

Funzioen konposizioa (Liburuko 258.orria)

Ea gogoratzen duzuen nik, askotan, egiten dudan galdera batetaz, eragiketak egiterakoan

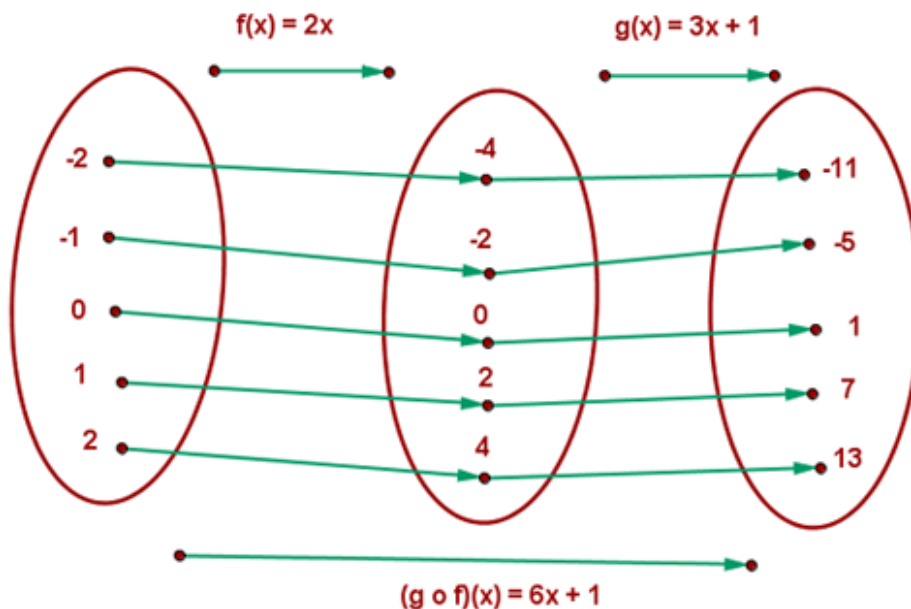
Zenbat eragiketa daude idatzita? Zein ordenetan egin behar ditugu?

Daramatzat urteak prestatzen justu orain landuko dugun kontzeptu hau:

Funtzioen konposizioa

KONPOSIZIOA:

eragiketak egiteko dagoen lehentasuna, zenbakiekin parentesiak eta kortzeteen bidez adierazten dena



Ulertzeko, adibide batzuk erabiko ditut eta apurka-apurka azalduko dizuet:

1. Adibidea:

$$y = (2x + 1)^2$$

1. *Zenbat eragiketa daude?*

Erantzuna: 3 eragiketa

2. *Zein ordenetan egin behar dira?*

Erantzuna: biderkaketa ($2 \cdot x$)

gehiketa ($2x + 1$)

berreketa ($(2x + 1)^2$)

3. Sinplifikatzeko lehenengo biak BATERA hartuko ditugu ($2x+1$), biderkaketa eta batuketa elkarrekin hartuko ditugu (zuzen baten ekuazioa betetzen dutelako).

Horrela BI PASUTAN banatuko dugu. Bigarrenetan bakarrik interesatzen zaigu BERREKETA dela, hori da eragiketa, ez zerekin egiten dugun berreketa hori

$$1) \quad f(x) = 2x + 1$$

$$2) \quad g(x) = x^2$$

4. x -ri balio jakin bat emanez, 2 pasutan egingo ditugu eragiketak:

$$x=4 \quad \rightarrow \quad (\text{lehenengo eragiketak eginez}) \quad 2 \cdot (4) + 1 = 9 \quad \rightarrow \quad (\text{bigarren eragiketa eginez}) \quad (9)^2 = 81$$

$$x=-1 \quad \rightarrow \quad (\text{lehenengo eragiketak eginez}) \quad 2 \cdot (-1) + 1 = -1 \quad \rightarrow \quad (\text{bigarren eragiketa eginez}) \quad (-1)^2 = 1$$

$$x=3 \quad \rightarrow \quad (\text{lehenengo eragiketak eginez}) \quad 2 \cdot (3) + 1 = 7 \quad \rightarrow \quad (\text{bigarren eragiketa eginez}) \quad (7)^2 = 49$$

Hau da, orokorrean horrela idazten da

1.eragiketak f funtzio honen bidez adierazten dugu $f(x) = 2x + 1$ eta 2.eragiketa (berbidura) beste batekin $g(x) = x^2$

$$x \rightarrow (\text{lehenengo funtzioa aplikatuz}) \quad f(x) = 2 \cdot (x) + 1 \rightarrow (\text{bigarren funtzioa aplikatuz aurreko lortutakoarekin}) \quad g(f(x)) = (f(x))^2 = (2x + 1)^2$$

Egin behar diren eragiketak BI funtzioen bidez ORDENATU ditugu, lehenengo aplikatu dugu $y=f(x)$ funtzioan adierazita dauden eragiketak eta ,gero, $y=g(x)$ funtzioan adierazita dagoena:

$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{eta} \quad g(x) = x^2$$

$$x \rightarrow f(x) \rightarrow g \circ f(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = (2x + 1)^2$$

Prozesu honi funtzioen arteko KONPOSIZIOA egitea deritzogu eta horrela adierazten da.

$$g(f(x)) = g \circ f(x) \quad f, \text{ konposatu } g\text{-rekin irakurtzen da}$$

Eragiketa hoen ikurra borobil txiki bat da : $\circ$

2.Adibidea:

Beste adibide bat izango da bi funtzio horiek beste ORDEN batean konposatzea, hau da

$f(g(x))=f \circ g(x)$ g, konposatu f-rekin irakurtzen da

Lehengo aplikatuko dugu g eta gero f:

$$f(x)=2x+1 \quad ; \quad g(x) = x^2$$

- $f \circ g(4)=f(g(4))$
 $x=4 \rightarrow g(4)=4^2=16 \rightarrow f(16)=2 \cdot 16+1=33=f(g(4))=f \circ g(4)$
- $f \circ g(-1)=f(g(-1))$
 $x=-1 \rightarrow g(-1)=(-1)^2=1 \rightarrow f(1)=2 \cdot 1+1=3=f(g(-1))=f \circ g(-1)$
- $f \circ g(x)=f(g(x))$

$$x \rightarrow g(x)=x^2 \rightarrow f(1)=2 \cdot (x^2)+1=2x^2+1=f(g(x))=f \circ g(x)$$

Argi ikusten da $g \circ f(x)=(2x+1)^2$ eta $f \circ g(x)=2x^2+1$ ez dira berdinak, eragiketa berak erabiliz, baina beste orden batean ez da emaitza bera lortzen

Konposizioa ez da ERARIGIKETA TRUKAKORRA

3.Adibidea:

$f(x) = x^2+x$ eta $g(x)=\frac{1}{x}$ izanik, bi funtzio hauen konposizioa BI

ORDENETAN kalkulatu ahal ditugu:

$$g \circ f(x) \quad \text{eta} \quad f \circ g(x)$$

$g \circ f(x)$:

$$x \rightarrow f \text{ ezarriz} \rightarrow x^2+x \rightarrow g \text{ ezarriz lortutakoarekin} \rightarrow \frac{1}{x^2+x} = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

$f \circ g(x)$:

$$x \rightarrow g \text{ ezarriz} \rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow f \text{ ezarriz lortutakoarekin} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{1+x}{x^2} = f(g(x)) = f \circ g(x)$$

4. Adibidea:

Aurreko adibidearekin kalkulatu dugu, esate baterako, $g \circ f(2)$; $g \circ f(1)$; $f \circ g(4)$

$g \circ f(2)$:

$$2 \rightarrow f \text{ ezarriz} \rightarrow 2^2 + 2 = 6 \rightarrow g \text{ ezarriz lortutakoarekin} \rightarrow \frac{1}{6} = g(f(2)) = g \circ f(2)$$

$g \circ f(1)$:

$$x \rightarrow f \text{ ezarriz} \rightarrow 1^2 + 1 = 2 \rightarrow g \text{ ezarriz lortutakoarekin} \rightarrow \frac{1}{2} = g(f(1)) = g \circ f(1)$$

$f \circ g(4)$:

$$\begin{aligned} x \rightarrow g \text{ ezarriz} &\rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow f \text{ ezarriz lortutakoarekin} \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{1+4}{16} = \frac{5}{16} = f(g(4)) = f \circ g(4) \end{aligned}$$

Eta adibide ebatzi gehiago:

Ariketa ebatzia

1 Funtzio hauek ditugu:

$$f(x) = x^2 - x \text{ eta } g(x) = \frac{4}{x+1}$$

a) Lortu honako hauen adierazpen analitikoa:

$$f \circ g \quad g \circ f \quad f \circ f \quad g \circ g$$

b) Aurkitu $f[g(1)]$ eta $g[f(1)]$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \bullet f[g(x)] &= f\left[\frac{4}{x+1}\right] = \left(\frac{4}{x+1}\right)^2 - \frac{4}{x+1} = \frac{16}{(x+1)^2} - \frac{4(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{12-4x}{(x+1)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f \circ g(x) = \frac{12-4x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\bullet g[f(x)] = g[x^2 - x] = \frac{4}{(x^2 - x) + 1} = \frac{4}{x^2 - x + 1} \Rightarrow g \circ f(x) = \frac{4}{x^2 - x + 1}$$

$$\begin{aligned} \bullet f[f(x)] &= f(x^2 - x) = (x^2 - x)^2 - (x^2 - x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 + x \Rightarrow \\ &\Rightarrow f \circ f(x) = x^4 - 2x^3 + x \end{aligned}$$

$$\bullet g[g(x)] = g\left[\frac{4}{x+1}\right] = \frac{4}{\frac{4}{x+1} + 1} = \frac{4}{\frac{4+x+1}{x+1}} = \frac{4(x+1)}{4+x+1} = \frac{4x+4}{x+5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g \circ g(x) = \frac{4x+4}{x+5}$$

$$\text{b) } \bullet f[g(1)] = \frac{12-4 \cdot 1}{(1+1)^2} = \frac{8}{4} = 2; \text{ edo, bestela } 1 \xrightarrow{g} \frac{4}{1+1} = 2 \xrightarrow{f} 2^2 - 2 = 2$$

$$\bullet g[f(1)] = \frac{4}{1^2 - 1 + 1} = 4; \text{ edo, bestela } 1 \xrightarrow{f} 1^2 - 1 = 0 \xrightarrow{g} \frac{4}{0+1} = 4$$

ARIKETAK (liburuko 258.orrian):

Proposatutako ariketak

1 $f(x) = x^2 - 5x + 3$ eta $g(x) = x^2$ direla jakinda, lortu $f[g(x)]$ eta $g[f(x)]$ -ren adierazpenak.

Aurkitu $f[g(4)]$ eta $g[f(4)]$.

2 $f(x) = \sin x$ eta $g(x) = x + \frac{\pi}{2}$ badira, lortu hauen adierazpenak: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ eta $g \circ g$.

Kalkulatu funtzio horien balioa $x = 0$ eta $x = \pi/4$ direnean.