Chapitre III : Vecteurs - partie 1

Partie I : Définition d'un vecteur

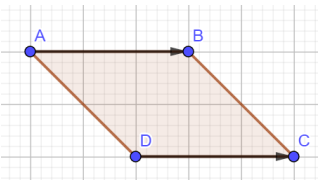
I. Translation

Définition

On appelle translation qui transforme A en B, l'application qui à tout point M du plan associe son image M' telle que ABM'M soit un parallélogramme.

Une translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur $\vec{AB}$.

Remarque : Si ABCD est un parallélogramme, la translation de vecteur $\vec{AB}$ est la même que la translation de vecteur $\vec{DC}$



II. Egalité de deux vecteurs

Définition et propriété

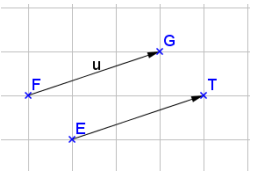
$\vec{AB} = \vec{CD}$ si et seulement si D est l'image de C par la translation qui à A associe B ou de vecteur $\vec{AB}$

$\vec{AB} = \vec{CD}$ si et seulement si **ABDC** est un parallélogramme (attention à la permutation des lettres)

Vocabulaire : $\vec{AB} = \vec{CD}$ s'appelle une égalité vectorielle, c'est une égalité entre deux vecteurs.

Exemple : T est l'image de E par la translation qui à F associe G.

donc les vecteurs $\vec{FG}$ et $\vec{ET}$ sont égaux.



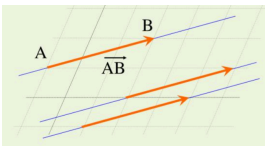
Exercice : RTYU est un parallélogramme

Quelles égalités vectorielles peut-on écrire ? ……

Caractérisation d'un vecteur

Un vecteur est caractérisé par :

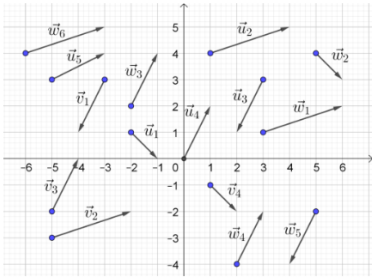
- sa direction, celle de la droite (AB)
- son sens, celui de A vers B
- sa norme, la longueur AB



Deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

Exercice :

Quels sont les vecteurs égaux ? ……

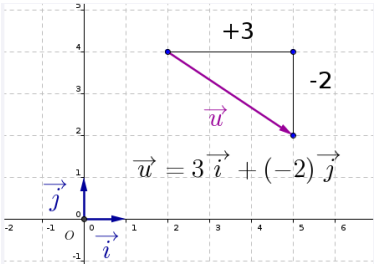


III. Composantes d'un vecteur

Définition

Un vecteur $\vec{AB}$ du plan représente une translation de A vers B, déterminée par deux composantes (ou coordonnées). La première composante est le déplacement horizontal et la 2e est le déplacement vertical dans un repère orthonormé.

Exemple : Le vecteur $\vec{u}$ ci-dessus a pour composantes $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

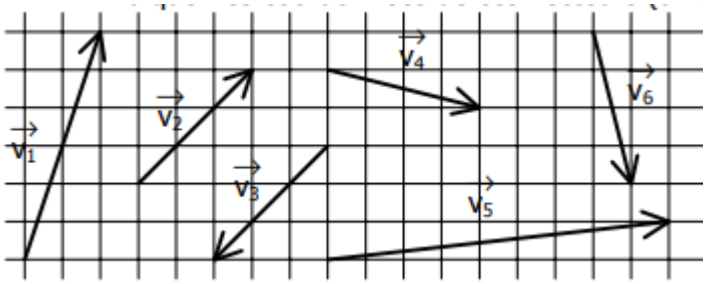


On écrit aussi $\vec{u} = 3\vec{i} + (-2)\vec{j} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$

Remarque :
On préfère écrire les composantes en colonne plutôt qu'en ligne car les opérations seront plus faciles à faire.

Remarque : Pour définir un vecteur, ses composantes suffisent, on n'a pas besoin de connaître l'origine et l'extrémité, dans ce cas on le note avec une seule lettre, qui est le nom du vecteur, par exemple $\vec{u}$.

Exercice : Donner les composantes (ou coordonnées) des vecteurs suivants (unité de longueur : 1 carreau)



Définition

Le vecteur qui a pour composantes $\begin{pmatrix} ..0.... \\ ...0.... \end{pmatrix}$ est appelé le vecteur nul et noté $\vec{0}$.

Remarque : Le vecteur nul est utile pour obtenir un résultat pour $\vec{AA} = \vec{BB} = \vec{CC} = \vec{0}$
mais on ne peut pas représenter le vecteur nul par une flèche.

Théorème

$\vec{AB} = \vec{CD}$ si et seulement si ces deux vecteurs ont les mêmes composantes

Exercice : Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ ont pour composantes $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ? ……
……

IV. Composantes d'un vecteur et coordonnées de points

Théorème

Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points. Le vecteur $\vec{AB}$ a pour composantes $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Remarque : **Attention c'est B d'abord…**

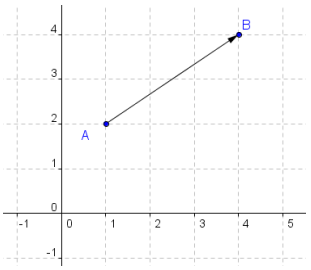
Attention quand on soustrait un nombre négatif car ça donne +.

Exemple : Les composantes du vecteur $\vec{AB}$ à partir des coordonnées de A et de B sont :

A(1 ; 2) B(4 ; 4)

$$\vec{AB}\begin{pmatrix} 4-1 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ce que l'on peut vérifier sur le graphique, pour passer de A à B, on se déplace de 3 unités vers la droite horizontalement puis de 2 unités verticalement vers le haut

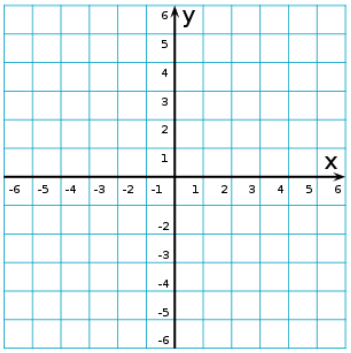


Exercice :

Placer les points A(1 ; 2), B(4 ; 3), C(-1 ; -2), D(3 ; -1) dans le repère

a) Calculer les composantes de $\vec{AB}$: .....

b) Calculer les composantes de $\vec{CD}$: .....



V. Coordonnées du milieu d'un segment

Théorème : caractérisation du milieu

Si I est le milieu de [AB], alors $\vec{AI} = \vec{IB}$ et réciproquement si $\vec{AI} = \vec{IB}$ alors I est le milieu du segment [AB]

Démonstration :

➔ Sens direct : Si I est le milieu de [AB] alors

- A, I et B sont alignés, les droites (AI) et (IB) sont parallèles et les vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{IB}$ ont la même direction
- Les longueurs AI et IB sont égales, les vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{IB}$ ont la même norme
- Les vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{IB}$ ont le même sens

Ainsi les vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{IB}$ sont égaux d'après la caractérisation des vecteurs.

➔ Sens réciproque : Si $\vec{AI} = \vec{IB}$

- Les vecteurs ont la même direction, donc les droites (AI) et (IB) sont parallèles ainsi les points A, I et B sont alignés dans cet ordre
- Comme les vecteurs sont égaux, ils ont la même norme, AI = IB

On en déduit que I est le milieu de [AB]

Théorème (rappel) : coordonnées du milieu

Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points du plan. Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

Démonstration :

On sait que I est le milieu de [AB]

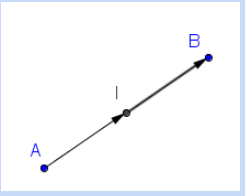
En écrivant les composantes de ces vecteurs :

$$\vec{AI}\begin{pmatrix}x_I-x_A\\y_I-y_A\end{pmatrix} = \vec{IB}\begin{pmatrix}x_B-x_I\\y_B-y_I\end{pmatrix}$$

Deux vecteurs égaux ont les mêmes composantes, donc :

$$x_I - x_A = x_B - x_I$$

$$y_I - y_A = y_B - y_I$$



On rassemble les coordonnées de I à gauche :

$$2x_I = x_B + x_A$$

$$2y_I = y_B + y_A$$

Donc : $x_I = \frac{x_A+x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_A+y_B}{2}$

Partie II : Somme de deux vecteurs

I. Somme de vecteurs et translation

Définition et propriété

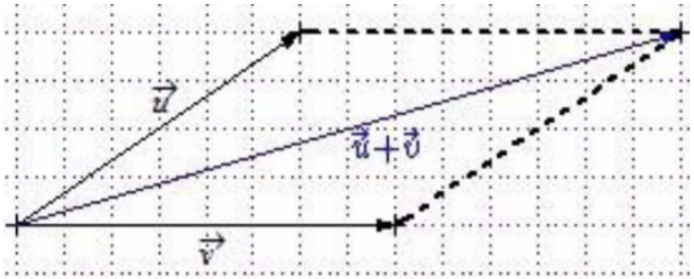
En enchaînant la translation de vecteur $\vec{u}$ et celle de vecteur $\vec{v}$ on obtient une nouvelle translation.

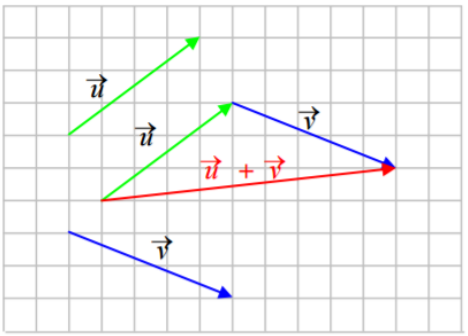
Le vecteur qui lui est associé est appelé somme de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ et noté $\vec{u}+\vec{v}$

Exemple : Tracer ce vecteur-somme $\vec{w}$ sur la figure ci-dessus

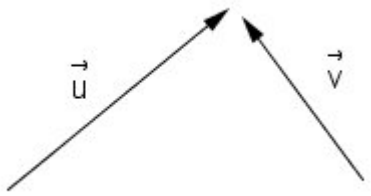
Méthode : Règle du parallélogramme

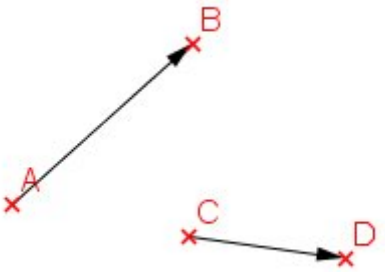
Pour tracer le vecteur-somme de deux vecteurs, il suffit de les mettre « bout à bout »





Exercice : Tracer le vecteur somme





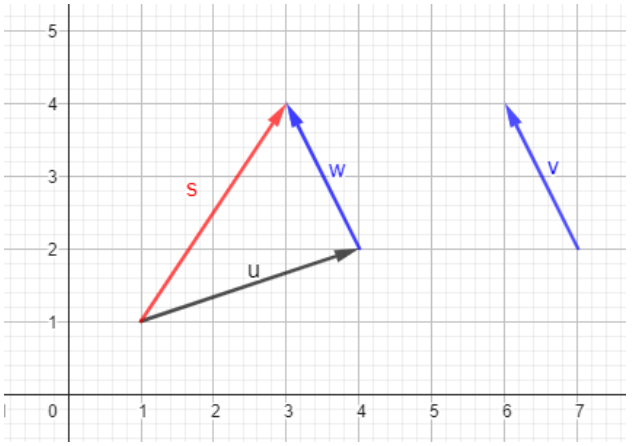
II. Somme de vecteurs et composantes

Définition
Pour additionner deux vecteurs, on additionne leurs composantes. Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs alors le vecteur $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ a pour composantes $\begin{pmatrix}x_u+x_v\\y_u+y_v\end{pmatrix}$

Exemple :

Les composantes des vecteurs sont : $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour composantes $\begin{pmatrix}3+(-1)\\1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$



Exercice :

a) Placer les points A(-3 ; 4), B(2 ; -1), C(-3 ; -2) et D(1 ; 5) dans le repère

b) Calculer les composantes de $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$

……
……

c) Calculer les composantes du vecteur $\vec{AB}+\vec{CD}$

……

