SciencesPo

Mathématiques Appliquées aux Sciences Humaines et Sociales

Séances 11 et 12

FONCTION DE DEUX VARIABLES

Exercice 1

1. *Donner les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes.*

$a.\ f(x;y) = \frac{x^3y+x^2y}{x+y}$ $b.\ f(x;y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ $c.\ f(x;y) = \sqrt{xy}$ $d.\ f(x;y) = x^2y + yx + y + 3x - 1$ $e.\ f(x;y) = Kx^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}}$

2. *Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions suivantes.*

$a.\ f(x;y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ $b.\ f(x;y) = \sqrt{xy}$ $c.\ f(x;y) = x^2y + yx + y + 3x - 1$ $d.\ f(x;y) = 2x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}}$

Solution

$1.\ a.\ \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = \frac{(3x^2y+2xy)(x+y)-(x^3y+x^2y)}{(x+y)^2} = \frac{2x^3y+x^2y+3x^2y^2+2xy^2}{(x+y)^2} = \frac{xy(2x^2+x+3xy+2y)}{(x+y)^2}$

$\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = \frac{(x^3+x^2)(x+y)-(x^3y+x^2y)}{(x+y)^2} = \frac{x^4+x^3}{(x+y)^2} = \frac{x^3(x+1)}{(x+y)^2}$

$1.\ b.\ \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}$ $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}$

$1.\ c.\ \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$ $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}$

$1.\ d.\ \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = 2xy + y + 3$ $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = x^2 + x + 1$

$1.\ e.\ \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = \frac{2}{5}Kx^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{3}{5}}$ $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = \frac{3}{5}Kx^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{2}{5}}$

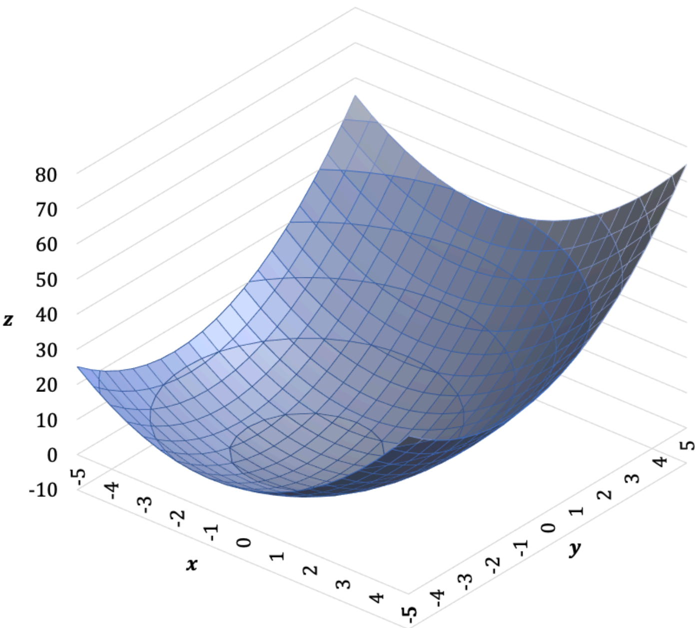
$2.\ a.\ \frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}$ $\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}$ $\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x\partial y} = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}$ $2.\ b.\ \frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x^2} = -\frac{\sqrt{y}}{4x\sqrt{x}}$ $\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y^2} = -\frac{\sqrt{x}}{4y\sqrt{y}}$ $\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x\partial y} = \frac{1}{4\sqrt{xy}}$ $2.\ c.$

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur R^2 par

$$f: (x;y) \longmapsto f(x;y) = x^2 + 2x + y^2 + 3y$$

1. *Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de cette fonction.*
2. *Déterminer le(s) point(s) critique(s) de cette fonction.*
3. *Ce point critique est-il un extremum local ? Maximum local ? Minimum local ?*



Solution

1. Je détermine les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de f.

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = 2x + 2 \quad \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = 2y + 3$$

2. Les points critiques $(x;y)$ de cette fonction vérifient

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = 0$$

ce qui n'est vérifié que pour $x = -1$ *et pour* $y = -\frac{3}{2}$

$z = f\left(-1; -\frac{3}{2}\right) = (-1)^2 + 2\times(-1) + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3\times\left(-\frac{3}{2}\right) = 1 - 2 + \frac{9}{4} - 3\times\frac{3}{2} = -\frac{13}{4}$

Le seul point critique est donc $\left(-1; -\frac{3}{2}; -\frac{13}{4}\right)$

$r = f''_{x^2}(x; y) = 2\ t = f''_{y^2}(x; y) = 2\ s = f''_{xy}(x; y) = 0$

3. $rt - s^2 = 2\times2 - 0^2 = 4 > 0$ et $r > 0$
$f\left(-1; -\frac{3}{2}\right)$ *est donc un minimum absolu.*

Autre méthode

$f(x; y) = x^2 + 2x + y^2 + 3y = x^2 + 2x + 1 + y^2 + 3y + \frac{9}{4} - \frac{13}{4} = (x+1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$

Donc, pour tout couple $(x; y) \in R^2$,

$$f(x; y) \geq -\frac{13}{4}$$

$f(x; y)$ *est donc minimal pour* $(x; y) = \left(-1; -\frac{3}{2}\right)$

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur R^2 par

$$f(x; y) = 4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 8$$

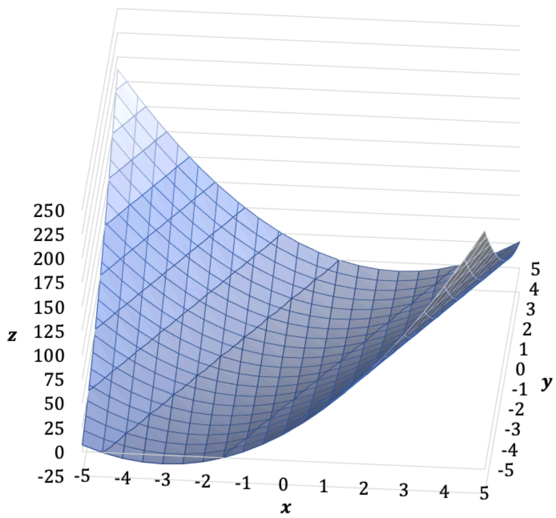
1. *Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de cette fonction.*
2. *Déterminer le(s) point(s) critique(s) de cette fonction.*
Solution
1. Je détermine les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de cette fonction.
$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = 8x - 4y + 4$ $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = -4x + 2y - 2$ $r = \frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x^2} = 8$ $t = \frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y^2} = 2$ $s = \frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x \partial y} = -4$

2. *Les points critiques* $(x; y)$ *de cette fonction vérifient*

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = 0$$

Ce qui équivaut au système suivant :

$$(S)\begin{cases} 8x - 4y + 4 = 0\ (L_1) \\ -4x + 2y - 2 = 0\ (L_2) \end{cases}$$



On remarque que les deux équations sont liées

$$L_1 = -2L_2$$

Le système admet donc une infinité de solutions.

$$(S) \Leftrightarrow y = 2x + 1$$

Tous les points de la forme $(x; 2x + 1; -9)$ où x est un nombre réel sont donc des points critiques. En effet,

$f(x; 2x + 1) = 4x^2 - 4x(2x + 1) + (2x + 1)^2 + 4x - 2(2x + 1) - 8$

$f(x; 2x + 1) = 4x^2 - 8x^2 - 4x + 4x^2 + 4x + 1 + 4x - 4x - 2 - 8$

$f(x; 2x + 1) = -9$

Remarque

$rt - s^2 = 8\times 2 - (-4)^2 = 16 - 16 = 0$

On ne peut donc pas conclure directement sur la nature des points critiques. Cela dit, soit $(x; y) \in R^2$,

$$f(x; y) = 4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 8 = (2x + 1 - y)^2 - 9$$

On remarque ainsi que

$$f(x; y) \geq -9$$

Et que cette valeur est atteinte pour chaque point critique

$$f(x; 2x + 1) = (2x + 1 - (2x + 1))^2 - 9 = -9$$

On en déduit que les points critiques sont des **minima absolus**.

Exercice 4

On définit la fonction Q de production micro-économique d'une entreprise par

$$Q(K; L) = 2K^{\frac{1}{5}}L^{\frac{2}{5}}$$

pour laquelle K est le capital et L le travail.

1. *Calculer les productivités marginales de travail et de capital.*

2. *Déterminer le(s) point(s) critique(s) de cette fonction.*

Solution

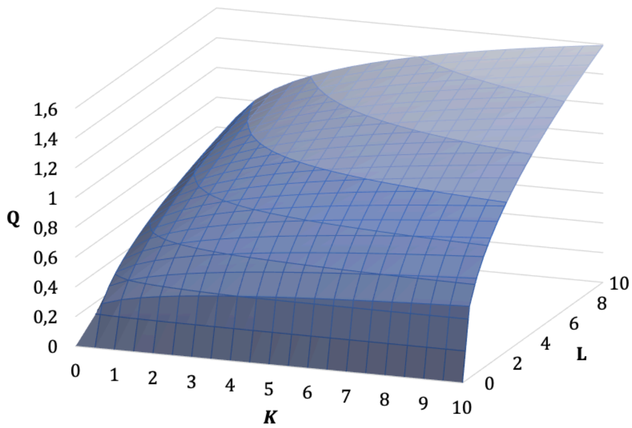
1. Je calcule les productivités marginales de travail et de capital

$\frac{\partial Q(K;L)}{\partial L} = \frac{4}{5}K^{\frac{1}{5}}L^{-\frac{3}{5}}$ $\frac{\partial Q(K;L)}{\partial K} = \frac{2}{5}K^{-\frac{4}{5}}L^{\frac{2}{5}}$

2. Les points critiques $(K; L)$ de cette fonction vérifient

$$\frac{\partial Q(K;L)}{\partial L} = \frac{\partial Q(K;L)}{\partial K} = 0$$

Ceci n'est possible que si K et L tendent vers 0. Or, $\frac{\partial Q}{\partial L}$ et $\frac{\partial Q}{\partial K}$ ne convergent pas simultanément en $(0; 0)$. Donc Q n'admet **aucun point critique**.



Exercice 5 (Galop d'essai, Nancy, 2011)

On considère la fonction f définie pour tout $x \in R$ et tout $y \in R$ par $f(x; y) = 2x^2 + 3y^2 + 2x - y + 1$

1. *Calculer les dérivées partielles* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$

2. *En déduire les coordonnées de l'unique point critique G.*

3. *Calculer les dérivées partielles secondes* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

4. *En déduire la nature du point critique G.*

Solution

1. *Je calcule les dérivées partielles* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$

$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = 4x + 2$ $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = 6y - 1$

2. J'en déduis les coordonnées de l'unique point critique G de coordonnées $(x; y; f(x; y))$ vérifiant

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = 0$$

Ce qui équivaut au système suivant

$$(S)\{4x + 2 = 0\ (L_1)\ 6y - 1 = 0\ (L_2)$$

dont l'unique solution est $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right)$

$f\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} - 1 - \frac{1}{6} + 1 = \frac{6+1-2}{12} = \frac{5}{12}$

Donc G a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{5}{12}\right)$

3. *Je calcule les dérivées partielles secondes* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

$r = \frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(4x + 2) = 4\ t = \frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(6y - 1) = 6\ s = \frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(6y - 1) = 0$

4. *J'en déduis la nature du point critique G.*

$rt - s^2 = 4\times6 - 0^2 = 24 > 0$ et $r = 4 > 0$

Donc G est un **minimum**.

Exercice 6 (Galop d'essai 2011)

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

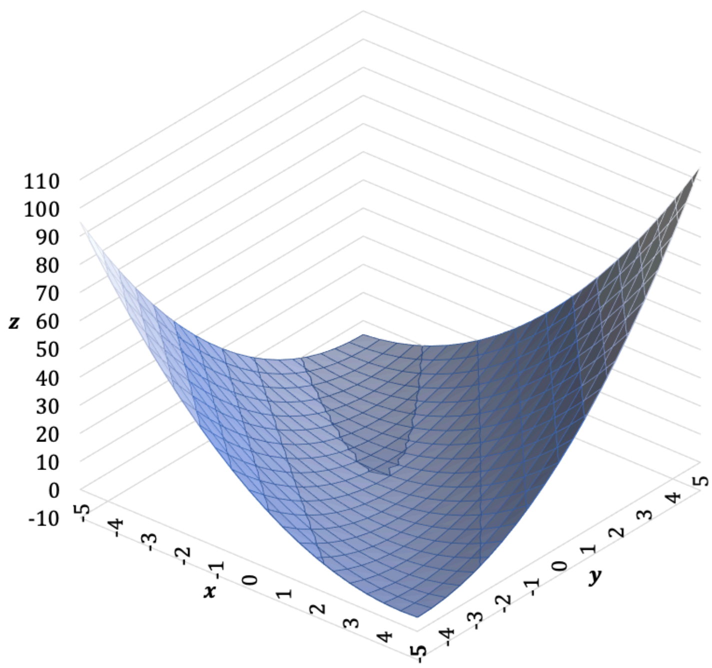
1. On considère la fonction f définie sur R^2 par $f: (x; y) \mapsto f(x; y) = y^2 + xy + 1$, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x; y) = \ ...$$

A **1** *B* **2** *C* **3** *D* **4**

En effet, soit $(x; y) \in R^2$,

$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = y\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x; y) = 1$



2. La fonction f définie sur R^2 par

$$f(x; y) = x^2 + 2xy + y^2 + x$$

admet…

A **aucun point critique.**

B **un unique point critique.**

C **deux points critiques.**

D **plus que 2 points critiques.**

En effet, soit $(x; y) \in R^2$,

$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = 2x + 2y + 1\ \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = 2x + 2y$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *ne peuvent donc pas s'annuler en même temps.*

3. La fonction f définie sur R^2 par

$$f(x; y) = x^2 - 6xy + 8y^2 + 2x - 2y + 2$$

admet un point critique…

A **en** $(-\ 2; 5; 252)$ B **en** $(5; -\ 2; 133)$ C **en** $(5; 2; 5)$ D **en aucun point.**

En effet, soit $(x; y) \in R^2$,

$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = 2x - 6y + 2$ $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = -\ 6x + 16y - 2$

$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow (S)\{2x - 6y + 2 = 0\ (L_1)\ \ - 6x + 16y - 2 = 0 (L_2)$

$16x - 48y + 16 = 0\ (8L_1)\ 6x - 18y + 6 = 0\ (3L_1)\ \underline{-\ 18x + 48y - 6 = 0\ (3L_2)}\ \underline{-\ 6x + 16y - 2 = 0\ (L_2)}\ \ - 2x$

Donc

$(S) \Leftrightarrow \{-\ 2x + 10 = 0\ (8L_1 + 3L_2)\ \ - 2y + 4 = 0\ (3L_1 + L_2)$

$(S) \Leftrightarrow \{x = 5\ y = 2$

$z = f(5; 2) = 5^2 - 6\times5\times2 + 8\times2^2 + 2\times5 - 2\times2 + 2 = 25 - 60 + 32 + 10 - 4 + 2 = 5$

Donc $(5; 2; 5)$ est le seul point critique de f.

Exercice 7 (examen 2011)

Soit la fonction f définie sur R^2 par

$f: (x; y) \mapsto f(x; y) = \frac{5}{2}x^2 + 3xy + x + y^2$

alors le couple $(x_0; y_0)$ *vérifiant* $\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0; y_0\right) = 0$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0; y_0\right) = 0$ *est*

A $(3; 2)$ B $(-\ 2; 3)$ C $(0; 2)$ D $(1; -\ 3)$

En effet, soit $(x; y) \in R^2$,

$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = 5x + 3y + 1$ $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = 3x + 2y$

$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow (S)\{5x + 3y + 1 = 0\ (L_1)\ 3x + 2y = 0 (L_2)$

$10x + 6y + 2 = 0\ (2L_1)\ \ - 15x - 9y - 3 = 0\ (-\ 3L_1)\ \underline{-\ 9x - 6y = 0\ (-\ 3L_2)}\ \underline{15x + 10y = 0\ (5L_2)}\ x + 2 = 0\ y$

Donc

$(S) \Leftrightarrow \{x + 2 = 0\ (2L_1 - 3L_2)\ y - 3 = 0\ (-\ 3L_1 + 5L_2)$

$(S) \Leftrightarrow \{x = -\ 2\ y = 3$