

CHAPITRE 2

Formulation d'un programme linéaire (PL)

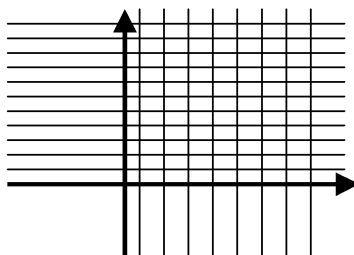
I. Introduction

Après avoir illustrer par des exemples, comment un problème pratique peut être modélisé par un programme linéaire, l'étape qui va suivre sera certainement celle de la résolution de ce problème mathématique. La méthode graphique est l'une des premières méthodes utilisées à ce sujet.

Si on parle de résolution graphique alors on doit se limiter à une représentation à deux variables et au plus à trois variables. Ceci indique que dans ce chapitre on examinera seulement les programmes linéaires à deux variables de décision.

II. Système d'axes

Une des conditions de la réussite de notre représentation graphique est le choix d'un système d'axes. Un mauvais choix peut rendre notre représentation non claire et imprécise.



A cause des contraintes de non-négativité des variables de décision, nous nous intéressons seulement au cadran positif (voir figure ci-dessus).

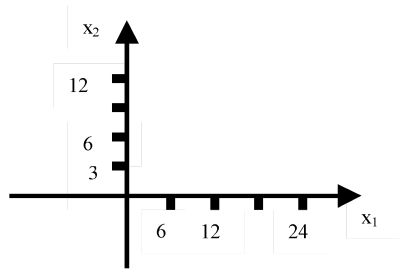
Cette région s'appelle la *région des solutions possibles* du problème.

Prenons l'exemple 2 relatif au problème de médecine. Le programme linéaire est le suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ & 5x_1 + 8x_2 \geq 74 \\ & x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Un bon choix se base sur une lecture des différents paramètres du programme linéaire. Dans notre cas, on ne peut qualifier de bon, le choix de 20 comme unité dans les deux axes.

Pour l'exemple, on peut choisir le système d'axes suivant :



III. Représentation graphique des contraintes

Parmi les solutions possibles d'un problème, il y a ceux qui vont satisfaire toutes les contraintes du programme, appelés solutions réalisables, et ceux qui vont satisfaire une partie ou aucune de ces contraintes, appelés solutions non réalisables.

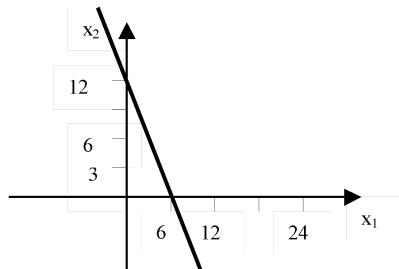
Une représentation graphique des inégalités (des contraintes) va nous permettre de déterminer l'ensemble des solutions réalisables.

Revenons à l'exemple 2 du problème de médecine.

Une des contraintes de ce problème est celle relative au grain d'aspirine :

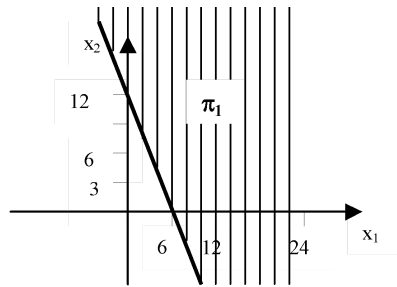
$$2x_1 + x_2 \geq 12$$

L'ensemble des solutions qui vérifient cette inégalité est le même que celui qui vérifie $2x_1 + x_2 = 12$ et $2x_1 + x_2 > 12$.



L'ensemble des solutions qui correspond à l'équation est l'ensemble des points de la droite l définie par $x_2 = -2x_1 + 12$. Cette droite admet une valeur de la pente égale à -2 et intercepte l'axe des ordonnées en 12 (voir figure ci-dessus).

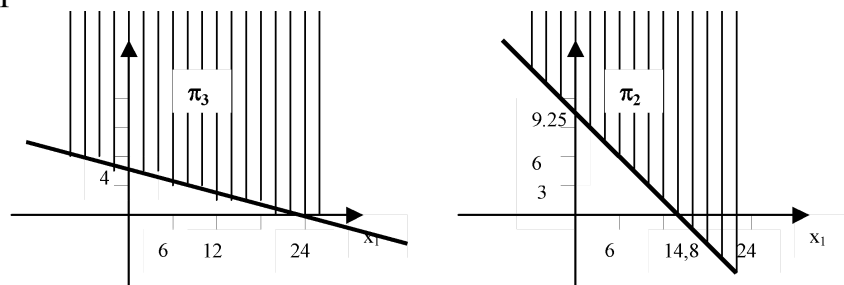
L'inégalité $2x_1 + x_2 > 12$ correspond à un demi-plan limité par la droite $x_2 = -2x_1 + 12$. Or cette droite divise le plan en deux demi-plans ouverts donc quel est le demi-plan à choisir ?



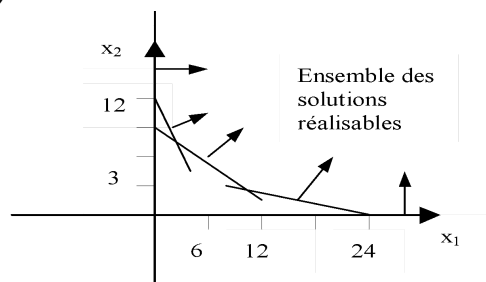
Pour ce faire, il suffit de prendre un point de l'un des demi-plans (c'est à dire n'appartenant pas à la droite $x_2 = -2x_1 + 12$) et voir s'il vérifie l'inégalité $2x_1 + x_2 > 12$. Par exemple le point de coordonnées (0,0) ne vérifie pas l'inégalité $2x_1 + x_2 > 12$ donc le demi-plan π_1 au-dessus de la droite est celui recherché (voir figure ci-dessus).

L'espace hachuré représente le demi-plan fermé des solutions qui vérifient la contrainte $2x_1 + x_2 > 12$.

Si on fait de même pour les deux autres contraintes du problème (voir figures ci-dessous), on obtient les deux autres demi-plans π_2 et π_3 relatifs aux solutions vérifiant respectivement les contraintes $5x_1 + 8x_2 \geq 74$ et $x_1 + 6x_2 \geq 24$.



Une solution possible du problème est dite réalisable si et seulement si elle vérifie toutes les contraintes, c'est à dire si elle appartient aux trois demi-plans relatifs à chaque contrainte du programme linéaire, en d'autre terme à $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ (voir figure).



Définition : Un ensemble E non vide est dit convexe si et seulement si pour tout élément x et y de E et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda x + (1-\lambda) y \in E$.

On peut vérifier facilement que chacun des demi-plans π_1 , π_2 , π_3 est convexe en vérifiant que pour toute paire de points P_1 et P_2 , l'ensemble des points qui forment le segment $[P_1 P_2]$ appartient au demi-plan.

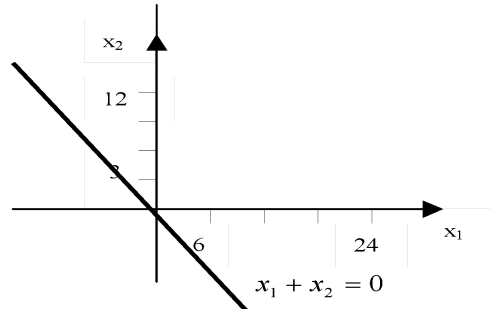
Théorème : L'intersection d'ensembles convexes (non vide) est convexe.

Propositions : L'ensemble des solutions réalisables (non vide) est convexe.

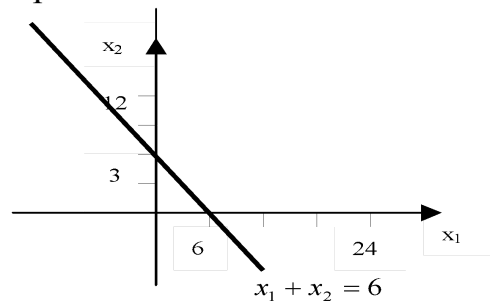
IV. Représentation de la fonction objectif

Soit z la valeur de la fonction objectif du problème de médecine $z = x_1 + x_2$.

Pour $z=0$, la fonction objectif est représentée de la manière suivante :

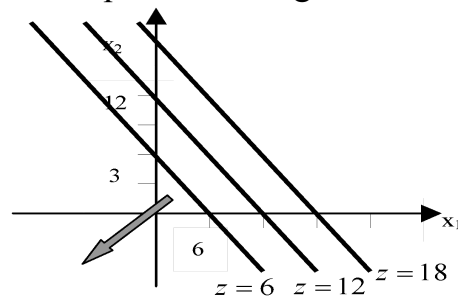


Pour $z=6$, c'est à dire que le nombre de pilules à prescrire est égale à 6 pilules. La fonction objectif est représentée comme suit :



Chaque point du segment qui relie les points (6,0) à (0,6) représente des solutions qui engendrent une prescription avec 6 pilules des deux tailles.

On peut tracer une infinité de droites qui représentent les différentes valeurs de la fonction objectif, toutes ces droites ont le même coefficient directeur (-1). Par suite elles sont parallèles entre elles. De plus on peut diminuer la valeur de z indéfiniment dans le sens indiqué dans la figure ci-dessous.

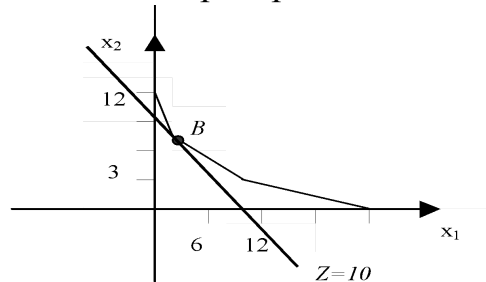


Le problème est de connaître qu'elle est la droite qui correspond à la valeur minimal de la fonction objectif ?

V. Recherche de la solution optimale

a. Résolution graphique

Si nous retraçons l'ensemble des droites parallèles relatives à différentes valeurs de la fonction objectif sur la figure qui représente l'ensemble des solutions réalisables, on peut localiser la solution optimale. Elle correspond à la solution réalisable qui intercepte la droite à la plus petite valeur de z .



Dans notre exemple, la solution optimale est l'intersection des deux contraintes $2x_1 + x_2 \geq 12$ et $5x_1 + 8x_2 \geq 74$. Une évaluation des coordonnées de ce point revient à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 12 \\ 5x_1 + 8x_2 = 74 \end{cases}$$

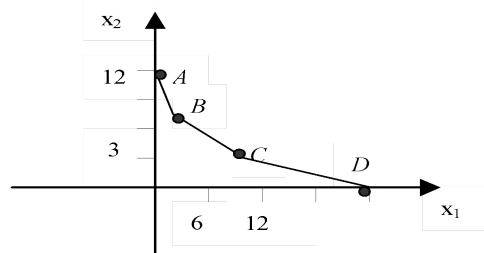
Elle correspond d'après le graphique au point (2,8). Donc la prescription optimale est de 2 pilules de petite taille et 8 pilules de grande taille. Le nombre de pilules (la valeur de la fonction objectif) est égale à 10.

b. Résolution par énumération :

On remarque que la solution optimale du problème de médecine est un point extrême qui se trouve sur le bord de l'ensemble des solutions. Une telle solution est dite solution réalisable de base.

On peut admettre le résultat suivant : « Si un programme linéaire admet une solution optimale alors il existe une solution réalisable de base pour laquelle la fonction objectif atteint la valeur optimale »

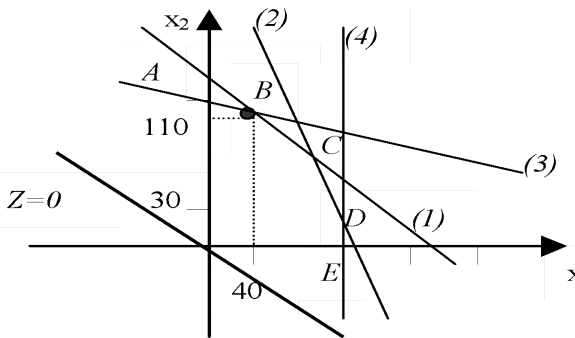
Une méthode de résolution du programme linéaire consiste donc à déterminer les solutions réalisables de base (les points d'intersection des droites qui forment les contraintes) et à calculer pour chaque point la valeur de la fonction objectif. La solution du programme linéaire est la solution à qui on associe la valeur optimale de la fonction objectif.

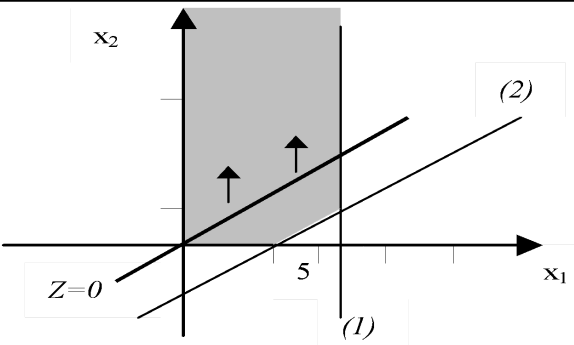


Dans le problème de médecine, l'ensemble des solutions réalisables de base présente 4 points extrêmes A(0,12), B(2,8), C(23/11,126/11) et D(24,0). La valeur de la fonction objectif associée respectivement à A, B, C et D est 12, 10, 149/11 et 24. On vérifie bien que B est la solution optimale du problème avec une valeur optimale égale à 10.

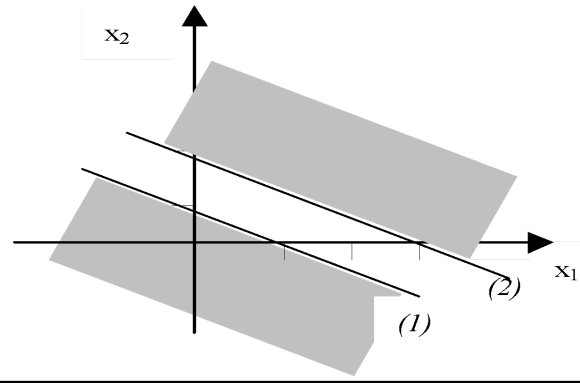
VI. Exemples

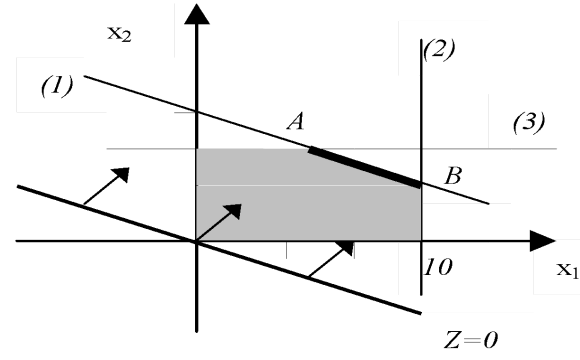
Dans cette section on donne quelques exemples de résolution graphique de problèmes linéaires relatifs au différents cas possibles :

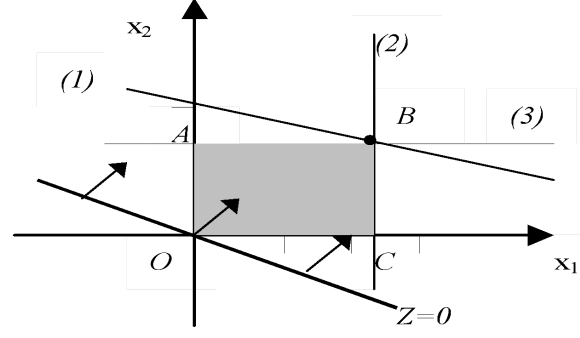
Problème de maximisation	
$Max \quad 100x_1 + 200x_2$ $s.c. \quad x_1 + x_2 \leq 150 \quad (1)$ $4x_1 + 2x_2 \leq 440 \quad (2)$ $x_1 + 4x_2 \leq 480 \quad (3)$ $x_1 \leq 90 \quad (4)$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	
la solution optimale est B(40,110)	

Problème avec solution non bornée	
$Max \quad -2x_1 + 3x_2$ $s.c. \quad x_1 \leq 5 \quad (1)$ $2x_1 - 3x_2 \leq 6 \quad (2)$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	
On peut augmenter la valeur de la fonction objectif dans la direction des flèches indéfiniment donc la solution est non bornée	

Problème impossible

$\begin{array}{ll} \text{Min} & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 + 2x_2 \leq 2 \quad (1) \\ & 2x_1 + 4x_2 \geq 8 \quad (2) \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$	
L'espace des solutions réalisables est vide, il est l'intersection des deux zones grises de la figure ci-dessus	

Problème à solutions multiples	
$\begin{array}{ll} \text{Max} & x_1 + 3x_2 \\ \text{s.c.} & 2x_1 + 6x_2 \leq 30 \quad (1) \\ & x_1 \leq 10 \quad (2) \\ & x_2 \leq 4 \quad (3) \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$	
L'ensemble des points décrit par le segment $[AB]$ représente les solutions optimales du problème linéaire	

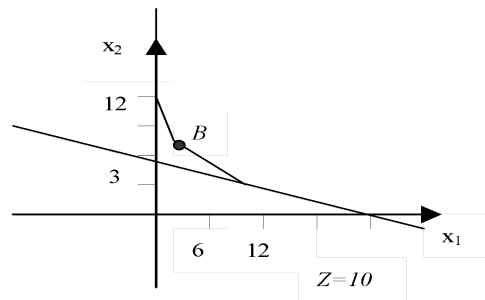
Problème de dégénérescence	
$\begin{array}{ll} \text{Max} & x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & 3x_1 + 2x_2 \leq 40 \quad (1) \\ & x_1 \leq 10 \quad (2) \\ & x_2 \leq 5 \quad (3) \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$	
La solution optimale $B(10,5)$ est dite dégénérée si trois contraintes concourent en ce point.	

VII. Analyse de sensibilité

Une analyse de sensibilité se résume à la recherche des intervalles de variations possibles des paramètres du programme linéaire sans que la solution optimale ne soit modifiée.

Question : De combien peut-on faire varier la quantité de codéine dans le problème de médecine sans changer la solution optimale.

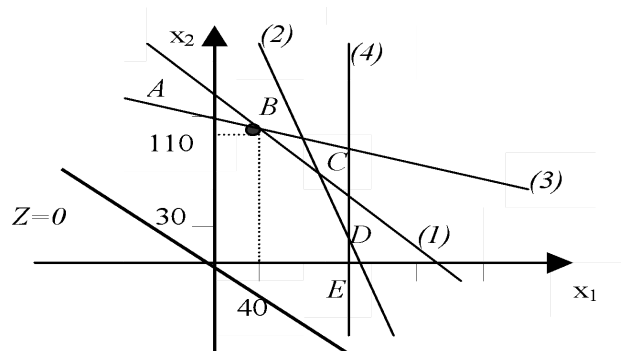
Réponse :



On peut changer la valeur du second membre de la troisième contrainte jusqu'à ce que la droite de coefficient directeur $-1/6$ touche le point optimal $(2,8)$. C'est à dire qu'on peut varier le second membre de la troisième contrainte de 24 jusqu'à 50 sans changer la solution optimale.

Question : De combien peut-on faire varier le profit engendré par la culture d'un hectare de tomates, dans le problème de l'agriculture, sans changer la solution optimale ?

Réponse :



Soit λ la variation du profit engendré par la culture d'un hectare de tomate. La fonction objectif est égale à $(100 + \lambda)x_1 + 200x_2$

La solution demeure optimale si la pente de la fonction objectif reste toujours comprise entre la pente de la contrainte (1) et (3). Ceci est équivalent à dire que :

$$-1 \leq -\frac{200}{100 + \lambda} \leq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -50 \leq \lambda \leq 100$$

On peut vérifier aussi que si :

- $\lambda < -50$ alors la solution optimale est A
- $\lambda = -50$ alors le problème est à solutions multiples : $[AB]$

- $-50 < \lambda < 100$ alors la solution optimale est B
- $\lambda = 100$ alors le problème est à solutions multiples : [BC]
- $100 < \lambda < 300$ alors la solution optimale est C
- $\lambda = 300$ alors le problème est à solutions multiples : [CD]
- $\lambda > 300$ alors la solution optimale est D