

Exercice 1 :(6points)

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$$

et ζ sa courbe representative dans un repere orthonorme $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a) Montrer qu'il existe trois reels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.

b) Montrer que ζ admet deux asymptotes que l'on determinera.

2) a) Montrer que le point I (2;1) est un centre de symetrie pour ζ .

b) Etudier les variations de f et tracer ζ .

3) Soit $\Delta_m: y = -2x + m$ ou m est un parametre reel.

a) Determiner les valeurs de m pour lesquelles Δ_m est tangente a ζ .

b) Montrer que les abscisses des points d'intersections ζ de Δ_m et sont les racines de l'equation $3x^2 - (7 + m)x + 2m + 3 = 0$.

c) Lorsque Δ_m coupe ζ en deux points M' et M'' on note $J_m = M' * M''$.

Determiner l'ensemble decrit par J_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2 :(6points)

Le plan est oriente dans le sens direct.

Soit ABC un triangle isocele de sommet principal A tel que $(\vec{AB}; \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

O le centre de cercle ζ circonscrit au triangle ABC.

Soit D l'image de A par la rotation $R_{(O; \frac{\pi}{2})}$.

1) Faire une figure.

2) Montrer que [AB] et [CD] sont perpendiculaires et isometriques.

3) a) Montrer qu'il existe une rotation unique R qui transforme D en B et C en A dont on determinera le centre I et l'angle.

b) Montrer que $R_{(I; \frac{\pi}{2})} = S_{(AB)} \circ S_{(OI)}$.

4) a) Montrer que ADBC est un trapeze isocele.

b) Montrer qu'il existe une rotation unique R' qui transforme B en D et C en A dont on determinera le centre J et l'angle.

c) Montrer que $R'_{(J; \frac{\pi}{4})} = S_{(OI)} \circ S_{(BC)}$.

5) Soit l'application $f = R_{(I; \frac{\pi}{2})} \circ R'_{(J; \frac{\pi}{4})}$

a) Determiner $f(B)$ et $f(O)$.

b) Determiner la nature et les elements caracteristiques de f .

6) soit M un point variable sur le cercle ζ , $N = R_{(0; \frac{\pi}{2})}(M)$ et $M' = S_{(BN)}$.

Determiner l'ensemble decrit par M' lorsque M se deplace sur ζ .

EXERCICE 3 : (4points)

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$.x \mapsto \frac{1}{2} (\sqrt{144 + x^2} - x) \text{ et } \zeta \text{ sa courbe dans un repere}$$

orthonorme

1) Montrer que ζ admet deux asymptotes que l'on determinera.

2) Etudier les variations de f .

3) tracer ζ .

4) dans la figure ci contre MAB est un triangle

telque : $AB=6$; $\hat{BAM} = \alpha$ et $\hat{AMB} = 2\alpha$.

On note $AM = x$ et $BM = y$.

a) Justifier que $\frac{\sin \alpha}{y} = \frac{\sin 2\alpha}{6} = \frac{\sin 3\alpha}{x}$.

b) Montrer que $\sin \alpha \sin 3\alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} (4\cos^2 \alpha - 1)$.

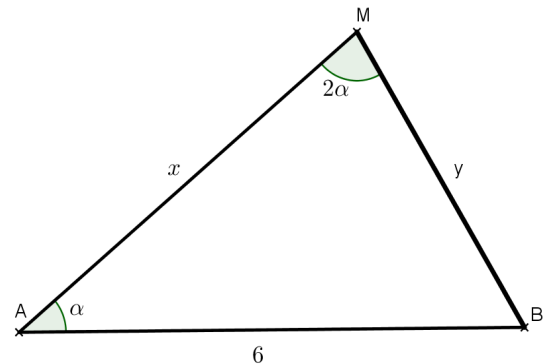
c) Montrer que $\cos \alpha \cos 3\alpha = \frac{3}{y}$ et que $y = f(x)$.

5) a) Montrer que l'aire du triangle ABM en fonction de $y=BM$ est :

$$g(y) = 3\sqrt{y^2 - 9} \left(\frac{36}{y^2} - 1 \right).$$

b) Montrer que $g'(y) = \frac{y^4 - 38y^2 + 18}{y^3 \sqrt{y^2 - 9}}$. pour tous $y \in]3; 6[$.

c) Determiner alors x pour que l'aire de triangle ABC soit maximal et donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cet aire.



EXERCICE 4 (4points)

Le plan complexe est muni d'un repere orthonorme direct $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_A = 2$; $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et

$$z_C = -1 - i\sqrt{3}$$

1) a) Determiner la forme trigonometrique de chacun des nombres z_A, z_B et z_C .

b) Placer alors les points A, B et C.

2) a) Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

b) En deduire $(\vec{AB}; \vec{AC})$ puis la nature de triangle ABC.

3) Soit le point D d'affixe $z_D = 2 + 2i$.

a) Placer D et écrire z_D sous forme trigonometrique.

b) En deduire la forme trigonometrique de $\frac{z_B}{z_D}$.

c) Determiner la forme algebrique de $\frac{z_B}{z_D}$. En deduire $\cos \cos \frac{5\pi}{12}$.