

1.-

(a) Define el concepto de matriz inversa de una matriz cuadrada. ¿Qué condición debe cumplir el determinante de una matriz cuadrada para que ésta sea invertible?

Resolución

Una matriz cuadrada es inversa de otra, también cuadrada, cuando al multiplicar ambas (en cualquier orden) se obtiene la matriz identidad. Las matrices que tienen inversa se llaman invertibles.

Para que una matriz cuadrada tenga inversa debe ser de determinante no nulo.

(b) Estudia si hay algún valor de a para el que la siguiente matriz tiene inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ -2a & 1 & a \\ a + 1 & a - 5 & 3a + 1 \end{pmatrix}$$

Resolución

Su determinante debería ser no nulo:

$$|1a3 - 2a1a + 1a - 533a + 11 - 3a| = |f2 - f1 \quad f3 - 3f1 \quad |1a3 - 2a013a - 8013a - 8| \quad f3 - f2 \quad |1a3 - 2a013a - 8000| = 0$$

Luego, no hay ningún valor de " a " para el que la matriz tenga inversa.

2.- Resuelve la ecuación: $|2x - 1 \ 3x \ x - 2 \ 2x + 1 \ x \ 2x + 1 \ 2x - 1 \ 3x \ 3x - 2| = 0$

Resolución

$$|2x - 1 \ 3x \ x - 2 \ 2x + 1 \ x \ 2x + 1 \ 2x - 1 \ 3x \ 3x - 2| = x|2x - 1 \ 3x - 2 \ 2x + 1 \ 1 \ 2x + 1 \ 2x - 1 \ 3 \ 3x -$$

$$= x.1|-4x - 4 - 5x - 5 - 4x - 4 - 3x - 5| = x.1.(-1)(-1)|4x + 4 \ 5x + 5 \ 4x + 4 \ 3x + 5| = x(4x + 4)|1 \ 5x + 5 \ 1 \ 3x + 5| = x(4x + 4)(-2x)$$

Nos queda la ecuación, $-2x^2.4(x + 1) = 0$; $-8x^2(x + 1) = 0$. Luego, $x = 0$ ó $x = -1$

3.- Escribe cuando sea posible, sistemas de ecuaciones que respondan a las características siguientes:

(a) Un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas que tenga infinitas soluciones.

Resolución

Basta con poner la misma ecuación, pero multiplicada por un parámetro distinto que no sea cero:

$$\text{Por ejemplo, } \{x + y = 1 \ 2x + 2y = 2 \ 3x + 3y = 3\}$$

(b) Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que sea compatible y determinado.

Resolución

Para que sea compatible determinado los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada deberían ser iguales a 3: imposible porque sólo hay 2 ecuaciones.

(c) Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que no tenga ninguna solución.

Resolución

Por ejemplo, que el rango de la matriz de los coeficientes sea 2 y el de la matriz ampliada sea 3

$$\{x + 0y + 0z = 0 \ 0x + y + 0z = 2 \ 0x + y + 0z = 1\} \text{ no tiene ninguna solución}$$

(d) Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que tenga solución única.

Razona en cada caso, tu respuesta

$$\text{Resolución Por ejemplo, } \{x = 0 \ y = 2 \ z = 1\}$$

4.- Una fábrica de electrodomésticos tiene una producción semanal fija de 42 unidades. La fábrica abastece a tres establecimientos – digamos A, B y C – que demandan toda su producción. En una determinada semana el establecimiento A solicitó tantas unidades como B y C juntos y, por otro lado, B solicitó un 20% más que la suma de la mitad de lo que pidió A más la tercera parte de lo que pidió C. ¿Cuántas unidades solicitó cada establecimiento dicha semana?

Resolución

Sean x, y, z el nº de unidades que solicitaron los establecimientos A, B y C, respectivamente.

Como la producción semanal es de 42 unidades, entonces $x + y + z = 42$.

Como el establecimiento A solicitó tantas unidades como B y C juntos, entonces $x = y + z$.

Como B solicitó un 20% más que la suma de la mitad de lo que pidió A más la tercera parte de lo que pidió C, entonces $y = 120\%$ de $\left(\frac{x}{2} + \frac{z}{3}\right)$.

Nos queda el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 42 \\ x - y - z = 0 \\ y = 1,2\left(\frac{x}{2} + \frac{z}{3}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 42 \\ x - y - z = 0 \\ y = 0,6x + 0,4z \end{cases}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 42 & 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad f2 - f1 \quad f3 - 3f1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 42 & 0 & -2 & -2 & -42 & 0 & -8 & -1 & -126 \end{pmatrix}$$

$$f3 - f2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 42 & 0 & 1 & 1 & 21 & 0 & 7 & 0 & 105 \end{pmatrix} \quad f3: 7 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 42 & 0 & 1 & 1 & 21 & 0 & 10 & 15 \end{pmatrix}.$$

Llegamos al sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 42 \\ y + z = 21 \\ y = 15 \end{cases}$$

Como $y = 15$, entonces $15 + z = 21$, $z = 6$; $x = 42 - y - z = 42 - 15 - 6 = 21$

Luego, el establecimiento A solicitó 21 unidades, el B solicitó 15 unidades y el C solicitó 6 unidades

5.- Del sistema de ecuaciones $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y = 0 \end{cases}$ se conocen todas sus soluciones, que son $x = \lambda$, $y = 2\lambda$ con λ variando en los números reales.

También se sabe que $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$. Resuelve el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 1 \\ a_{21}x + a_{22}y = 2 \end{cases}$$

Resolución

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes de ambos sistemas. Al tener el primer sistema infinitas soluciones y ser un sistema homogéneo, $\det A = 0$. Luego $\text{rg } A = 1$.

Como $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $(2, 1)$ es una solución del 2º sistema y como $x = \lambda$, $y = 2\lambda$ con λ variando en los números reales es solución del 1er sistema resulta:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 + \lambda & 1 + 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(2 + \lambda) + a_{12}(1 + 2\lambda) & a_{21}(2 + \lambda) + a_{22}(1 + 2\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 2 + a_{12} \cdot 1 + a_{11} \cdot \lambda + a_{12} \cdot 2\lambda & a_{21} \cdot 2 + a_{22} \cdot 1 + a_{21} \cdot \lambda + a_{22} \cdot 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego, las infinitas soluciones del 2º sistema son $\{x = 2 + \lambda, y = 1 + 2\lambda, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}\}$

6.- Sabiendo que la matriz A verifica la relación $A + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ resuelve el sistema $A(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$

Resolución

$A + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\det A = -3 \neq 0$, existe A^{-1} .

Multiplicando por A^{-1} , por la izquierda, $A^{-1}A(x, y) = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow I(x, y) = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (x, y) = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$(x, y) = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución del sistema es $x = 3, y = -1$

7.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & 2 & -1 & 1 & -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

(a) Comprueba que se verifica $A^2 - 2A + I = O$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Resolución

$$A^2 - 2A + I = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & 2 & -1 & 1 & -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & 2 & -1 & 1 & -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & 2 & -1 & 1 & -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

(b) Usando la igualdad anterior, calcula razonadamente A^{-1} y A^2 .

Resolución

Trasponiendo términos y sacando factor común,

$$\{I = 2A - A^2 = 2IA - AA = (2I - A)A = 2A - A^2 = A(2I - A)\}$$

Por definición de inversa,

$$A^{-1} = 2I - A = 2(100010001) - (5 - 422 - 11 - 44 - 1) = (-34 - 2 - 23 - 14 - 43)$$

Por otra parte, trasponiendo términos,

$$A^2 = 2A - I = 2(5 - 422 - 11 - 44 - 1) - (100010001) = (9 - 844 - 32 - 88 - 3)$$

8.- Sin desarrollar el determinante, demuestra que

$$|a + 2b \ a \ a + b \ a + b \ a + 2b \ a \ a + b \ a + 2b| = 9b^2(a + b)$$

Enuncia las propiedades de los determinantes que utilices.

Resolución

$$|a + 2b \ a \ a + b \ a + b \ a + 2b \ a \ a + b \ a + 2b| \ (1) \Rightarrow |b - 2b \ b \ b \ b - 2b \ a \ a + b \ a + 2b| \ (2) \Rightarrow |b -$$

$$(4) \Rightarrow 3b^2 |1 - 2 - 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ a \ a + b \ 2a + 3b| \ (5) \Rightarrow 3b^2 \cdot 1 |1 - 1 \ a \ 2a + 3b| =$$

(1) sustituimos f1 por f1 - f2 y f2 por f2 - f3 (2) Sustituimos f2 por f2 - f1

(3) sacamos factor común b en f1 y 3b en f2 (4) sustituimos c3 por c3 - c2 (5) Desarrollamos usando f2 9.-

(a) Dada la matriz $A = (1 \ b \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 0 \ 0 \ 1)$ ¿para qué valores del parámetro b no tiene inversa la matriz A? Justifica la respuesta.

Resolución

Para que no tenga inversa, $\det A = 0$; $1 - 2b = 0$; $b = \frac{1}{2}$. Para $b = \frac{1}{2}$ la matriz A no tiene inversa.

(b) Si existe, calcula la inversa para $b = -1$.

Resolución

Para $b = -1$, $A = (1 \ -1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 0 \ 0 \ 1)$; $\det A = 1 - 2 \cdot (-1) = 3 \neq 0$. Luego, existe la inversa de A

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t = \frac{1}{3} (1 - 2 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 - 3 \ 0 \ 3)^t = \frac{1}{3} (1 \ 1 - 3 - 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 3) = \left(\frac{1}{3} \ -\frac{1}{3} \ -1 \ -\frac{2}{3} \ \frac{1}{3} \ 0 \ 0 \ 1 \right)$$

10.- Sea A la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones

$$\{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 1 \ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = -1 \ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 2$$

Resuelve el sistema sabiendo que $A^{-1} = (1 \ 0 \ -1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 1)$

Resolución

Llamando $X = (x \ y \ z)$ y $b = (1 \ -1 \ 2)$, en forma matricial el sistema sería $AX = b$.

Multiplicando por A^{-1} , por la izquierda:

$$A^{-1}AX = IX = X = A^{-1}b = (1 \ 0 \ -1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 1)(1 \ -1 \ 2) = (-1 \ 5 \ 2)$$

Luego, la solución del sistema es $x = -1, y = 5, z = 2$

11.- Resuelve la ecuación matricial $AX + 2B = C$, siendo

$$A = (1 \ 0 \ 0 \ 2 \ 2 \ 1 \ 3 \ 0 \ -1), B = (0 \ -1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1) \text{ y } C = (1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0)$$

Resolución

RESUELTOS

Profesor: Rafael Núñez Nogales

Restando 2B, se tiene $AX = C - 2B$. Como $\det A = -2 \neq 0$, existe A^{-1} . Multiplicando por A^{-1} , por la izda:

$$A^{-1}AX = IX = X = A^{-1}(C - 2B) = \frac{1}{\det A}(\text{adj } A)^t[(1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0) - 2(0 \ -1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1)] =$$

$$= \frac{1}{-2}(-2 \ 5 \ -6 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 2)^t(1 \ 3 \ -4 \ 1 \ -2 \ 0 \ -1 \ 0 \ -2) = \frac{-1}{2}(-2 \ 0 \ 0 \ 5 \ -1 \ -1 \ -6 \ 0 \ 2) =$$

$$= \frac{-1}{2}(-2 \ -6 \ 8 \ 5 \ 17 \ -18 \ -8 \ -18 \ 20) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & \frac{-5}{2} & \frac{-17}{2} & 9 & 4 & 9 & -10 \end{pmatrix}$$

12.- Sabiendo que $|x \ y \ z \ 5 \ 0 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1| = 1$, calcula de forma razonada el valor de los siguientes determinantes sin

desarrollarlos: $|5x \ 5y \ 5z \ 1 \ 0 \ \frac{3}{5} \ 1 \ 1 \ 1|$ y $|xyz \ 2x + 5 \ 2y \ 2z + 3 \ x + 1 \ y + 1 \ z + 1|$

Resolución

$$5|5x \ 5y \ 5z \ 1 \ 0 \ \frac{3}{5} \ 1 \ 1 \ 1| \quad (1) \Rightarrow 5 \cdot 5|x \ y \ z \ 1 \ 0 \ \frac{3}{5} \ 1 \ 1 \ 1| \quad (2) \Rightarrow 5|x \ y \ z \ 5 \ 0 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1| \quad . \text{ Luego,}$$

$$|5x \ 5y \ 5z \ 1 \ 0 \ \frac{3}{5} \ 1 \ 1 \ 1| = |x \ y \ z \ 5 \ 0 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1| = 1$$

(1) Saco el factor 5 de la 1ª fila

(2) Multiplico un 5 por la 2ª fila

$$|x \ y \ z \ 2x + 5 \ 2y \ 2z + 3 \ x + 1 \ y + 1 \ z + 1| \quad (1) \Rightarrow |x \ y \ z \ 2x \ 2y \ 2z \ x + 1 \ y + 1 \ z + 1| + |x \ y \ z \ 5 \ 0 \ 3 \ x + 1 \ y + 1 \ z + 1|$$

$$(2) \Rightarrow 0 + |x \ y \ z \ 5 \ 0 \ 3 \ x \ y \ z| + |x \ y \ z \ 5 \ 0 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1| \quad (3) \Rightarrow 0 + 0 + |x \ y \ z \ 5 \ 0 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1| = 0 + 0 + 1 = 1$$

(1) Descompongo como suma de dos determinantes usando la 2ª fila

(2) El 1er sumando vale cero porque $f_2 = 2f_1$ y vuelvo a descomponer como suma de dos determinantes usando la 3ª fila

(3) El 2er sumando vale cero porque $f_3 = f_1$

13.- De las matrices $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ se sabe que $AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(a) ¿Tiene A inversa? Justifica la respuesta y si la respuesta es afirmativa cuál es la inversa de A.

(b) ¿Es cierto que $AB = BA$ en este caso?

Resolución

Como $AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$, $\det(AB) = \det A \cdot \det B = \det(3I) = 3^2 \cdot \det I = 9 \cdot 1 = 9$.

Luego, $\det A \neq 0$ y $\det B \neq 0$ y, por tanto existen A^{-1} y B^{-1} .

En $AB = 3I$ multiplicamos por A^{-1} , por la izquierda y por A, por la derecha:

$$A^{-1}ABA = A^{-1}3IA = 3I \Rightarrow IBA = 3I. \text{ Es decir, } BA = 3I. \text{ Por tanto, sí que es cierto que } AB = BA$$

$$\text{Multiplicando por } \frac{1}{3}, \text{ se tiene } \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}3I = I. \text{ Luego, } \left\{ \left(\frac{1}{3}B \right) A = \frac{1}{3}BA = I \right\} A \left(\frac{1}{3}B \right) = \frac{1}{3}AB = I$$

Por definición de inversa, $A^{-1} = \frac{1}{3}B$

RESUELTOS

Profesor: Rafael Núñez Nogales

14.- Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Calcula una matriz X tal que $A^2 + AX = I$.

Resolución

Restando A^2 se tiene $AX = I - A^2$. Como $\det A = -1 \neq 0$, existe A^{-1} . Multiplicando por A^{-1} , por la izda:

$$A^{-1}AX = IX = X = A^{-1}(I - A^2) = A^{-1} - A = \frac{1}{\det A}(\text{adj } A)^t - (2 \ 1 \ -1 \ -1) = \frac{1}{-1}(-1 \ 1 \ -1 \ 2)^t - (2 \ 1 \ -1 \ -1)$$

Luego,

$$X = -(-1 \ -1 \ 1 \ 2) - (2 \ 1 \ -1 \ -1) = (1 \ 1 \ -1 \ -2) - (2 \ 1 \ -1 \ -1) = (-1 \ 0 \ 0 \ -1) = -I$$

(b) Calcula, si existe, la inversa de X .

Resolución Como $X = -I$, X tiene inversa y su inversa es $X^{-1} = -I$

15.- Estudia el siguiente sistema según los valores del parámetro k e interpreta geométricamente los resultados: $\begin{cases} 2x + 2y + (k+2)z = -5x + y - 2z = 5 \\ 3x + ky - 6z = 5k \end{cases}$

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & k+2 & 2 & 1 & 1 & -2 & 3 & k & -6 \end{pmatrix}$ y

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & k+2 & -5 & 1 & 1 & -2 & 5 & 3 & k & -6 & 5k \end{pmatrix}$$

$$\det A = -12 - 12 + k^2 + 2k - 3k - 6 + 4k + 12 = k^2 + 3k - 18 = 0$$

$$k = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 9}{2}, k = 3 \text{ ó } k = -6$$

- Si $k \neq 3$; $k \neq -6$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

Las ecuaciones corresponden a tres planos se cortan en un solo punto, que es la solución del sistema.

- Si $k = 3$, $\det A = 0$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 2 & 1 & 1 & -2 & 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$. Como $|2 \ 5 \ 1 \ -2| = -9 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & -5 & 1 & 1 & -2 & 5 & 3 & 3 & -6 & 15 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ -2f_2 \\ f_3 \end{matrix} = 3f_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 & -15 & 1 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}. \text{ Como } |9 \ -15 \ -2 \ 5| = 15 \neq 0, \text{rg } A^* = 2.$$

Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Interpretación geométrica: tres planos que se cortan en una recta

- Si $k = -6$,

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & -5 & 1 & 1 & -2 & 5 & 3 & -6 & -6 & -30 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ -2f_2 \\ f_3 \\ -3f_1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -15 & 1 & 1 & -2 & 5 & 3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

La 1ª fila corresponde a la ecuación $0 = -15$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible.

Interpretación geométrica: Los 2 primeros planos son paralelos y el otro los corta

16.- De una matriz cuadrada A de orden 3 se sabe que su determinante vale 4.

(a) Explica cuánto vale el determinante de la matriz $3A$.

Resolución

Usando que si A es de orden 3 y k es un número real $\det(kA) = k^3 \cdot \det A$, $\det(3A) = 3^3 \cdot \det A = 3^3 \cdot 4 = 108$

(b) Si B es la matriz inversa de A , explica cuánto vale el determinante de B .

Resolución

RESUELTOS

Profesor: Rafael Núñez Nogales

Como B es la inversa de A, $BA = I$ y $\det(BA) = \det B \cdot \det A = \det I = 1$. Luego,

$$\det \det B = \frac{1}{\det \det A} = \frac{1}{4}$$

(c) Al aplicar el método de eliminación de Gauss a la matriz A, al final del proceso obtenemos, sin que haya habido intercambio de filas ni de columnas la matriz $(2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ a)$ ¿Cuánto vale a? Justifica la respuesta.

Resolución

Como en el proceso mencionado del método de eliminación de Gauss y determinante no cambia entonces

$$4 = \det \det A = \det(2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ a) = 4a. \text{ Luego, } a = 1$$

17.- Considera el sistema $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - 4y + 2z = -3 \end{cases}$

(a) Añade una ecuación lineal al sistema anterior de modo que el sistema resultante sea incompatible.

Resolución

Le añado una de las dos ecuaciones que me han dado, pero le cambio el valor del término independiente, con lo cual al reducirlas por el método de Gauss me queda $0 = \text{número distinto de cero}$ lo cual es absurdo y el sistema es incompatible. Por ejemplo,

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - 4y + 2z = -3 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

(b) Si añadimos al sistema dado la ecuación $mx + y - z = -1$ determina para qué valores del parámetro m el sistema resultante es compatible indeterminado y resuélvelo.

Resolución

Nos queda el sistema $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - 4y + 2z = -3 \\ mx + y - z = -1 \end{cases}$. Las matrices de coeficientes y ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & -4 & 2 & m & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 & -4 & 2 & -3 & m & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \det A = 4 - 2m + 3 + 4m - 2 - 3 = 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$$

Para que el sistema sea compatible indeterminado no puede ser $m \neq -1$, porque si ocurre esto sería $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema sería compatible determinado, tiene solución única.

Para $m = -1$,

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 & -4 & 2 & -3 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad f_3 = -f_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 & -4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad f_2 - 3f_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 & -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

que corresponde al sistema $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -y - z = -6 \end{cases}$.

En la 2ª ecuación, $y = 6 - z$; en la 1ª ecuación, $x = 1 + y - z = 1 + 6 - z - z = 7 - 2z$

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\begin{cases} x = 7 - 2k \\ y = 6 - k \\ z = k \end{cases}$, con $k \in \mathbb{R}$

18.- Una tienda vende una clase de calcetines a 1200 ptas el par. Al llegar las rebajas, durante el primer mes realiza un 30% de descuento sobre el precio inicial y en el segundo mes un 40% también sobre el precio inicial. Sabiendo que vende un total de 600 pares de calcetines por 597600 ptas y que en las rebajas ha vendido la mitad de dicho total, ¿a cuantos pares de calcetines se les ha aplicado el descuento del 40%?

Resolución

Sean x, y, z el nº de pares de calcetines sin tanto por ciento de descuento, con 30% y 40% de descuento respectivamente.

Usando la información del enunciado,

$$\begin{cases} x + y + z = 600 \\ y + z = 300 \\ 1200x + 1200 \cdot 0,7y + 1200 \cdot 0,6z = 597600 \end{cases}$$

Operando en la 3ª ecuación queda

$$\begin{cases} x + y + z = 600 \\ y + z = 300 \\ x + 0,7y + 0,6z = 498 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 600 \\ y + z = 300 \\ 10x + 7y + 6z = 4980 \end{cases}$$

La matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 600 & 0 & 1 & 1 & 300 & 10 & 7 & 6 & 4980 \end{pmatrix} \quad f_3 - 10f_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 600 & 0 & 1 & 1 & 300 & 0 & -3 & -4 & -1020 \end{pmatrix} \quad f_3 + 3f_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 600 & 0 & 1 & 1 & 300 & 0 & 0 & 1 & 1020 \end{pmatrix}$$

RESUELTOS

Profesor: Rafael Núñez Nogales

que corresponde al sistema $\{x + y + z = 600 \quad y + z = 300 \quad z = 120\}$.

Despejando, $y = 300 - z = 300 - 120 = 180$; $x = 600 - y - z = 600 - 180 - 120 = 300$

Luego, se les ha aplicado el descuento del 40% a 120 pares de calcetines

19.-

(a) Determina según los valores del parámetro α cuándo tiene solución el sistema

$$\{\alpha x + y + z = \alpha^2 \quad \alpha x + (1 - \alpha)y + (\alpha - 1)z = \alpha^2 \quad \alpha x + y + \alpha z = 2\alpha^2\}$$

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = (\alpha \ 1 \ 1 \ \alpha \ 1 - \alpha \ \alpha - 1 \ \alpha \ 1 \ \alpha)$ y

$$A^* = (\alpha \ 1 \ 1 \ \alpha^2 \ \alpha \ 1 - \alpha \ \alpha - 1 \ \alpha^2 \ \alpha \ 1 \ \alpha \ 2\alpha^2)$$

$$\det A = \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^2 - \alpha + \alpha - \alpha + \alpha^2 - \alpha^2 + \alpha - \alpha^2 = -\alpha^3 + \alpha^2 = \alpha^2(-\alpha + 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ó } \alpha = 1$$

- Si $\alpha \neq 0$; $\alpha \neq 1$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = \text{n}^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

- Si $\alpha = 0$, $\det A = 0$ y $A = (0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 - 1 \ 0 \ 1 \ 0)$. Como $|1 \ 1 \ 1 - 1| = -2 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

$A^* = (0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 - 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1) \Rightarrow \text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < \text{n}^\circ$ de incógnitas.

Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

- Si $\alpha = 1$, $A^* = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2)$ $f_3 - f_1$ $(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$.

La 3ª fila corresponde a la ecuación $0 = 1$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible.

Conclusión: el sistema sólo tiene solución para $\alpha \neq 1$.

(b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

Resolución

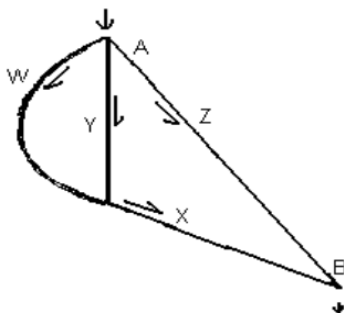
Para $\alpha = 0$ sabemos que es compatible indeterminado y la matriz del sistema es

$$A^* = (0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 - 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$$

que corresponde al sistema $\{y + z = 0 \quad y - z = 0 \quad y = 0\}$. Luego, $y = z = 0$.

Llamando $x = k$, las infinitas soluciones son $\{x = k \quad y = 0 \quad z = 0\}$, con $k \in \mathbb{R}$

20.- Por la abertura A del mecanismo de tubos de la figura se introducen 50 bolas que se deslizan hasta salir por B. Sabemos que por el tubo W han pasado 10 bolas.



(a) Justifica si es posible hallar el número de bolas que pasan exactamente por cada uno de los tubos X, Y y Z.

Resolución

Sean x, y, z, w el n° de bolas que han pasado por los tubos X, Y, Z, W, respectivamente.

Usando el dibujo y el enunciado, $\{w = 10 \quad y + z + w = 50 \quad x = y + w \Rightarrow \{y + z = 40 \quad x - y = 10\}$

La matriz del sistema es $A^* = (0 \ 1 \ 1 \ 40 \ 1 - 1 \ 0 \ 10)$ que corresponde al sistema $\{y + z = 40 \quad x - y = 10\}$.

En la 1ª ecuación $y = 40 - z$. En la 2ª ecuación $x = 10 + y = 10 + 40 - z = 50 - z$.

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = 50 - k \quad y = 40 - k \quad z = k\}$, con $k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 40$.

Como hay infinitas soluciones, no se puede hallar el n^o de bolas que pasan por los tubos X, Y, y Z.

(b) Supongamos que podemos controlar el número de bolas que pasan por el tubo Y.

Escribe las expresiones que determinan el número de bolas que pasan por los tubos X y Z en función de las que pasan por Y.

Resolución

Usando el apartado (a) y despejando x y z en el sistema $\{y + z = 40 \quad x - y = 10\}$ obtenemos $x = 10 + y$, $z = 40 - y$

(c) Se sabe un dato nuevo: por Y circulan 3 veces más bolas que por Z, ¿cuántas circulan por X, Y y Z?

Resolución

Usando el (a) y el nuevo dato llegamos al sistema $\{y + z = 40 \quad x - y = 10 \quad y = 3z\}$. Sustituyendo $y = 3z$ en las dos primeras ecuaciones

$\{3z + z = 40 \quad x - 3z = 10 \Rightarrow \{z = 10 \quad x = 3z + 10 = 3 \cdot 10 + 10 = 40\}$. Pasan 40, 30 y 10 bolas respectivamente

OTROS DEL 1997 (COU I)

1.- Dado un número real α , considera la matriz $A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

(a) Prueba que $A(\alpha) \cdot A(\beta) = A(\alpha + \beta)$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Resolución

$A(\alpha) \cdot A(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} =$

(b) Prueba que $[A(\alpha)]^t = [A(\alpha)]^{-1} = A(-\alpha)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Resolución

$\det A(\alpha) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \neq 0$. Luego, existe

$[A(\alpha)]^{-1} = \frac{1}{\det A(\alpha)} (\text{adj } A(\alpha))^t = (\cos \alpha \cos \alpha \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha)^t =$

$= [A(\alpha)]^t = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & \sin(-\alpha) \\ -\sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = A(-\alpha)$

2.- Aplicando las propiedades de los determinantes y sabiendo que m y n son números enteros, prueba, sin necesidad de desarrollarlo, que el determinante siguiente es un múltiplo de $(m + n)^2$

$$\begin{vmatrix} m^2 & 2mn & n^2 & n^2 & m^2 & 2mn & 2mn & n^2 & m^2 \end{vmatrix}$$

Resolución

$\begin{vmatrix} m^2 & 2mn & n^2 & n^2 & m^2 & 2mn & 2mn & n^2 & m^2 \end{vmatrix} \quad (1) \Rightarrow \begin{vmatrix} m^2 & 2mn & n^2 & n^2 & m^2 & 2mn & m^2 + n^2 + 2mn & m^2 + n^2 + 2mn & m^2 + n^2 \end{vmatrix}$

(1) Sustituimos f_3 por $f_3 + f_1 + f_2$

(2) Usamos que $(m + n)^2 = m^2 + n^2 + 2mn$ y lo sacamos como factor común de la 3ª fila

Por tanto, el determinante es múltiplo de $(m + n)^2$.

3.- Sea M el conjunto de todas las matrices de la forma $M(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ obtenidas al variar x en el conjunto de los números reales.

(a) Prueba que, al multiplicar dos matrices de M, el resultado es otra matriz del mismo conjunto M.

Resolución

$M(x) \cdot M(x') = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{x'} & 0 & 0 & 0 & 1 & x' & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{x+x'} & 0 & 0 & 0 & 1 & x+x' & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(x+x')$

(b) Determina, caso de existir, un valor $x \in \mathbb{R}$ tal que $M(2) \cdot M(x) = M(4)$.

Resolución

$M(2) \cdot M(x) = M(4) \Leftrightarrow M(x + 2) = M(4) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2^{x+2} & 0 & 0 & 0 & 1 & x + 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Igualando los elementos, $x + 2 = 4$. Luego, $x = 2$.

4.- Dado el sistema de ecuaciones que depende de un parámetro real λ ,

$$\begin{cases} x + 3y + 7z = \lambda \\ 3x - 2y - 12z = 1 \\ -4x + 5y + 23z = -\lambda \end{cases}$$

¿existe algún valor de λ para el que dicho sistema es compatible? Contesta razonadamente

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 3 & -2 & -12 & -4 & 5 & 23 \end{pmatrix}$ y

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & \lambda & 3 & -2 & -12 & 1 & -4 & 5 & 23 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det A = -46 + 144 + 105 - 56 + 60 - 207 = 0. \text{ Como } |1 \ 3 \ 3 \ -2| = -11 \neq 0, \text{ rg } A = 2.$$

En A^* el menor

$$|1 \ 3 \ \lambda \ 3 \ -2 \ 1 \ -4 \ 5 \ -\lambda| = 2\lambda - 12 + 15\lambda - 8\lambda - 5 + 9\lambda = 18\lambda - 17 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{17}{18}$$

- Si $\lambda \neq \frac{17}{18}$, $\text{rg } A^* = 3 \neq \text{rg } A = 2$. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible, no tiene solución.

- Si $\lambda = \frac{17}{18}$ la matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & \frac{17}{18} & 3 & -2 & -12 & 1 & -4 & 5 & 23 & -\frac{17}{18} \end{pmatrix} \xrightarrow{18f_1} \begin{pmatrix} 18 & 54 & 126 & 17 & 54 & -36 & -216 & 18 & -72 & 90 & 414 & -17 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 - 6f_2} \begin{pmatrix} 18 & 54 & 126 & 17 & 54 & -36 & -216 & 18 & -72 & 90 & 414 & -17 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 + 24f_2} \begin{pmatrix} 0 & 66 & 198 & 113 & -2 & -12 & 1 & 0 & 42 & 126 & 7 \end{pmatrix}$$

$$f_1 : 11 \quad f_3 : 7 \quad \begin{pmatrix} 0 & 6 & 18 & 13 & -2 & -12 & 1 & 0 & 6 & 18 & 1 \end{pmatrix} \quad f_3 = f_1 \begin{pmatrix} 0 & 6 & 18 & 13 & -2 & -12 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Como } |0 \ 1 \ 3 \ 1| = -3 \neq 0, \text{ rg } A^* = 2.$$

Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Conclusión: Para $\lambda = \frac{17}{18}$ el sistema es compatible (además es indeterminado)

5.-

(a) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 & -2 & \alpha & -1 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, determina los valores de α para los que M tiene inversa.

Resolución

$$\det M = 20\alpha + 24 - 18\alpha - 10 = 2\alpha + 14 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -7. \text{ Luego, si } \alpha \neq -7 \text{ } M \text{ tiene inversa.}$$

(b) Halla los valores de α para los que las tres filas de M representan vectores linealmente dependientes, y para dichos valores, determina el rango de M .

Resolución

Sabemos del (a) que si $\alpha = -7$ M no tiene inversa y, por tanto, las filas de M representan vectores linealmente dependientes. En este caso, $\text{rg } M < 3$.

$$\text{Para } \alpha = -7 \quad M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 & -2 & -7 & -1 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Como } |5 \ 0 \ -2 \ -7| = -35 \neq 0, \text{ rg } M = 2.$$

6.- Sean a, b, c y x números reales.

(a) Prueba, sin desarrollar el determinante, que $|a \ a + x \ a + 2x \ b \ b + x \ b + 2x \ c \ c + x \ c + 2x| = 0$

RESUELTOS

Profesor: Rafael Núñez Nogales

(b) Enuncia alguna de las propiedades de los determinantes que utilices en el apartado anterior.

Resolución

$$|a \ a + x \ a + 2x \ b \ b + x \ b + 2x \ c \ c + x \ c + 2x| \quad (1) \Rightarrow |a \ x \ 2x \ b \ x \ 2x \ c \ x \ 2x| \quad (2) \Rightarrow 0$$

(1) Sustituimos c_2 por $c_2 - c_1$ y c_3 por $c_3 - c_1$ y el determinante no varía.

(2) $c_3 = 2 \cdot c_2$ y el determinante vale 0 por ser una columna proporcional a otra.

(c) Halla, sin desarrollarlo, el valor del siguiente determinante: $|1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9|$

Resolución

Observamos que el determinante dado es el del (a) para $a = 1$, $b = 4$, $c = 7$ y $x = 1$:

$$|1 \ 1 + 1 \ 1 + 2 \cdot 1 \ 4 \ 4 + 1 \ 4 + 2 \cdot 1 \ 7 \ 7 + 1 \ 7 + 2 \cdot 1| = |1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9|. \text{ Por tanto, vale 0.}$$

7.- Dado el sistema que depende de un parámetro real a ,

$$\begin{cases} x + ay + z = a + 2 \\ x + y + az = -2(a + 1) \end{cases} \quad ax + y + z = a$$

(a) ¿Para qué valores del parámetro a tiene el sistema infinitas soluciones?

(b) ¿Para los valores de a hallados en el apartado anterior, determina las correspondientes soluciones?

(c) Interpreta geoméricamente lo obtenido en los apartados anteriores.

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 & 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a + 2 & 1 & 1 & a & -2(a + 1) & a & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$\det A = 1 + a^3 + 1 - a - a - a = a^3 - 3a + 2 = 0$. Factoricemos usando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrrrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & -2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \quad \text{Nos queda } (a - 1)(a^2 + a - 2) = 0, \text{ de donde } a = 1 \text{ ó } a^2 + a - 2 = 0$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} \quad a = 1 \text{ ó } a = -2; \quad \det A = (a - 1)^2(a + 2)$$

- Si $a \neq 1$; $a \neq -2$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

Las ecuaciones corresponden a tres planos que se cortan en un solo punto, la solución del sistema.

Vamos a usar la regla de Cramer para resolverlo:

$$A_x = \begin{pmatrix} a + 2 & a & 1 & -2(a + 1) & 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_y = \begin{pmatrix} 1 & a + 2 & 1 & 1 & -2(a + 1) & a & a & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_z = \begin{pmatrix} 1 & a & a + 2 & 1 & 1 & -2(a + 1) & a & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\det A_x = a + 2 + a^3 - 2a - 2 - a - a^2 - 2a + 2a^2 + 2a = a^3 + a^2 - 2a = a(a^2 + a - 2) = a(a - 1)(a + 2)$$

$$\det A_y = -2a - 2 + a^3 + 2a^2 + a + 2a^2 + 2a - a^2 - a - 2 = a^3 + 3a^2 - 4$$

Factoricemos usando la regla de Ruffini: $\begin{array}{r|rrrrrrrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 4 & 0 & 4 & 4 & -4 & 4 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 4 & 0 & 4 & 4 & -4 & 4 & 0 \end{array}$. Nos queda $(a - 1)(a^2 + 4a + 4) = (a - 1)(a + 2)^2$.

$$\det A_z = a - 2a^3 - 2a^2 + a + 2 - a^2 - 2a - a^2 + 2a + 2 = -2a^3 - 4a^2 + 2a + 4 = -2(a^3 + 2a^2 - a - 2)$$

Factoricemos usando la regla de Ruffini: $\begin{array}{r|rrrrrrrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & -1 & 3 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & -1 & 3 & 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}$. Queda $(a - 1)(a^2 + 3a + 2)$

RESUELTOS

Profesor: Rafael Núñez Nogales

$a = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2} \quad a = -1 \quad a = -2$; $\det A_z = (a-1)^2(a+2)(a+1)$. La solución del sistema es

$$x = \frac{A_x}{\det A} = \frac{a(a-1)(a+2)}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{a}{a-1} ; y = \frac{A_y}{\det A} = \frac{(a-1)(a+2)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{a+2}{a-1} ;$$

$$z = \frac{A_z}{\det A} = \frac{(a-1)^2(a+2)(a+1)}{(a-1)^2(a+2)} = a+1$$

- Si $a = -2$, $\det A = 0$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Como $|1 \ -2 \ 1 \ 1| = 3 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad f_2 - f_1 \quad f_3 + 2f_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 2 & 0 & -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad f_3 - f_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como $|1 \ -2 \ 0 \ 3| = 3 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Interpretación geométrica: tres planos que se cortan en una recta

La matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ que corresponde al sistema $\{x - 2y + z = 0 \quad 3y - 3z = 2\}$.

De la 2ª ecuación, $y = \frac{2+3z}{3}$; de la 1ª ecuación, $x = 2y - z = 2 \frac{2+3z}{3} - z = \frac{4+3z}{3}$.

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = \frac{4+3k}{3} \quad y = \frac{2+3k}{3} \quad z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$

- Si $a = 1$ la matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad f_3 - f_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La 3ª fila corresponde a la ecuación $0 = -2$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

Al ser $\text{rg } A = \text{rg}(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) = \text{rg}(1 \ 1 \ 1) = 1$ y al ser los términos independientes distintos tenemos tres planos paralelos y distintos.

8.- Considera el sistema que depende de un parámetro real k :

$$\begin{cases} 3x + 5y + kz = 2 \\ 5x + 3y + kz = 2 \\ kx + 5y + 3z = 2 \end{cases}$$

(a) Estúdialo según los valores del parámetro k .

(b) Interpreta geométricamente el sistema en cada uno de los casos obtenidos en el apartado (a).

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & k & 5 & 3 & k & 5 & 3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 5 & k & 2 & 5 & 3 & k & 2 & k & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det A = 27 + 5k^2 + 25k - 3k^2 - 15k - 75 = 2k^2 + 10k - 48 = 2(k^2 + 5k - 24) = 0$$

$$k = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 11}{2} \quad k = 3 \quad k = -8$$

- Si $k \neq 3$ y $k \neq -8$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

Las ecuaciones corresponden a tres planos que se cortan en un solo punto, la solución del sistema.

- Si $k = 3$, $\det A = 0$ y $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 5 & 3 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Como $|3 \ 5 \ 5 \ 3| = -16 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 & 5 & 3 & 3 & 2 & 3 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad f_1 = f_3 \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 & 5 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad 5f_1 - 3f_2 \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 & 0 & 16 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad f_2 : 2 \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 & 0 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

RESUELTOS

Profesor: Rafael Núñez Nogales

Como $|3 \ 5 \ 0 \ 8| = 24 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas.

Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Interpretación geométrica: el primer y tercer plano son coincidentes y el otro plano los corta

- Si $k = -8$, la matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 8 \\ -8 & 2 & 5 & 3 \\ -8 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5f_1 - 3f_2 \\ 8f_1 + 3f_3 \\ 5f_1 - 3f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 16 \\ -16 & 4 & 0 & 55 \\ -55 & 22 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 : 4 \\ f_3 : 11 \\ 4f_3 - 5f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 0 & 5 \\ -5 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La 3ª fila corresponde a la ecuación $0 = 3$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

Geométricamente, como los planos son secantes dos a dos se cortarían formando un prisma.

(c) Resuélvelo para $k = 1$.

Resolución

Si $k = 1$, sabemos que el sistema tiene solución única y la matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & 5 & 3 & 1 & 2 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & f_1 - 3f_2 & 3f_3 - f_1 & 3 & 5 & 1 & 2 & 0 & 16 & 2 & 4 & 0 & 10 & 8 & 4 \\ 4 & f_2 - f_3 & 3 & 5 & 1 & 2 & 0 & 5 & 4 & 0 & 12 & 0 & 10 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 : 6 \\ f_3 : 2 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 0 & 9 & 0 & 2 & 0 & 5 & 4 & 2 \end{matrix}$$

que corresponde al sistema $\begin{cases} 3x + 5y + z = 2 \\ 9y = 2 \\ 5y + 4z = 2 \end{cases}; y = \frac{2}{9};$

$$z = \frac{2 - 5y}{4} = \frac{2 - 5 \cdot \frac{2}{9}}{4} = \frac{2}{9}$$

$$x = \frac{2 - 5y - z}{3} = \frac{2 - 5 \cdot \frac{2}{9} - \frac{2}{9}}{3} = \frac{2}{9}. \text{ La solución es } x = y = z = \frac{2}{9}$$

9.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 1 & 3 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Estudia si existe y, si es así, calcula la inversa de A.

Resolución

$\det A = -8 + 2 + 3 + 4 = 1 \neq 0$. Luego, existe

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t = \frac{1}{1} (4 \ 2 \ 5 \ 2 \ 1 \ 2 \ 5 \ 3 \ 7)^t = (4 \ 2 \ 5 \ 2 \ 1 \ 3 \ 5 \ 2 \ 7)$$

(b) Estudia si existe y, si es así, calcula la inversa de B.

Resolución $\det B = 2 - 1 - 1 = 0$. Luego, NO existe B^{-1}

(c) Determina una matriz X que verifique $(2A + I)B = B + AXA$.

Resolución

Restamos B en ambos miembros:

$$(2A + I)B - B = AXA \Rightarrow (2A + I)B - IB = AXA \Rightarrow AXA = (2A + I - I)B = 2AB$$

Multiplicamos por A^{-1} , por la izquierda y por la derecha, en los dos miembros:

$$A^{-1}AXAA^{-1} = IXI = A^{-1}2ABA^{-1} = 2A^{-1}ABA^{-1} = 2IBA^{-1} = 2BA^{-1} \Rightarrow X = 2BA^{-1}$$

$$X = 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} (4 \ 2 \ 5 \ 2 \ 1 \ 3 \ 5 \ 2 \ 7) = 2 \begin{pmatrix} -7 & -3 & -10 & 8 & 3 & 12 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -6 & -20 & 16 & 6 & 24 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

PAU – MATEMÁTICAS II y COU I – ÁLGEBRA – ANDALUCÍA – MODELOS DE 1997
RESUELTOS

Profesor: Rafael Núñez Nogales
