

# Chapitre III : Vecteurs - partie 1

## Partie I : Définition d'un vecteur

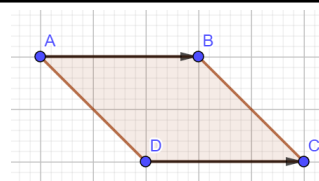
### I. Translation

#### Définition

On appelle translation qui transforme A en B, l'application qui à tout point M du plan associe son image M' telle que ABM'M soit un parallélogramme.

Une translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur  $\vec{AB}$ .

Remarque : Si ABCD est un parallélogramme, la translation de vecteur  $\vec{AB}$  est la même que la translation de vecteur  $\vec{DC}$



### II. Egalité de deux vecteurs

#### Définition et propriété

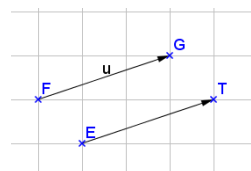
$\vec{AB} = \vec{CD}$  si et seulement si D est l'image de C par la translation qui à A associe B ou de vecteur  $\vec{AB}$

$\vec{AB} = \vec{CD}$  si et seulement si ABDC est un parallélogramme (attention à la permutation des lettres)

Vocabulaire :  $\vec{AB} = \vec{CD}$  s'appelle une égalité vectorielle, c'est une égalité entre deux vecteurs.

Exemple : T est l'image de E par la translation qui à F associe G.

donc les vecteurs  $\vec{FG}$  et  $\vec{ET}$  sont égaux.



Exercice : RTYU est un parallélogramme

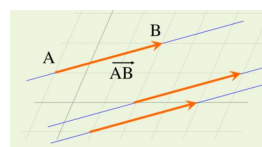
Quelles égalités vectorielles peut-on écrire ? .....

#### Caractérisation d'un vecteur

Un vecteur est caractérisé par :

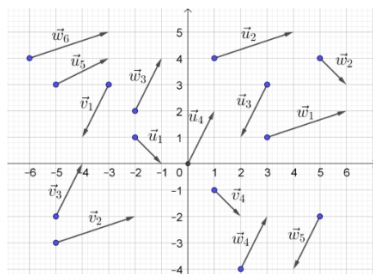
- sa direction, celle de la droite (AB)
- son sens, celui de A vers B
- sa norme, la longueur AB

Deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.



#### Exercice :

Quels sont les vecteurs égaux ? .....



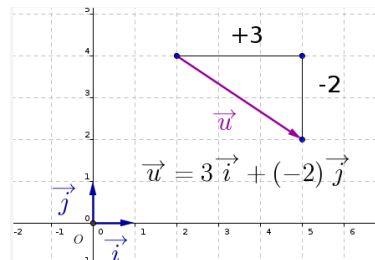
### III. Composantes d'un vecteur

#### Définition

Un vecteur  $\vec{AB}$  du plan représente une translation de A vers B, déterminée par deux **composantes** (ou coordonnées). La première composante est le déplacement horizontal et la 2e est le déplacement vertical dans un repère orthonormé.

**Exemple** : Le vecteur  $\vec{u}$  ci-dessus a pour composantes  $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

On écrit aussi  $\vec{u} = 3\vec{i} + (-2)\vec{j} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$

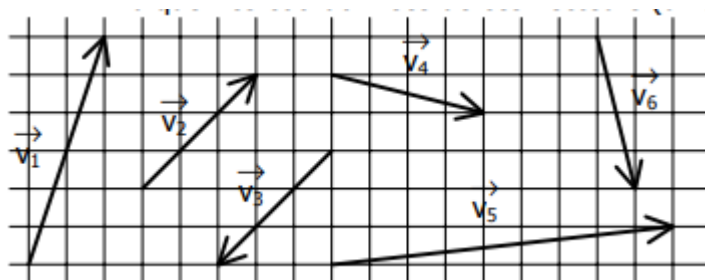


#### Remarque :

On préfère écrire les composantes en colonne plutôt qu'en ligne car les opérations seront plus faciles à faire.

**Remarque** : Pour définir un vecteur, ses **composantes** suffisent, on n'a pas besoin de connaître l'origine et l'extrémité, dans ce cas on le note avec une seule lettre, qui est le **nom** du vecteur, par exemple  $\vec{u}$ .

**Exercice** : Donner les composantes (ou coordonnées) des vecteurs suivants (unité de longueur : 1 carreau)



#### Définition

Le vecteur qui a pour composantes  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est appelé le vecteur **nul** et noté  $\vec{0}$ .

**Remarque** : Le vecteur nul est utile pour obtenir un résultat pour  $\vec{AA} = \vec{BB} = \vec{CC} = \vec{0}$  mais on ne peut pas représenter le vecteur nul par une flèche.

#### Théorème

$\vec{AB} = \vec{CD}$  si et seulement si ces deux vecteurs ont les mêmes composantes

**Exercice** : Les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$  ont pour composantes  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ? .....

.....

#### IV. Composantes d'un vecteur et coordonnées de points

##### Théorème

Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points. Le vecteur  $\vec{AB}$  a pour composantes  $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ .

Remarque : **Attention c'est B d'abord...**

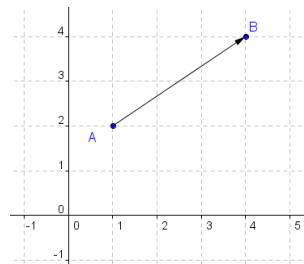
Attention quand on soustrait un nombre négatif car ça donne +.

Exemple : Les composantes du vecteur  $\vec{AB}$  à partir des coordonnées de A et de B sont :

$$A(1; 2) \quad B(4; 4)$$

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

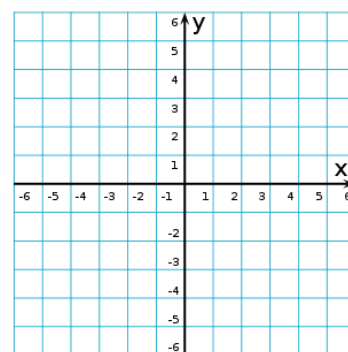
Ce que l'on peut vérifier sur le graphique, pour passer de A à B, on se déplace de 3 unités vers la droite horizontalement puis de 2 unités verticalement vers le haut



##### Exercice :

Placer les points  $A(1; 2)$ ,  $B(4; 3)$ ,  $C(-1; -2)$ ,  $D(3; -1)$  dans le repère

- Calculer les composantes de  $\vec{AB}$  : .....
- Calculer les composantes de  $\vec{CD}$  : .....



#### V. Coordonnées du milieu d'un segment

##### Théorème : caractérisation du milieu

Si I est le milieu de  $[AB]$ , alors  $\vec{AI} = \vec{IB}$  et réciproquement si  $\vec{AI} = \vec{IB}$  alors I est le milieu du segment  $[AB]$

##### Démonstration :

→ Sens direct : Si I est le milieu de  $[AB]$  alors

- A, I et B sont alignés, les droites (AI) et (IB) sont parallèles et les vecteurs  $\vec{AI}$  et  $\vec{IB}$  ont la même direction
- Les longueurs AI et IB sont égales, les vecteurs  $\vec{AI}$  et  $\vec{IB}$  ont la même norme
- Les vecteurs  $\vec{AI}$  et  $\vec{IB}$  ont le même sens

Ainsi les vecteurs  $\vec{AI}$  et  $\vec{IB}$  sont égaux d'après la caractérisation des vecteurs.

→ Sens réciproque : Si  $\vec{AI} = \vec{IB}$

- Les vecteurs ont la même direction, donc les droites (AI) et (IB) sont parallèles ainsi les points A, I et B sont alignés dans cet ordre
- Comme les vecteurs sont égaux, ils ont la même norme,  $AI = IB$

On en déduit que I est le milieu de  $[AB]$

**Théorème (rappel) : coordonnées du milieu**

Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points du plan. Le milieu  $I$  du segment  $[AB]$  a pour coordonnées :

$$\left( \frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

**Démonstration :**

On sait que  $I$  est le milieu de  $[AB]$

En écrivant les composantes de ces vecteurs :

$$\vec{AI} \begin{pmatrix} x_I - x_A \\ y_I - y_A \end{pmatrix} = \vec{IB} \begin{pmatrix} x_B - x_I \\ y_B - y_I \end{pmatrix}$$

Deux vecteurs égaux ont les mêmes composantes, donc :

$$x_I - x_A = x_B - x_I$$

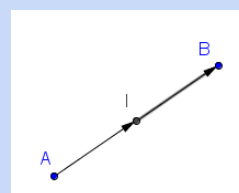
$$y_I - y_A = y_B - y_I$$

On rassemble les coordonnées de  $I$  à gauche :

$$2x_I = x_B + x_A$$

$$2y_I = y_B + y_A$$

$$\text{Donc : } x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

**Partie II : Somme de deux vecteurs****I. Somme de vecteurs et translation****Définition et propriété**

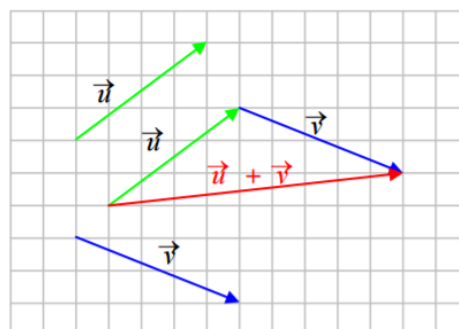
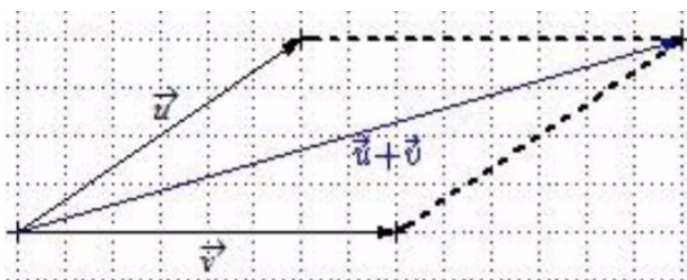
En enchaînant la translation de vecteur  $\vec{u}$  et celle de vecteur  $\vec{v}$  on obtient une nouvelle translation.

Le vecteur qui lui est associé est appelé somme de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$  et noté  $\vec{u} + \vec{v}$

Exemple : Tracer ce vecteur-somme  $\vec{w}$  sur la figure ci-dessus

Méthode : Règle du parallélogramme

Pour tracer le vecteur-somme de deux vecteurs, il suffit de les mettre « bout à bout »



**Exercice** : Tracer le vecteur somme**II. Somme de vecteurs et composantes****Définition**

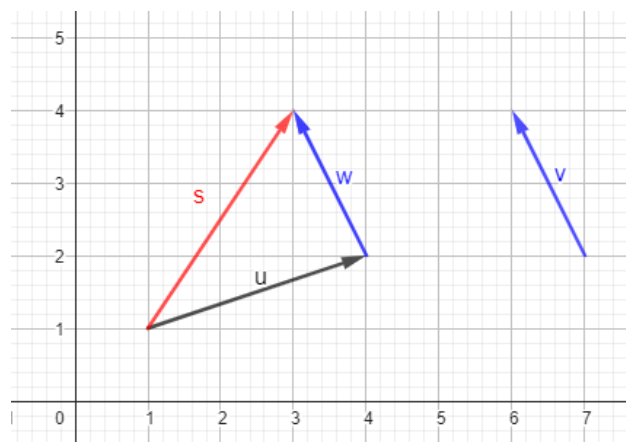
Pour additionner deux vecteurs, on additionne leurs composantes.

Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$  sont deux vecteurs alors le vecteur  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$  a pour composantes  $\begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix}$

**Exemple :**

Les composantes des vecteurs sont :  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Le vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$  a pour composantes  $\begin{pmatrix} 3+(-1) \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

**Exercice :**

- Placer les points A(-3 ; 4), B(2 ; -1), C(-3 ; -2) et D(1 ; 5) dans le repère
- Calculer les composantes de  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$

.....

.....

- Calculer les composantes du vecteur  $\vec{AB} + \vec{CD}$

.....

