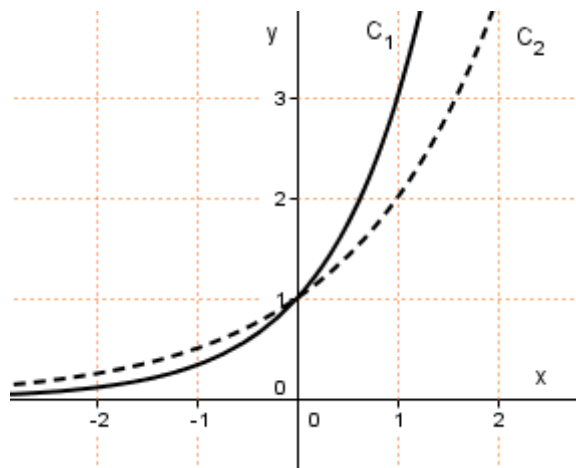


5.1 Εκθετική Συνάρτηση

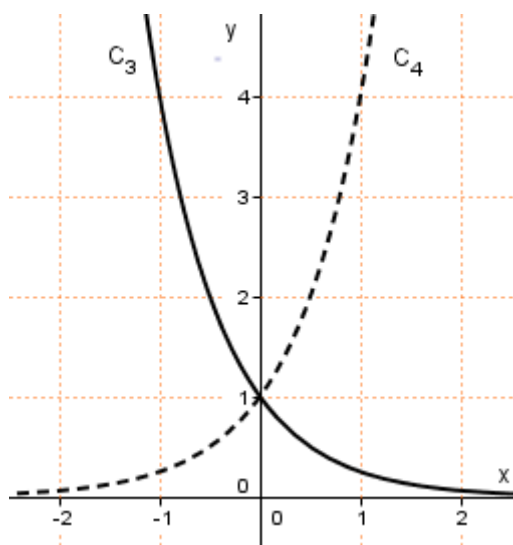
ΘΕΜΑ Β

1. (21993) α) Ποια από τις δύο καμπύλες C_1 (συνεχής γραμμή) και C_2 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x$ και ποια της συνάρτησης $g(x) = 3^x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



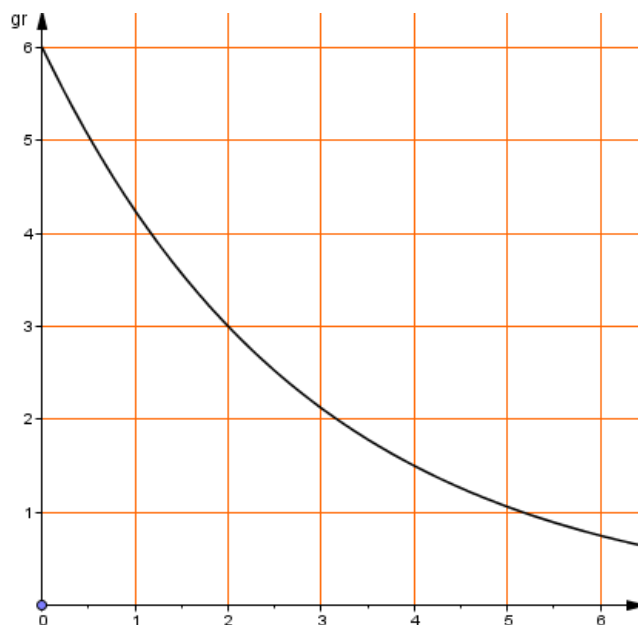
(Μονάδες 12)

- β) Ποια από τις δύο καμπύλες C_3 (συνεχής γραμμή) και C_4 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = 4^x$ και ποια της συνάρτησης $\psi(x) = 4^{-x}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



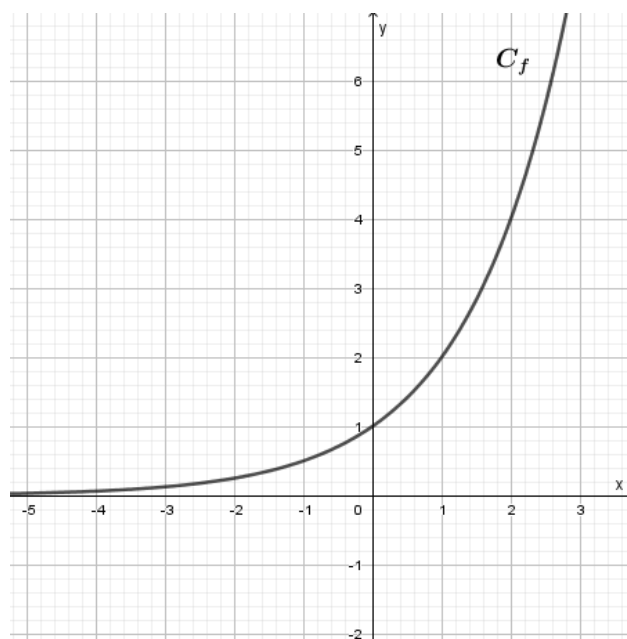
(Μονάδες 13)

2. (21994) Η καμπύλη που φαίνεται στο παρακάτω σύστημα αξόνων δείχνει την εκθετική απόσβεση ενός ραδιενεργού υλικού σε συνάρτηση με το χρόνο. Ειδικότερα, ο οριζόντιος άξονας δηλώνει τον χρόνο t σε ημέρες (π.χ. η 1^η ημέρα αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα από $t = 0$ μέχρι $t = 1$, η 2^η ημέρα στο χρονικό διάστημα από $t = 1$ μέχρι $t = 2$ κ.λπ.) και ο κατακόρυφος άξονας δηλώνει την ποσότητα του υλικού σε γραμμάρια (gr).



- α) Πόσα γραμμάρια ήταν η αρχική ($t = 0$) ποσότητα του ραδιενεργού υλικού; (Μονάδες 8)
- β) Πόση είναι η ημιζωή (ή χρόνος υποδιπλασιασμού) του ραδιενεργού υλικού; (Μονάδες 9)
- γ) Κατά τη διάρκεια ποιάς ημέρας θα έχει απομείνει ποσότητα ραδιενεργού υλικού μικρότερη από 1gr; (Μονάδες 8)
- Σε όλα τα ερωτήματα, να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3. (18866) Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

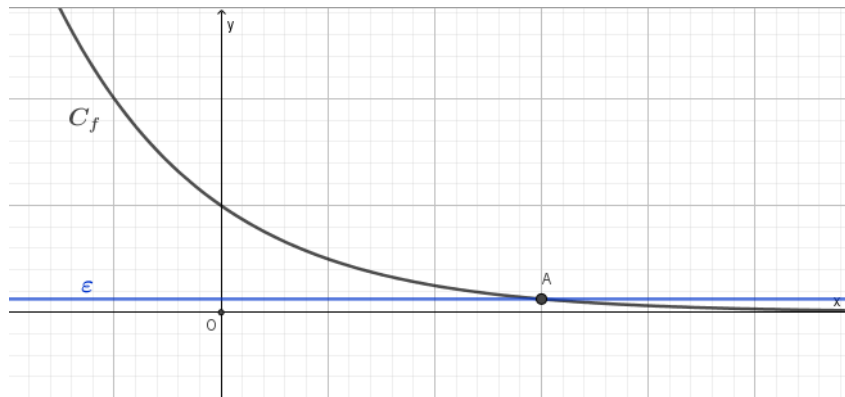


- α) Να λύσετε την εξίσωση $2^x - 1 = 0$. (Μονάδες 10)
- β) (i) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)
- (ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες συντεταγμένων. (Μονάδες 05)

4. (20855) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

- α) Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8}$. (Μονάδες 12)

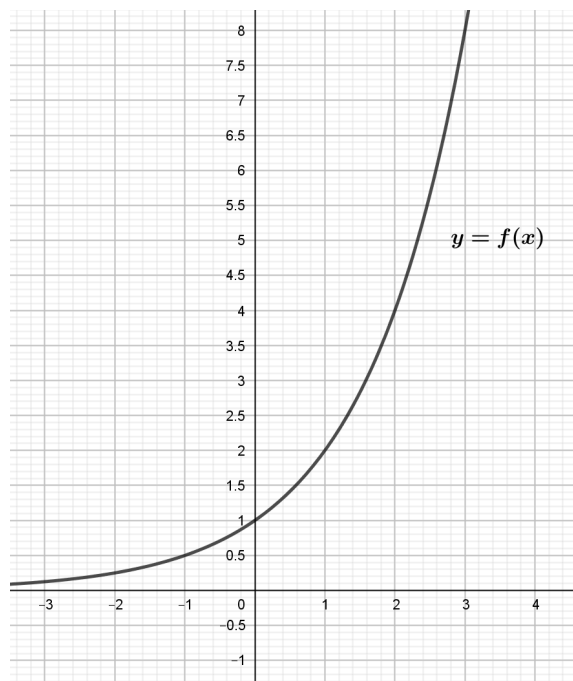
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f και της ευθείας $\varepsilon: y = \frac{1}{8}$.



β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία ε . (Μονάδες 05)

γ) Να βρείτε για ποιές τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από την ευθεία ε . (Μονάδες 08)

5. (21091) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης f , με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.



α) (i) Με βάση την γραφική της παράσταση, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$					

(Μονάδες 10)

(ii) Να βρείτε τον τύπο της εκθετικής συνάρτησης f . (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 32$. (Μονάδες 8)

6. (21163) Δίνεται το σημείο $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f .

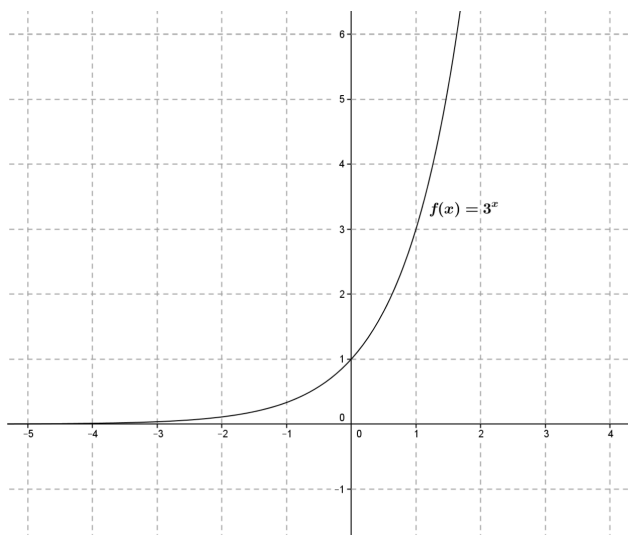
α) Αν η συνάρτηση f είναι η εκθετική συνάρτηση a^x , $0 < a < 1$, να βρείτε το a . (Μονάδες 13)

β) Για $a = \frac{1}{2}$,

i) να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = a^x$. (Μονάδες 4)

ii) να συγκρίνετε τους αριθμούς $a^{\sqrt{2}}$, $a^{\sqrt{3}}$. (Μονάδες 8)

7. (21451) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3^x$ με $x \in \mathbb{R}$.



α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = 3^x + 1$ και

$h(x) = 3^x - 1$, μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 12)

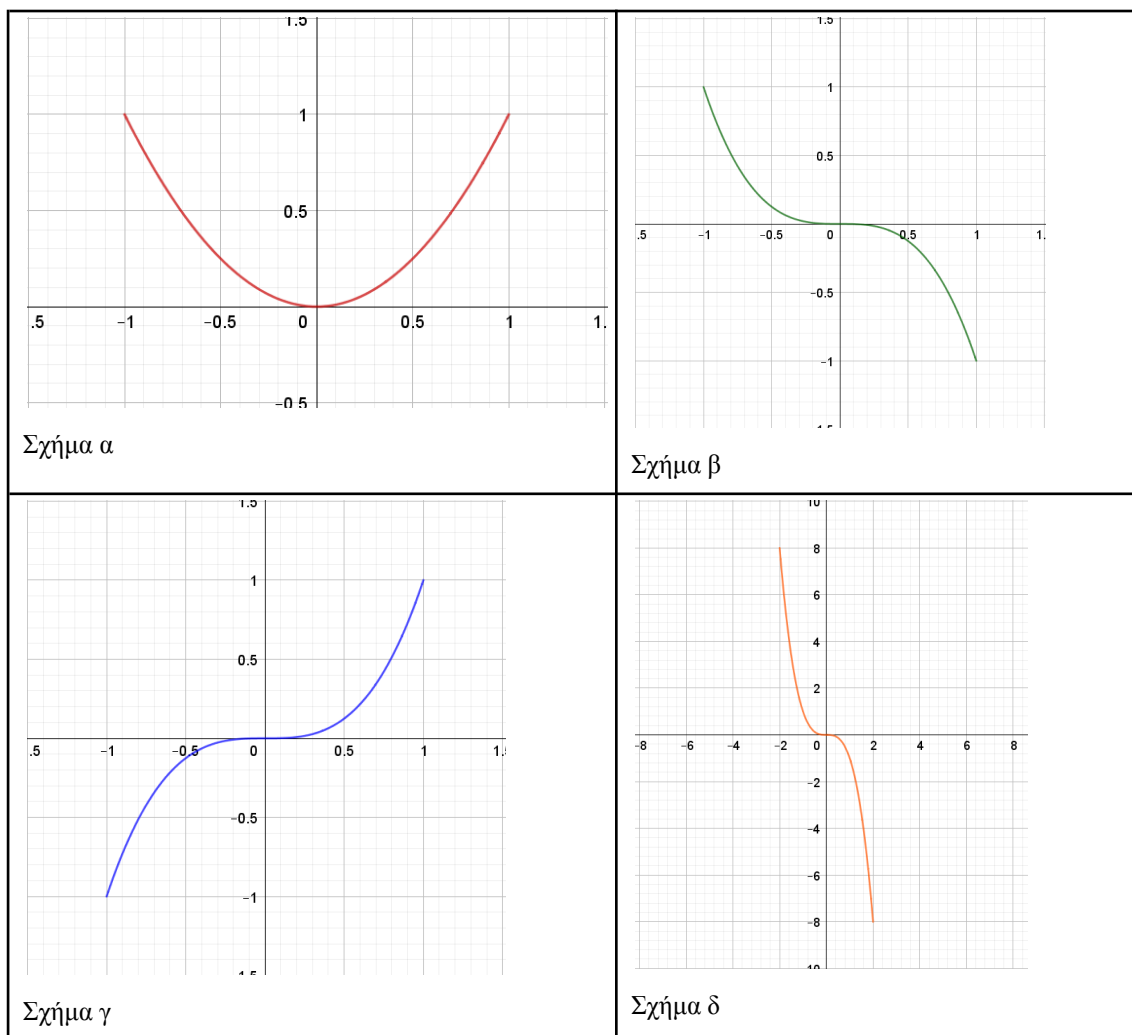
β) Ποια είναι η ασύμπτωτη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g και ποια της γραφικής

παράστασης της συνάρτησης h ; (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Γ

8. (15023) Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-1, 1]$, η οποία είναι περιττή και γνησίως φθίνουσα.

α) Από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις μόνο μία μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της f . Να βρείτε ποια είναι αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 2$ (Μονάδες 5)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = f(x - 1)$ (Μονάδες 5)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $s(x) = e^x - 1$ και να αποδείξετε (αλγεβρικά ή γραφικά) ότι η εξίσωση $s(x) = f(x)$ έχει μοναδική λύση τη $x = 0$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

9. (21444) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = 4^x$ και $g(x) = 2^x - \frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο A , του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , με εξαίρεση το σημείο A . (Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων. (Μονάδες 7)

10. (21448) Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου τη χρονική στιγμή $t = 0$, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του $f(t)$ (σε mg) να μειώνεται μετά από t ημέρες σύμφωνα με τη συνάρτηση $f(t) = q_0 \cdot \alpha^t$, $t \geq 0$, όπου οι αριθμοί α, q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0 < \alpha < 1$. (Μονάδες 6)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

(i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 5)

(ii) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f ,

εκφράζοντας τις τιμές $f(t)$ ως συνάρτηση της αρχικής τιμής q_0 . (Μονάδες 4)

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$					

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha = \frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της 4^{ης} ημέρας είναι 25 mg.

(i) Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής. (Μονάδες 5)

(ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 6]$. (Μονάδες 5)

11. (21471) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της

συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(2, 13)$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β . (Μονάδες 7)

Av $\alpha = 5$ και $\beta = -7$,

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 4^x - 3$.

(Μονάδες 7)

12. (21677) Είναι γνωστό ότι όταν κάποιος μελετάει για να συμμετάσχει σε κάποιες εξετάσεις, με την πάροδο του χρόνου δεν συγκρατεί στη μνήμη του το σύνολο όσων μελέτησε. Ένα μοντέλο που δείχνει το ποσοστό $P(t)$ της γνώσης που παραμένει στην μνήμη του t εβδομάδες μετά το τέλος της μελέτης, είναι το

μοντέλο Ebbinghaus και περιγράφεται από τον τύπο: $P(t) = Q + (100 - Q)e^{-ct}$, $t \in [0, 40]$ όπου Q είναι το

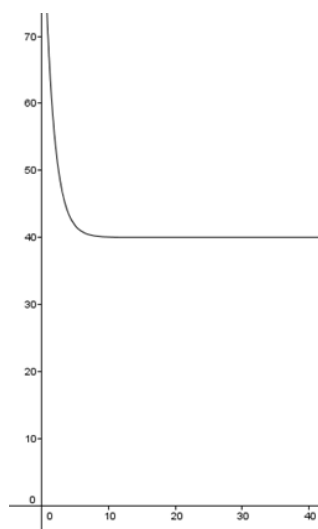
ποσοστό της γνώσης που θυμάται πάντα και c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το μάθημα. Αν $Q = 40$

και $c = 0,7$ τότε:

α) Τι δείχνει το $P(0)$ στα πλαίσια του προβλήματος; (Μονάδες 6)

β) Μετά από πόσες εβδομάδες θα έχει παραμείνει στην μνήμη του το 50% της γνώσης που απέκτησε. (Μονάδες 9)

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Με βάση το σχήμα:



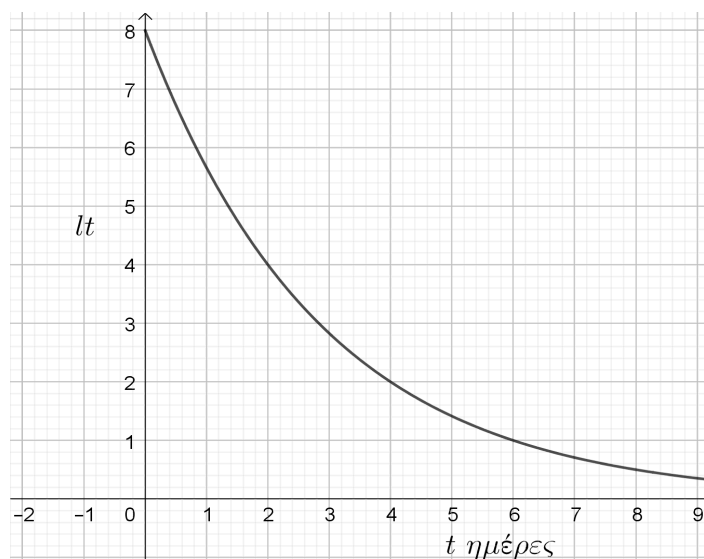
γ) Να εκτιμήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση, αν μετά από τρεις εβδομάδες θα θυμάται πάνω ή κάτω από το 50% του υλικού που μελέτησε. Η εκτίμησή σας συμφωνεί με το αποτέλεσμα του προηγούμενου

ερωτήματος; (Μονάδες 5)

δ) Πως αιτιολογείται ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης, για μεγάλες τιμές του t , φαίνεται να προσεγγίζει πάρα πολύ την ευθεία $y = 40$. Γιατί δεν μπορεί να «κατέβει» κάτω από την ευθεία αυτή; (Μονάδες 5)

(Θεωρήστε: $\ln 6 = 1,79$)

13. (21854) Ένα δοχείο περιέχει υγρό το οποίο εξατμίζεται. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η ποσότητα Q , σε λίτρα, του υγρού που έχει απομείνει στο δοχείο μετά από t ημέρες.



Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο μειώνεται εκθετικά και μετά από t ημέρες δίνεται από τη σχέση

$$Q(t) = Q_0 2^{-\frac{t}{c}}, \quad c \in \mathbb{R}, \text{ όπου } Q_0 \text{ η αρχική ποσότητα του υγρού.}$$

α) Με βάση το διάγραμμα:

(i) να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

(Μονάδες 5)

Χρόνος t σε ημέρες	0	2	4	6
Ποσότητα $Q(t)$ του υγρού σε λίτρα.				

(ii) να βρείτε την αρχική ποσότητα Q_0 του υγρού,

(Μονάδες 3)

(iii) να βρείτε το χρόνο που χρειάζεται για να εξατμιστεί η μισή ποσότητα του υγρού που υπήρχε τη χρονική στιγμή $t = 0$ στο δοχείο.

(Μονάδες 5)

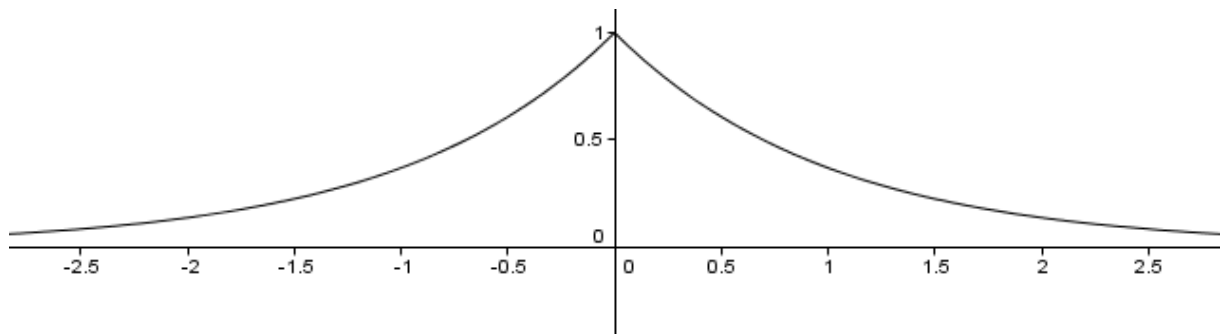
β) Αν $Q_0 = 8$ και $Q(2) = 4$, να δείξετε ότι $c = 2$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $Q(t) = 8 \cdot 2^{-\frac{t}{2}}$, να δείξετε ότι χρειάζεται να περάσουν δύο ημέρες για να εξατμιστεί η μισή ποσότητα $Q(t)$ του υγρού που υπάρχει στο δοχείο οποιαδήποτε χρονική στιγμή t .

(Μονάδες 5)

14. (15269) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διπλού τύπου.



α) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση αντιστοιχεί σε μια ακριβώς από τις παρακάτω συναρτήσεις να επιλέξετε ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f .

A. $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$ B. $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη μονοτονία και την μέγιστη τιμή της.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του a , το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = a$ $\in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f με την παραβολή

$y = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$ είναι το σημείο $(0, 1)$.

(Μονάδες 5)

15. (18693) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{2-\lambda}{4}\right)^x$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η f είναι εκθετική συνάρτηση. (Μονάδες 5)

β) Για ποιες τιμές του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα;

(Μονάδες 7)

γ) Για $\lambda = 0$

(i) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

(ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x + 1) = 6$.

(Μονάδες 7)

16. (20642) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη και περιττή συνάρτηση και $g(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$.

Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$, τότε:

α) Να βρείτε το $f(1)$ και να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης f και να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το O .

(Μονάδες 7)

δ) Έστω $f(x) = -2x^3$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε 2 μονάδες αριστερά και μια μονάδα πάνω. (Μονάδες 6)

17. (20689) α) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x-2}{x+1} > 0$.

(Μονάδες 07)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha-2}{\alpha+1}\right)^x$, με $x \in \mathbf{R}$.

(i) Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbf{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι καλώς ορισμένη. (Μονάδες 03)

(ii) Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbf{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα; (Μονάδες 10)

(iii) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι σταθερή. (Μονάδες 05)

18. (20854) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{|x|}$, $x \in \mathbf{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια. (Μονάδες 05)

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ και να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 05)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f . (Μονάδες 10)

δ) Αν $g(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 05)