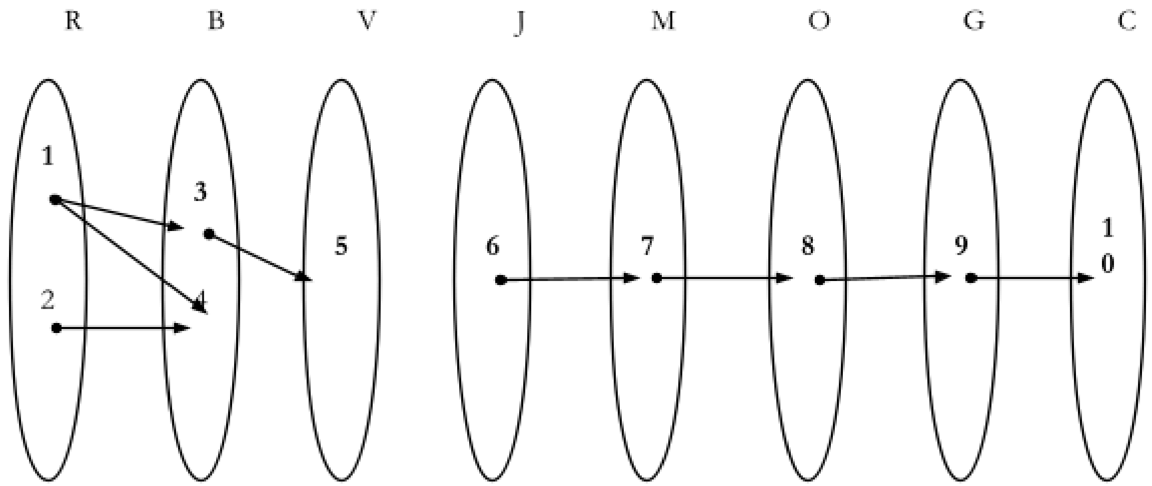


Figure 3.16 : Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme de Vitaver

avec huit couleurs

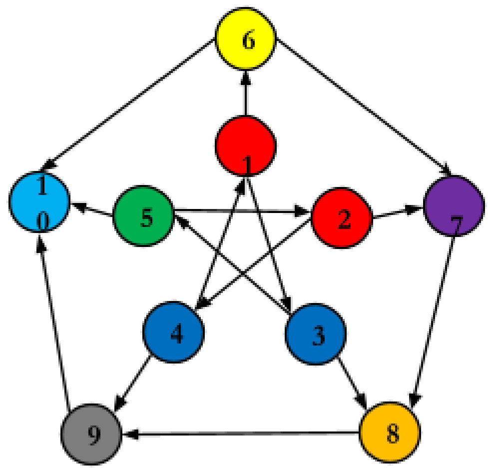


Figure 3.17 : Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme de Vitaver

avec huit couleur

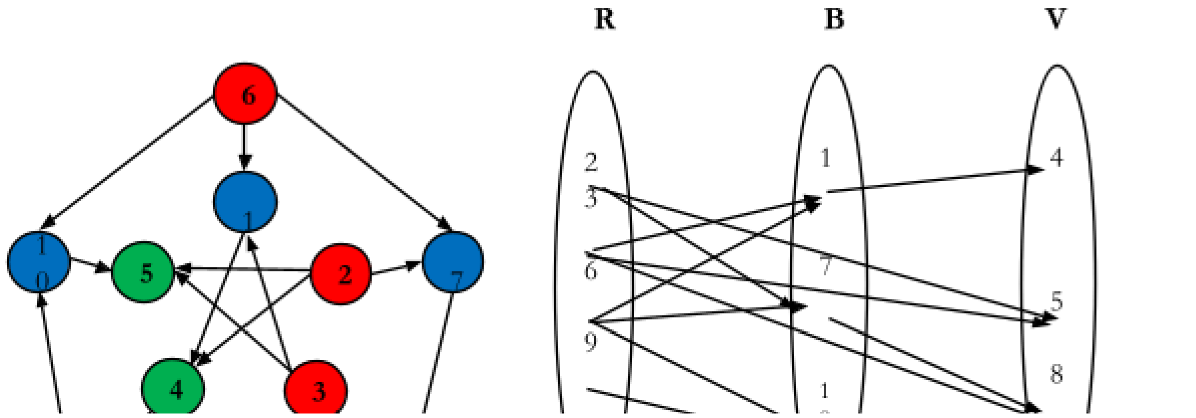


Figure 3.18 : Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme de Vitaver avec trois couleurs

3.6.4 Algorithme DSATURE de Brélaz

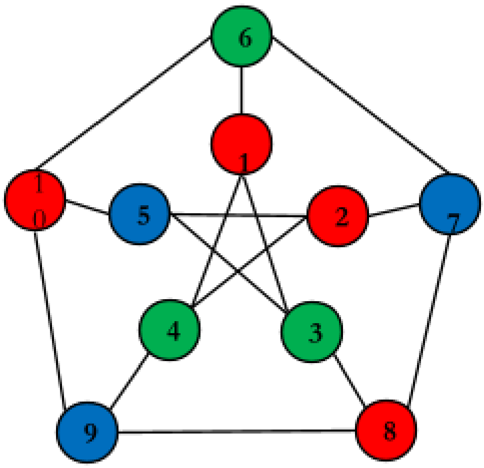
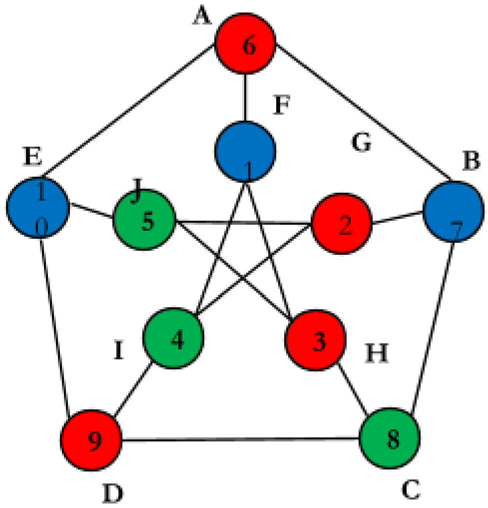


Figure 3.19: Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme DSATURE avec 3 couleurs

3.6.5 Algorithme RLF Leighton79 (Récursive-Large-First)



L'ordre de coloration des sommets : A, D, G, H en

rouge, B, E, F en bleu, C, I, J en vert.

A!D!G!H!B!E!F!C!I!E.

Figure 3.20 : Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme RLF avec trois couleurs

3.6.7 Algorithme de contraction :

3.6.7.1 L'algorithme de Dutton & Brigham :

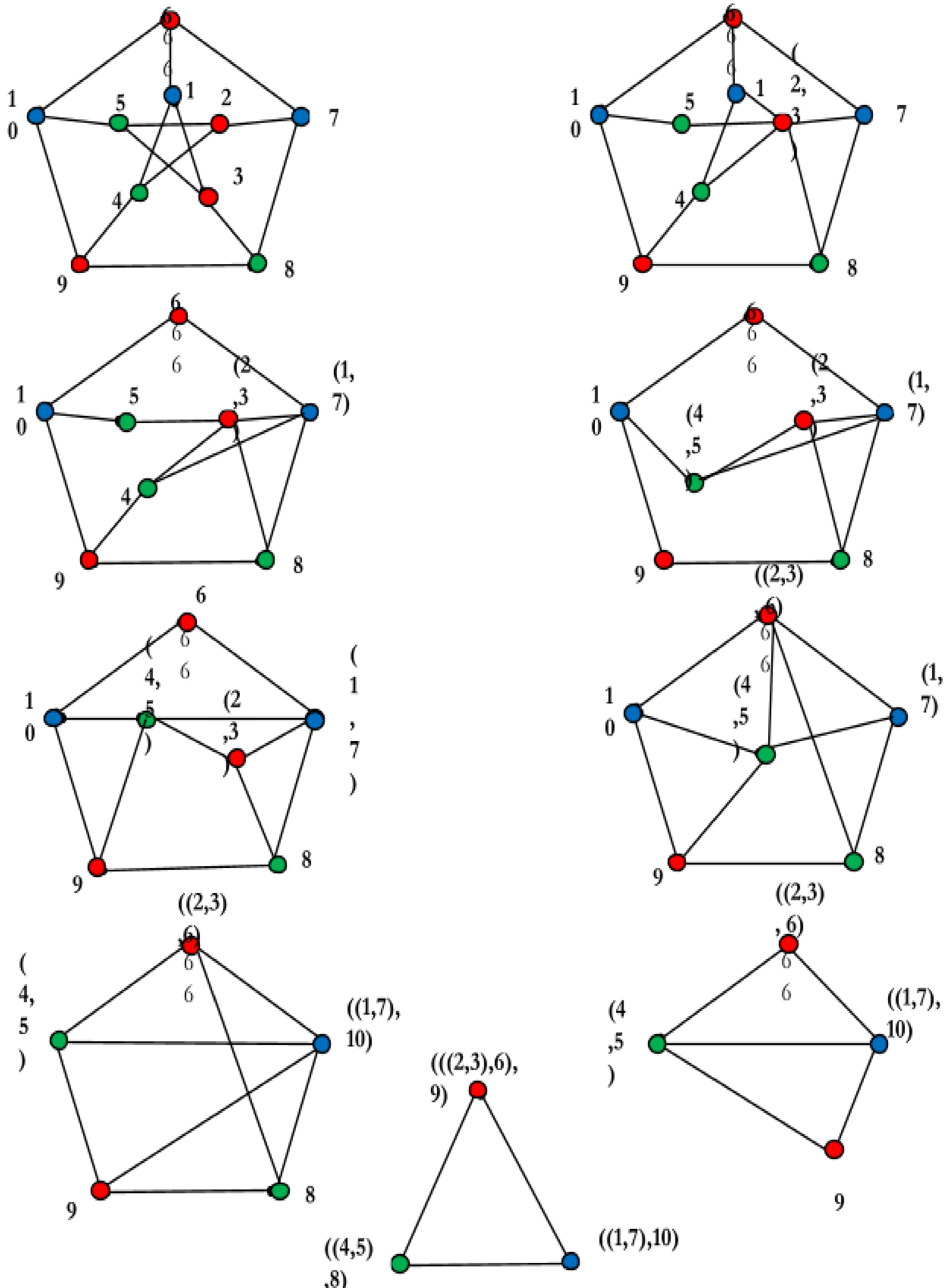


Figure 3.21: Coloration des sommets du graphe de Petersen avec l'algorithme de Dutton & Brigham avec trois couleurs

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de la coloration par quelques algorithmes pour déterminer le nombre chromatique (comme l'algorithme glouton élémentaire, l'algorithme Welsh & Powell, l'algorithme DSATURE, l'algorithme de Vitaver, l'algorithme de RLF, l'algorithme 2-coloriage, l'algorithme Dutton & Brigham). Ainsi appliqué quelques algorithmes à graphe de Petersen et comparé le nombre chromatique.

Conclusion générale

Dans ce travail nous avons intéressé à calculer le nombre chromatique d'un graphe, c'est-à-dire le nombre minimal de couleurs pour colorer les sommets sans que deux sommets voisins aient le même couleur.

Pour le premier chapitre, nous rappelons les définitions de la théorie des graphes. Dans le deuxième chapitre nous avons parlé au problème de la coloration qui concentré au terme de la coloration des sommets (trouve le nombre minimal de couleurs des sommets). Dans le troisième chapitre, ont proposé quelques algorithmes heuristiques pour trouver le nombre chromatique.

Le problème de coloration est difficile c'est-à-dire qu'il n'existe pas à ce jour un algorithme polynomial qui donne la coloration optimale pour tous graphes.

Bibliographie :

[1] B. Wack, Algorithmique et Analyse d'Algorithmes, Cours 10, L3 Info, 2020.

[2] C. Prins & M. Sevaux, Algorithmes de Graphes, Philippe Lacomme, France 2007.

[3] D.A. Holton & J. Sheehan, The Petersen Graph, Cambridg, Cup, 1993.

[4] D.C. Porumbel, Algorithmes Heuristiques et Techniques d'Apprentissage Applications au Problème de Coloration de Graphe, thèse de doctorat, Ecole Doctorale. STIM ED 503 Angers, France 2009.

[5] E. Sigward, www.Imo. Université-paris-sacly, 19.05.2021.

[6] J. Guérin & N. Lahrichi& S. Le Digbal, Graphe et Réseaux, MTM 1007, 2019.

[7] M. Bensouyad, Approches Métaheuristiques à base de population pour la Coloration de Graphes, thèse de doctorat, Université de Constantine 2-Abdelhamid Mehri, 2015.

[8] M. Kubale, Histoiry of Graph Coloring, in Kubale 2004.

[9] O. Cogis & C. Schwartz, Theorie des Graphes, Cassini Eds, 2018.

[10] O. Togni, Coloration de Graphe, Cours graphes l6S3, IEM/LE21, 7 janvier 2019.

[11] R. D. Dutton & R. C. Brighamt, A new Graph Coloring, Received jun 1979.

ملخص:

تعتبر مشكلة تلوين الرسوم البيانية من المشاكل الشهيرة التي يمكننا تصنيفها إلى ثلاثة أنواع (تلوين القمم، تلوين الحواف و تلوين الوجوه).

تهتم هذه المذكرة بتلوين القمم حيث نحاول تقليل عدد الألوان المستخدمة. أصغر عدد من الألوان يسمح لنا بالتلوين قمم الرسم البياني و الذي يسمى بالعدد اللوني.

لا تعطي الاستدلالات الخاصة بتلوين قمم الرسم البياني بالضرورة الحد الأدنى لعدد الألوان.

الكلمات المفتاحية : الرسم البياني، تلوين القمم، عدد لوني، خوارزمية استدلالية.

Résumé :

Le problème de coloration des graphes est un problème célèbre, dont on distingue trois types (la coloration des sommets, la coloration des arêtes et la coloration des faces).

Ce mémoire s'intéresser à la coloration des sommets. On cherche à minimiser le nombre de couleurs utilisées. Le plus petit nombre de couleurs permettant la coloration des sommets d'un graphe est appelé le nombre chromatique.

Les heuristiques de la coloration des sommets d'un graphe ne donnent pas forcement le nombre minimum de couleurs.

Mots-clés : graphe, coloration des sommets, algorithme heuristique, nombre chromatique.

Abstract:

The problem of coloring graphs is a famous problem, of which we can distinguish three types (coloring of vertices, coloring of edges and coloring of faces).

This memory is concerned with the coloring of vertices. We try to minimize the number of used. The smallest number of colors allowing the vertices of a graph to be colored is called the chromatic number.

The heuristics of coloring the vertices of a graph do not necessarily give the minimum number of colors.

Key-words: graph, coloring of the vertices, heuristic algorithm, chromic number.