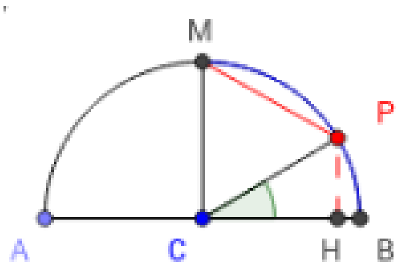
Sia M il punto medio di una semicirconferenza di diametro AB=2r. Si prenda sull'arco MB un punto P e sia H la proiezione di P su AB. determinare P in modo che sia minima la quantità MP^2+2PH^2.



Utilizziamo come incognita l'angolo $P\widehat{C}B$.
Calcolo le quantità che servono per la funzione da minimizzare

$PH = r\,sen(x)$

$MP = 2r\,sen\left(\frac{90°-x}{2}\right) = 2r\,sen\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$

Pertanto $f(x) = 4r^2 sen^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + 2r^2 sen^2(x)$.

Calcoliamo la derivata $f'(x) = 4r^2 \cdot 2\,sen\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right) + 2r^2 \cdot 2\,sen(x)\cos(x)$

Operiamo alcune semplificazioni

$$f'(x) = r^2\left[-4\,sen\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + 4\,sen(x)\cos(x)\right] =$$

$$= 4r^2\left[\sin(x)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right] = 4r^2\left[\sin(x)\cos(x) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right] =$$

pensando alla formula di duplicazione di seno applicata all'angolo $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$

$$= 4r^2\left[sen(x)\cos(x) - \frac{1}{2}\cos(x)\right] = 4r^2\cos(x)\left[sen(x) - \frac{1}{2}\right]$$

$f'(x)=0$ per $sen(x) = \frac{1}{2}$ ovvero per l'angolo $\frac{\pi}{6} = 30°$, unico valore possibile rispettando la limitazione della costruzione $0<x<90°$.

Sarebbe stato possibile anche calcolare MP mediante il teorema dei seni:

$$MP = \frac{r\cos(x)}{sen\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}$$

In questo caso la funzione obiettivo si sarebbe complicata notevolmente

$$f(x) = r^2\frac{\cos^2(x)}{sen\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} + 2r^2 sen^2(x)$$.

Lasciata in questa forma produce una derivata difficilmente trattabile.

La funzione può essere trasformata attraverso le formule trigonometriche nella funzione studiata nel modo precedente, a dimostrare che anche questa funzione obiettivo è equivalente a quella usata da noi.

$$f(x)=r^2\frac{\cos^2(x)}{\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2}+x)}{2}}+2r^2 sen^2(x)$$

va modificata utilizzando la formula di bisezione di seno applicata all'angolo $\frac{\pi}{2}+x$

$f(x)=2r^2\frac{1-sen^2(x)}{1-sen(x)}+2r^2 sen^2(x)$ va modificata utilizzando l'identità goniometrica

$sen^2x+cos^2x=1$ e la formula degli angoli associati $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-sen(x)$.

Scomponendo e semplificando otteniamo $f(x)=2r^2(1+sen(x))+2r^2 sen^2(x)$.
La derivata di questa funzione è la stessa di quella studiata nel modo precedente

Senza queste semplificazioni si sarebbe prodotta una derivata molto complicata da studiare. Probabilmente anche questa derivata sarebbe stata semplificabile, ma con calcoli assai complicati.