Тема 8 (продолжение). Знание основных понятий и законов математической логики (18). Отрезки. Множества. Уравнения (23)

18-2019. Основные понятия математической логики. Продолжение (повышенный уровень, время – 3 мин.)

Связь логики и теории множеств

Множество можно задать перечислением его элементов или с помощью логического выражения (условия), которое истинно для каждого элемента множества и ложно для всех элементов, не входящих во множество.

В любой задаче можно выделить некоторое **«универсальное» множество**, в которое входят все объекты, рассматриваемые в задаче.

В качестве такого *универсального множества* может быть выбрано, например:
- множество точек числовой прямой,
- множество точек, принадлежащих отрезку,
- множество всех натуральных чисел, которые делятся на некоторое число,
- какое-то другое множество.

Основные операции над множествами:

- **Пересечение** соответствует логическому умножению $A \cdot B$ – содержит элементы, которые входят одновременно в A и B.

- **Объединение** соответствует логическому сложению $A + B$ – содержит элементы, которые входят хотя бы в одно из двух множеств.

- **Дополнение** (до выбранного универсального множества): $\overline{A}$.

Например, если A – это множество точек, принадлежащих отрезку, то $\overline{A}$ - множество точек, не принадлежащих этому отрезку (здесь универсальное множество – это множество всех точек числовой оси).

Если A – множество натуральных чисел, которые делятся на некоторое число a, то $\overline{A}$ - это множество натуральных чисел, которые не делятся на a (здесь универсальное множество – это множество всех натуральных чисел).

Многие задачи ЕГЭ на математическую логику сводятся к двум базовым задачам, в которых надо найти дополнение какого-то множества.

Задача 1. Каким должно быть множество A для того, чтобы множество $\boldsymbol{A+B}$ совпадало с универсальным множеством?

Решение: Очевидно, что можно выбрать в качестве решения $\overline{B}$ - дополнение множества B до универсального множества.

Множество Amin = $\overline{B}$ - это минимальное множество, которое является решением задачи.

Кроме того, решением будет и любое множество, включающее $\overline{B}$, т.е любое A такое, что $A \geq \overline{B}$ или , используя обозначения теории множеств, $A \supseteq \overline{B}$ **.**

Заметим, что множество $A+B$, которое по условию задачи должно совпадать с универсальным множеством, определяется логическим выражением $A+B$. Это выражение может быть преобразовано, с учетом свойств импликации, к форме $\overline{B} \rightarrow$A. Переход от условия $A+B$=1 к условию $\overline{B} \rightarrow$A =1 в некоторых случаях упрощает решение задачи.

Задача 2. Каким должно быть множество A для того, чтобы множество $\overline{A} + B$ совпадало с универсальным множеством?

Решение: В этом случае получаем $\overline{A} \geq \overline{B}$, откуда следует, что $A \leq B$, т.е. множество A должно быть подмножеством множества B. Тогда максимальное множество A, которое является подмножеством множества B: ($A \subseteq B$). Тогда максимальное множество A, которое является решением задачи, совпадает с B.

Множество *A*max= *B* - это максимальное множество, которое является решением задачи.

В некоторых случаях задача упрощается, если заменить условие $\overline{A}+B=1$, определяющее множество $\overline{A}+B$, на эквивалентное условие $A \to B=1$ или $\overline{B} \to \overline{A}=1$.

Вывод: Для решения конкретной задачи на множества и математическую логику надо:

1) попытаться привести к одной из базовых задач:

Задача 1. $A + B = 1 \Leftrightarrow \overline{B} \to A = 1$

Задача 2. $\overline{A} + B = 1 \Leftrightarrow \overline{B} \to \overline{A} = 1$

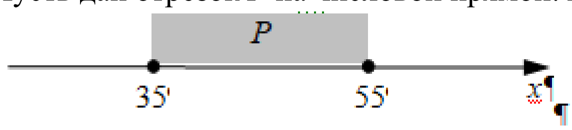
2) использовать готовое решение:

Задача 1. $A\min = \overline{B}$

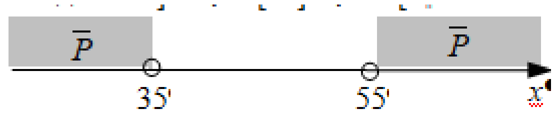
Задача 2. $A\max = B$

Задания на отрезки

Пусть дан отрезок P на числовой прямой: P=[35; 55].



Тогда $\overline{P} =]-\infty; 35[\vee]55; +\infty[$:



Пример 1. На числовой прямой даны два отрезка: P = [37; 60] и Q = [40; 77]. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A, что формула

$$(x \in P) \to (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in P))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Решение 1:

1) Обозначим отдельные высказывания буквами

A: $x \in A$, **P**: $x \in P$, **Q**: $x \in Q$

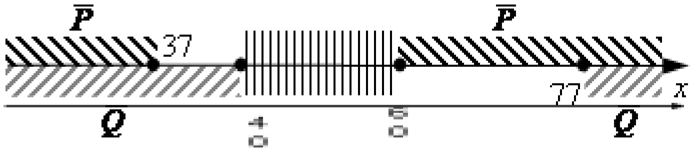
2) Перейдем к более простым обозначениям: $\mathbf{P} \to (\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}} \to \overline{\mathbf{P}})$

3) Раскрываем обе импликации по формуле $A \to B = \overline{A} + B$:

$$\mathbf{P} \to (\overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}}) = \overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}}$$

4) теперь используем закон де Моргана $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$: $\overline{\mathbf{Q}} + \mathbf{A} + \overline{\mathbf{P}} = 1$

5) Сразу видно, что отрезок A должен перекрыть область на числовой оси, которая не входит в область $\overline{\mathbf{Q}} + \overline{\mathbf{P}}$:

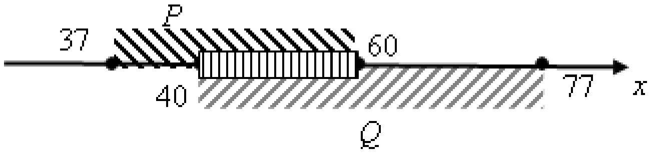


6) по рисунку видно, что не перекрыт только отрезок [40; 60], его длина – 20.

Решение 2 (сведение к задаче 1)**:**

5) $\overline{\mathbf{Q}} + \mathbf{A} + \overline{\mathbf{P}} = 1$.

$\mathbf{A}_{\min} = \overline{\overline{\mathbf{Q}} + \overline{\mathbf{P}}} = Q \cdot P$ (выбрать пересечение).



Ответ: 20.

Пример 2. На числовой прямой даны два отрезка: P = [10, 20] и Q = [25, 55]. Определите наибольшую возможную длину отрезка A, при котором формула

$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \vee (x \in Q))$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Решение:

1) Обозначим отдельные высказывания буквами

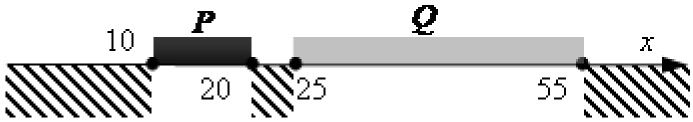
A: $x \in A$, **P**: $x \in P$, **Q**: $x \in Q$

2) Перейдем к более простым обозначениям: **A → (P + Q)**

3) Раскроем импликацию, используя формулу $A \rightarrow B = \overline{A} + B$:

$A \rightarrow (P + Q) = \overline{A} + P + Q$

4) Для того чтобы выражение было истинно при всех x, нужно, чтобы $\overline{A}$ было истинно там, где ложно $P + Q$ (заштрихованная область на рисунке)



5) Т.к. области истинности P и Q разделены, максимальный отрезок, где A может быть истинно (и, соответственно, $\overline{A}$ ложно) – это наибольший из отрезков P и Q, то есть отрезок [25, 55], имеющий длину 30.

6) Сведение к задаче 2: $\overline{A} + P + Q = 1$. A_{max}=P+Q (объединение отрезков; выбрать из отрезков наибольший).

Ответ: 30.

Задание 1 (аналог примера 1)**.** На числовой прямой даны два отрезка: D = [15; 40] и C = [21; 63]. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A, что формула

(x ∈ D) → ((¬(x ∈ C) /\ ¬(x ∈ A)) → ¬(x ∈ D)) истинна (то есть принимает значение 1 при любом значении переменной *x*).

Решение:

1) Введем условные обозначения, которые будем использовать при решении: **D = x ∈ D**; **C = x ∈ C**; **A = x ∈ A**.

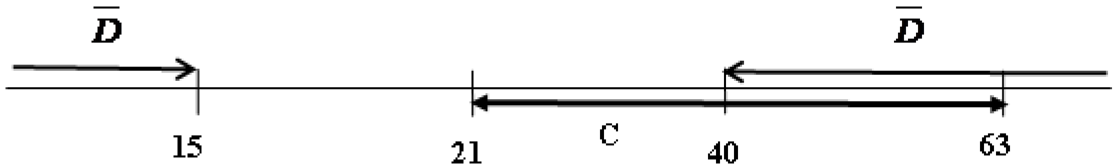
2) Перепишем формулу из условия задачи в соответствии с принятыми обозначениями: $D \to (\overline{C} \cdot \overline{A} \to \overline{D}) = 1$.

3) Используя формулу $A \to B = \overline{A} + B$, закон де Моргана, преобразуем логическое выражение:

$$D \to (\overline{C} \cdot \overline{A} \to \overline{D}) = \overline{D} + \overline{\overline{C} \cdot \overline{A}} + \overline{D} = \overline{D} + C + A$$

4) Для тождественной истинности выражения $\overline{D} + C + A = 1$ надо, чтобы для любого *x* было выполнено одно из условий $\overline{D}$, *C* или *A*. Из всех этих выражений неизвестно только *A*.

5) Рассмотрим, какие интервалы перекрываются $\overline{D}$ и *C*. По условию **D**= [15, 40]. Поэтому $\overline{D} = (-\infty; 15) \vee (40; \infty)$. Объединение отрезков $\overline{D} = (-\infty; 15) \vee (40; \infty)$ и **Q** = [21, 63] можно изобразить на прямой:



6) Из рисунка видно, что отрезок от 15 до 21 и должен быть отрезком A. Его длина равна 6.

7) Обозначим объединение отрезков $\overline{D}$ и *C* как *B* (сведение к задаче 2): $B = \overline{D} + C$. Тогда $A_{\min} = \overline{B} = \overline{\overline{D} + C} = D \cdot \overline{C}$. Т.е это множество состоит из пересечения *D* и $\overline{C}$: 21-15=6.

Ответ: 6.

Задание 2 (аналог примера 2)**.** На числовой прямой даны два отрезка: *P* = [5; 30] и *Q* = [14; 23]. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка *A*, что формула ((*x*∈*P*)↔(*x*∈*Q*))→ ¬(*x*∈*A*) тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной *x*.

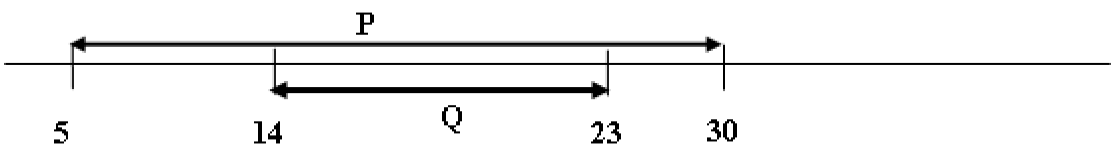
1) Введем условные обозначения, которые будем использовать при решении: **P = x ∈ P**; **Q = x ∈ Q**; **A = x ∈ A**.

2) Перепишем формулу из условия задачи в соответствии с принятыми обозначениями: $(P \leftrightarrow Q) \to \overline{A} = 1$.

3) Раскрываем импликацию по формуле $A \to B = \overline{A} + B$, преобразуем логическое выражение:

$$(P \leftrightarrow Q) \to \overline{A} = \overline{P \leftrightarrow Q} + \overline{A} = (P \neq Q) + \overline{A}$$

4) Выражение *P*≠*Q* истинно на двух отрезках, которые входят в *P* и не входят в *Q*:



5) Значение *A* может быть истинным только внутри отрезков [5; 14] и [23; 30].

6) Длина 1-го отрезка 14-5=9, второго – 30–23=7. Наибольшая возможная длина отрезка *A* равна 9.

Ответ: 9.

Задания на множества чисел

Пример 3. Элементами множества *A* являются натуральные числа. Известно, что выражение

(x ∈{2, 4, 6, 8, 10, 12}) → (((x ∈{4, 8, 12, 116}) ∧ ¬(x ∈A)) → ¬(x ∈{2, 4, 6, 8, 10, 12}))

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной *x*.

Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества *A*.

Решение:

1) В задаче, кроме множества *A*, используются еще два множества:

P = {2, 4, 6, 8, 10, 12}   Q = {4, 8, 12, 116}

2) Обозначим отдельные высказывания буквами

A: $x \in A$,   **P**: $x \in P$,   **Q**: $x \in Q$

3) Перейдем к более простым обозначениям: $\mathbf{P} \to (\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}} \to \overline{\mathbf{P}})$

4) Раскрываем обе импликации по формуле $A \to B = \overline{A} + B$:

$$\mathbf{P} \to (\overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}}) = \overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}}$$

5) Используем закон де Моргана $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$:

$$\overline{\mathbf{Q}} + \mathbf{A} + \overline{\mathbf{P}}$$

6) Т.к. это выражение должно быть равно 1, то *A* должно быть истинным везде, где ложно $\overline{\mathbf{Q}} + \overline{\mathbf{P}}$

7) Тогда минимальное допустимое множество *A* – это $A_{\min} = \overline{\overline{\mathbf{Q}} + \overline{\mathbf{P}}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$ (по закону де Моргана)

8) Переходим к множествам

$\mathbf{Q}$ = {**4**, **8**, **12**, 116}

$\mathbf{P}$ = {2, **4**, 6, **8**, 10, **12**}

9) Тогда $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$ – это все натуральные числа, которые входят одновременно в $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}$: {4, 8, 12}

10) именно эти числа и должны быть «перекрыть» множеством $A_{\min}$, поэтому минимальный состав множества *A* – это $A_{\min}$ = {4, 8, 12}, сумма этих чисел равна 24.

Ответ: 24.

Пример 4. Элементами множеств *A*, *P* и *Q* являются натуральные числа, причём *P* = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20} и *Q* = { 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 }. Известно, что выражение: ((x∈*A*) → ¬(x∈*P*))∧(¬(x∈*Q*) → ¬(x∈*A*))

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной *x*.

Определите наибольшее возможное количество элементов множества *A*.

Решение:

1) Обозначим отдельные высказывания буквами:

P=(x∈*P*);

Q=(x∈*Q*);

A=(x∈*A*).

2) Перепишем выражение: $(A \to \overline{P}) \cdot (\overline{Q} \to \overline{A})$

3) Используя свойство импликации и закон поглощения A+A·B=A получаем

$$(A \to \overline{P}) \cdot (\overline{Q} \to \overline{A}) = (\overline{A} + \overline{P}) \cdot (Q + \overline{A}) = \overline{A} \cdot Q + \overline{A} + \overline{P} \cdot Q + \overline{A} \cdot \overline{P} = \overline{A} \cdot (Q + 1 + \overline{P}) + \overline{P} \cdot Q$$

Окончательно: $\overline{A} + \overline{P} \cdot Q = 1$

4) Задача сведена к базовой Задаче 2, где $B = \overline{P} \cdot Q$. Ее решение: $A_{\max} = \overline{P} \cdot Q$ – это пересечение множеств $\overline{P}$ и Q, т.е. все элементы, которые входят в Q и не входят в P:

5) A_{max}={3, 9, 15, 21, 24, 27, 30}

Количество элементов этого множества равно 7.

Ответ: 7

Задание 3. Элементами множества A являются натуральные числа. Известно, что выражение

¬(x∈{1, 2, 3, 4, 5, 6}) ∨ (¬(x ∈{3, 6, 9, 12, 15}) → (x ∈A))

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x.

Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества A.

Решение :

1) Пусть P= {1, 2, 3, 4, 5, 6}), Q={3, 6, 9, 12, 15}, тогда: $\overline{P} + (\overline{Q} \to A) = \overline{P} + Q + A = 1$

2) Это Задача 1**,** где $B = \overline{P} + Q$. Ее решение: $A_{\min} = \overline{B} = \overline{\overline{P} + Q} = P \cdot \overline{Q}$

3) Это множество состоит из пересечения множеств P и $\overline{Q}$, т.е. A = {1, 2, 4, 5}, сумма которого равна 1 + 2 + 4 + 5 = 12.

Ответ: 12

Задание 4. Элементами множеств A, P, Q являются натуральные числа, причем P = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}, Q = {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50}.

Известно, что выражение: ((x ∈ A) → (x ∈P)) ∨ (¬(x ∈Q) → ¬(x ∈ A))

истинно (т.е. принимает значение 1) при любом значении переменной x.

Определите наибольшее возможное количество элементов в множестве A.

Решение:

1) Преобразуем данное выражение:

$$(A \to P) + (\overline{Q} \to \overline{A}) = \overline{A} + P + Q = 1$$

2) Это Задача 2, где $B = P + Q$. Ее решение: Amax = $P + Q$.

3) В A могут быть лишь элементы из P и Q. И всего в этих двух множествах 18 неповторяющихся элементов {2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50}.

Ответ: 18

Задача на битовые цепочки

Пример 5. Пусть P – множество всех 8-битовых цепочек, начинающихся с 1, Q – множество всех 8-битовых цепочек, оканчивающихся на 000, а A – некоторое множество произвольных 8-битовых цепочек. Сколько элементов содержит минимальное множество A, при котором для любой 8-битовой цепочки x истинно выражение

¬(x∈ A) → (¬(x∈ P) ∨ (x∈ Q))

Решение: Введём обозначения:

A: $x \in A$, **P**: $x \in P$, **Q**: $x \in Q$

Запишем условие в виде:

$$\overline{\mathbf{A}} \to (\overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q})$$

Раскроем импликацию по формуле: $A \to B = \overline{A} + B$:

$$\overline{\mathbf{A}} \to (\overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q}) = \mathbf{A} + \overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q}$$

Мы получили базовую **Задачу1,** где B = $\overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q}$.

Ее решение:

$$\mathbf{A}_{\min} = \overline{\overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q}} = \mathbf{P} \cdot \overline{\mathbf{Q}}$$.

Это множество, состоящее из всех элементов множества P, не входящих во множество Q, то есть все 8-битовые цепочки, которые начинаются с 1 и оканчиваются не на 000.

Поскольку всего битов 8, структура всех таких цепочек имеет вид **1****???**, где * обозначает любой из двух символов (0 или 1) , а **???** – трёхбитное окончание, не совпадающее с 000.

Всего может быть $2^3 = 8$ комбинаций из трёх битов, одно из них, 000, запрещено для окончания, поэтому остаётся еще 7 разрешённых вариантов.

Общее количество подходящих цепочек находим по правилам комбинаторики, перемножив количество вариантов для каждой части цепочки (1 для первого бита, по 2 для следующих четырёх и 7 для трёхбитного окончания):

$1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 112$

Ответ: 112

Логические уравнения

Пример 1. Укажите значения переменных *K*, *L*, *M*, *N*, при которых логическое выражение

(¬(M ∨ L) ∧ K) → (¬K ∧ ¬M ∨ N)

ложно. Ответ запишите в виде строки из 4 символов: значений переменных *K*, *L*, *M* и *N* (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что *K*=1, *L*=1, *M*=0, *N*=1.

<u>Решение</u> (упрощение выражения):

1) запишем уравнение, используя более простые обозначения операций:
$$(\overline{(M+L)} \cdot K) \to (\overline{K} \cdot \overline{M} + N) = 0$$
2) заменим импликацию по формуле $A \to B = \overline{A} + B$:
$$\overline{(\overline{(M+L)} \cdot K)} + \overline{K} \cdot \overline{M} + N = 0$$
3) раскроем инверсию сложного выражения по формуле де Моргана $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + B$:
$$M + L + \overline{K} + \overline{K} \cdot \overline{M} + N = 0$$
4) упростим выражение $\overline{K} + \overline{K} \cdot \overline{M} = \overline{K}(1 + \overline{M}) = \overline{K}$:
$$M + L + \overline{K} + N = 0$$
5) мы получили уравнение вида «сумма = 0», в нем все слагаемые должны быть равны нулю
6) поэтому сразу находим $M = L = N = 0, \quad K = 1$
7) **Ответ – 1000**.

Пример 2. Сколько различных решений имеет уравнение

$$((K \lor L) \rightarrow (L \land M \land N)) = 0$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Решение (разделение на части):

1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:
$$\mathbf{((K + L) \rightarrow (L \cdot M \cdot N)) = 0}$$
2) из таблицы истинности операции «импликация» следует, что это равенство верно тогда и только тогда, когда одновременно
$$\mathbf{K + L = 1} \quad \text{и} \quad \mathbf{L \cdot M \cdot N = 0}$$
3) из первого уравнения следует, что хотя бы одна из переменных, K или L, равна 1 (или обе вместе); поэтому рассмотрим три случая
4) если K = 1 и L = 0, то второе равенство выполняется при любых M и N; поскольку существует 4 комбинации двух логических переменных (00, 01, 10 и 11), имеем **4** разных решения
5) если K = 1 и L = 1, то второе равенство выполняется при M · N = 0; существует 3 таких комбинации (00, 01 и 10), имеем еще **3** решения
6) если K = 0, то обязательно L = 1 (из первого уравнения); при этом второе равенство выполняется при M · N = 0; существует 3 таких комбинации (00, 01 и 10), имеем еще **3** решения
7) таким образом, всего получаем 4 + 3 + 3 = **10 решений**.

Ответ: 10.

Пример 3. Сколько различных решений имеет уравнение

$$\mathbf{\neg((J \rightarrow K) \rightarrow (M \land N)) \lor \neg((M \land N) \rightarrow (\neg J \lor K)) \lor (M \land N \land K \land L) = 0}$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Решение (упрощение выражения):

1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$\overline{((J \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N)} + \overline{(M \cdot N \rightarrow (\bar{J} + K))} + M \cdot N \cdot K \cdot L = 0$$

2) логическая сумма трех слагаемых равна нулю, поэтому каждое из них должно быть равно нулю

3) обозначим сумму двух первых слагаемых через S_{12} и попытаемся «свернуть» ее; для этого представим импликацию в виде $J \rightarrow K = \bar{J} + K$, тогда

$$S_{12} = \overline{((J \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N)} + \overline{(M \cdot N \rightarrow (\bar{J} + K))} = \overline{((\bar{J} + K) \rightarrow M \cdot N)} + \overline{(M \cdot N \rightarrow (\bar{J} + K))}$$

4) выполним замены $A = \bar{J} + K$ и $B = M \cdot N$, тогда

$$S_{12} = \overline{(A \rightarrow B)} + \overline{(B \rightarrow A)}$$

5) раскроем импликацию через «ИЛИ» и «НЕ» ($A \rightarrow B = \bar{A} + B$):

$S_{12} = \overline{\overline{A} + B} + \overline{\overline{B} + A}$

6) теперь применим формулу де Моргана $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ **:**

$S_{12} = A \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{A}$

7) заметим, что в третьем слагаемом $M \cdot N \cdot K \cdot L$ тоже есть сомножитель $B = M \cdot N$, поэтому уравнение можно переписать в виде

$A \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{A} + B \cdot K \cdot L = 0$

или

$A \cdot \overline{B} + B \cdot (\overline{A} + K \cdot L) = 0$

8) это равенство выполняется, тогда и только тогда, когда оба слагаемых равны нулю;

9) учитывая, что в первом слагаемом есть сомножитель $\overline{B}$, а во втором – B, это может быть в двух случаях:

1) $B = 0,\ A = 0,\ L$ – любое (0 или 1)

2) $B = 1,\ \overline{A} + K \cdot L = 0$

10) рассмотрим случай «а»: условию $B = M \cdot N = 0$ удовлетворяют 3 пары (M,N): (0,0), (0,1) и (1,0); из условия $A = \overline{J} + K = 0$ сразу получаем, что $J = 1$ и $K = 0$; учитывая, что L – любое (0 или 1), в случае «а» получаем 6 разных решений;

11) в случае «б» условие $B = M \cdot N = 1$ сразу дает $M = N = 1$; преобразуем второе условие с помощью формулы де Моргана:

$\overline{A} + K \cdot L = \overline{\overline{J} + K} + K \cdot L = J \cdot \overline{K} + K \cdot L = 0$

это значит, что при $K = 0$ получаем $J = 0$ и L – любое (2 решения), а при $K = 1$ имеем $L = 0$ и J – любое (еще 2 решения)

12) проверяем, что все решения разные, поэтому всего найдено 6 + 2 + 2 = 10 решений

Ответ – 10.

Задание 1 (аналог примера 3). Сколько различных решений имеет уравнение

((J → K) →(M ∧ N ∧ L)) ∧ ((M ∧ N ∧ L) → (¬J ∨ K)) ∧ (M → J) = 1

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Решение (использование свойств импликации):

1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$\left[(J \to K) \to M \cdot N \cdot L\right] \cdot \left[M \cdot N \cdot L \to (\overline{J} + K)\right] \cdot (M \to J) = 1$

2) логическое произведение трех сомножителей равно единице, поэтому каждый из них должен быть тоже равен единице

3) учитывая, что $J \to K = \overline{J} + K$, и выполняя замены $A = \overline{J} + K$ и $B = M \cdot N \cdot L$, получаем

$(A \to B) \cdot (B \to A) \cdot (M \to J) = 1$.

4) рассмотрим последнюю импликацию, которая должна быть равна 1: $M \to J = 1$; по таблице истинности импликации сразу находим, что возможны три варианта:

1) $M = J = 0$

2) $M = 0,\ J = 1$

3) $M = J = 1$

5) поскольку все (в том числе и первые две) импликации должны быть равны 1, по таблице истинности импликации сразу определяем, что $A = B$, то есть

$\bar{J} + K = M \cdot N \cdot L$

6) в случае «а» последнее уравнение превращается в $1 + K = 0$ и не имеет решений

7) в случае «б» имеем $K = 0$, тогда как N и L – произвольные; поэтому есть 4 решения, соответствующие четырем комбинациям N и L

8) в случае «в» получаем $K = N \cdot L$, то есть для $K = 1$ есть единственное решение ($N = L = 1$), а для $K = 0$ – три решения (при $N = L = 0$; $N = 1$ и $L = 0$; $N = 0$ и $L = 1$)

9) проверяем, что среди решений, полученных в п. 7 и 8 нет одинаковых

10) таким образом, всего есть 4 + 1 + 3 = 8 решений

Ответ – 8.

ДЗ №12. Знание понятий и законов математической логики (18, отрезки, множества). Уравнения (23)

1.	На числовой прямой даны два отрезка: P = [15; 39] и Q = [44; 57]. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка *A*, что формула $((x \in A) \to (x \in P)) \vee (x \in Q)$ истинна при любом значении переменной *x*.
2.	На числовой прямой даны два отрезка: P = [12, 28] и Q = [15, 30]. Отрезок *A* таков, что формула ((x ∈ P) → (x ∈ A)) ∧ ((x ∉ Q) ∨ (x ∈ A)) истинна при любом значении переменной *x*. Определите наименьшую возможную длину отрезка *A*. ∈
3.	Элементами множества *A* являются натуральные числа. Известно, что выражение ((x ∈{3, 5, 7, 11, 12, 15}) → (x ∈{5, 6, 12, 15})) ∨ (x ∈A) истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной *x*. Определите наименьшее возможное значение произведения элементов множества *A*.
4.	Элементами множеств A, P и Q являются натуральные числа, причём P = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20} и Q = { 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 }. Известно, что выражение ((x∈A) → ¬(x ∈P)) ∧ (¬(x ∈Q) → ¬(x ∈A)) истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x. Определите наибольшее возможное количество элементов множества A.
5.	**P** – множество всех 8-битовых цепочек, начинающихся с 11, **Q** – множество всех 8-битовых цепочек, оканчивающихся на 0, а **A** – некоторое множество произвольных 8-битовых цепочек. Сколько элементов содержит **минимальное** множество **A**, при котором для любой 8-битовой цепочки *x* истинно выражение: ¬(*x*∈ *A*) → ((*x*∈ *P*) ∨ ¬(*x*∈ *Q*)) ?

6.	Укажите значения переменных K, L, M, N, при которых логическое выражение $(\neg K \lor M) \to (\neg L \lor M \lor N)$ ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что K=1, L=1, M=0, N=1.
7.	Укажите значения логических переменных P, Q, S, T, при которых логическое выражение $(P \lor \neg Q) \lor (Q \to (S \lor T))$ ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных P, Q, S, T (в указанном порядке).
8.	Сколько различных решений имеет уравнение $(K \land L \land M) \lor (\neg L \land \neg M \land N) = 1$ где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.
9.	Сколько различных решений имеет уравнение $(K \land L \land M) \to (\neg M \land N) = 1$ где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.
10.	Сколько различных решений имеет уравнение $J \land \neg K \land L \land \neg M \land (N \lor \neg N) = 0$ где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.
11.	Сколько различных решений имеет уравнение $((J \to K) \to (M \land N)) \land ((J \land \neg K) \to (\neg M \lor \neg N)) \land (\neg M \lor \neg N \lor K \lor L)=1$ где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.