

FONCTION DE DEUX VARIABLES

Exercice 1

1. Donner les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes.

a. $f(x; y) = \frac{x^3 y + x^2 y}{x+y}$ b. $f(x; y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ c. $f(x; y) = \sqrt{xy}$ d. $f(x; y) = x^2 y + yx + y + 3x - 1$ e. $f(x; y) = Kx^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}}$

2. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions suivantes.

a. $f(x; y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ b. $f(x; y) = \sqrt{xy}$ c. $f(x; y) = x^2 y + yx + y + 3x - 1$ d. $f(x; y) = 2x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}}$

Solution

1. a. $\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = \frac{(3x^2 y + 2xy)(x+y) - (x^3 y + x^2 y)}{(x+y)^2} = \frac{2x^3 y + x^2 y^2 + 2xy^2}{(x+y)^2} = \frac{xy(2x^2 + x + 3xy + 2y)}{(x+y)^2}$

$\frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = \frac{(x^3 + x^2)(x+y) - (x^3 y + x^2 y)}{(x+y)^2} = \frac{x^4 + x^3}{(x+y)^2} = \frac{x^3(x+1)}{(x+y)^2}$

1. b. $\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}$ $\frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}$

1. c. $\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$ $\frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}$

1. d. $\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = 2xy + y + 3$ $\frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = x^2 + x + 1$

1. e. $\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = \frac{2}{5}Kx^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{3}{5}}$ $\frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = \frac{3}{5}Kx^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{2}{5}}$

2. a. $\frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}$ $\frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}$ $\frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}$ 2. b. $\frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial x^2} = -\frac{\sqrt{y}}{4x\sqrt{x}}$ $\frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial y^2} = -\frac{\sqrt{x}}{4y\sqrt{y}}$ $\frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\sqrt{xy}}$ 2. c. $\frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial x^2} = \frac{2}{5}Kx^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{3}{5}}$ $\frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial y^2} = \frac{3}{5}Kx^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{2}{5}}$ $\frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial x \partial y} = \frac{6}{25}Kx^{-\frac{3}{5}}y^{-\frac{2}{5}}$

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f: (x; y) \mapsto f(x; y) = x^2 + 2x + y^2 + 3y$$

1. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de cette fonction.

2. Déterminer le(s) point(s) critique(s) de cette fonction.

3. Ce point critique est-il un extremum local ? Maximum local ? Minimum local ?

Solution

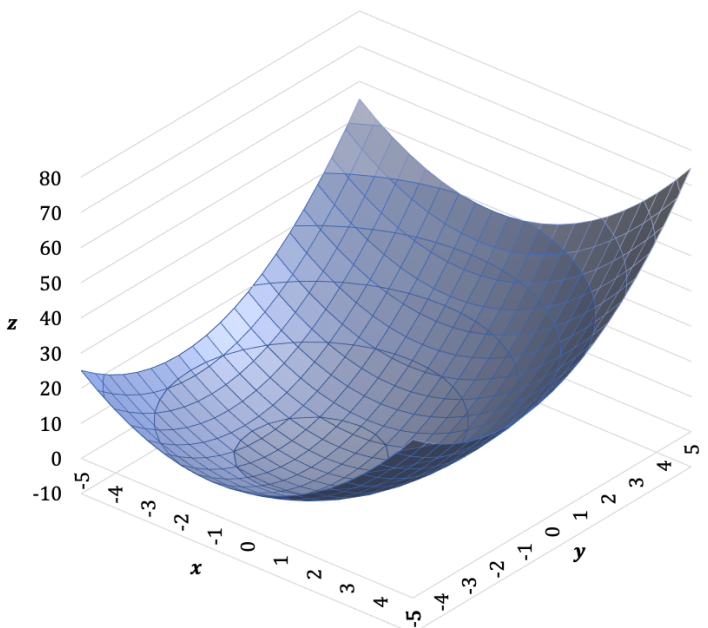
1. Je détermine les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de f .

$$\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = 2x + 2$$
 $\frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = 2y + 3$

2. Les points critiques $(x; y)$ de cette fonction vérifient

$$\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = 0$$

ce qui n'est vérifié que pour $x = -1$ et pour $y = -\frac{3}{2}$



$$z = f\left(-1; -\frac{3}{2}\right) = (-1)^2 + 2 \times (-1) + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = 1 - 2 + \frac{9}{4} - 3 \times \frac{3}{2} = -\frac{13}{4}$$

Le seul point critique est donc $\left(-1; -\frac{3}{2}; -\frac{13}{4}\right)$

$$r = f''_{xx}(x; y) = 2 \quad t = f''_{yy}(x; y) = 2 \quad s = f''_{xy}(x; y) = 0$$

$$3. \quad rt - s^2 = 2 \times 2 - 0^2 = 4 > 0 \text{ et } r > 0$$

$f\left(-1; -\frac{3}{2}\right)$ est donc un minimum absolu.

Autre méthode

$$f(x; y) = x^2 + 2x + y^2 + 3y = x^2 + 2x + 1 + y^2 + 3y + \frac{9}{4} - \frac{13}{4} = (x + 1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$$

Donc, pour tout couple $(x; y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x; y) \geq -\frac{13}{4}$$

$f(x; y)$ est donc minimal pour $(x; y) = \left(-1; -\frac{3}{2}\right)$

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x; y) = 4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 8$$

1. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de cette fonction.

2. Déterminer le(s) point(s) critique(s) de cette fonction.

Solution

1. Je détermine les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de cette fonction.

$$\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = 8x - 4y + 4 \quad \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = -4x + 2y - 2 \quad r = \frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial x^2} = 8 \quad t = \frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial y^2} = 2 \quad s = \frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial x \partial y} = -4$$

2. Les points critiques $(x; y)$ de cette fonction vérifient

$$\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = 0$$

Ce qui équivaut au système suivant :

$$(S) \begin{cases} 8x - 4y + 4 = 0 & (L_1) \\ -4x + 2y - 2 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

On remarque que les deux équations sont liées

$$L_1 = -2L_2$$

Le système admet donc une infinité de solutions.

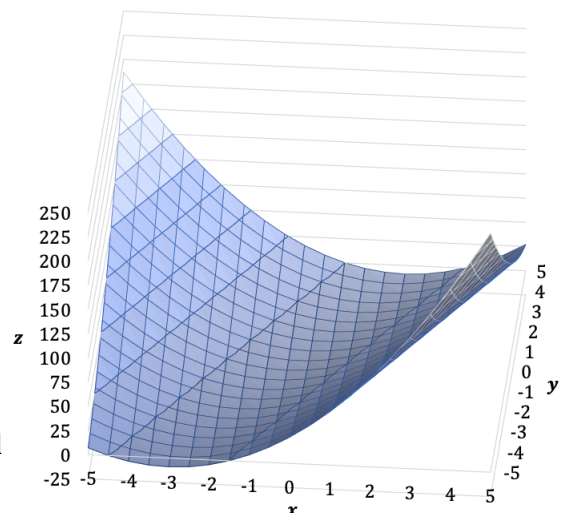
$$(S) \Leftrightarrow y = 2x + 1$$

Tous les points de la forme $(x; 2x + 1; -9)$ où x est un nombre réel sont donc des points critiques. En effet,

$$f(x; 2x + 1) = 4x^2 - 4x(2x + 1) + (2x + 1)^2 + 4x - 2(2x + 1) - 8$$

$$f(x; 2x + 1) = 4x^2 - 8x^2 - 4x + 4x^2 + 4x + 1 + 4x - 4x - 2 - 8$$

$$f(x; 2x + 1) = -9$$



Remarque

$$rt - s^2 = 8 \times 2 - (-4)^2 = 16 - 16 = 0$$

On ne peut donc pas conclure directement sur la nature des points critiques. Cela dit, soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x; y) = 4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 8 = (2x + 1 - y)^2 - 9$$

On remarque ainsi que

$$f(x; y) \geq -9$$

Et que cette valeur est atteinte pour chaque point critique

$$f(x; 2x + 1) = (2x + 1 - (2x + 1))^2 - 9 = -9$$

On en déduit que les points critiques sont des **minima absolus**.

Exercice 4

On définit la fonction Q de production micro-économique d'une entreprise par

$$Q(K; L) = 2K^{\frac{1}{5}}L^{\frac{2}{5}}$$

pour laquelle K est le capital et L le travail.

1. Calculer les productivités marginales de travail et de capital.
2. Déterminer le(s) point(s) critique(s) de cette fonction.

Solution

1. Je calcule les productivités marginales de travail et de capital

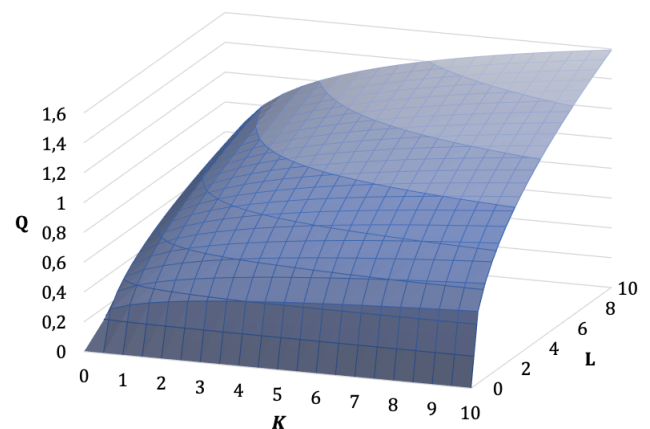
$$\frac{\partial Q(K; L)}{\partial L} = \frac{4}{5}K^{\frac{1}{5}}L^{-\frac{3}{5}} \quad \frac{\partial Q(K; L)}{\partial K} = \frac{2}{5}K^{-\frac{4}{5}}L^{\frac{2}{5}}$$

2. Les points critiques $(K; L)$ de cette fonction vérifient

$$\frac{\partial Q(K; L)}{\partial L} = \frac{\partial Q(K; L)}{\partial K} = 0$$

Ceci n'est possible que si K et L tendent vers 0. Or, $\frac{\partial Q}{\partial L}$ et $\frac{\partial Q}{\partial K}$ ne convergent pas simultanément en $(0; 0)$. Donc Q n'admet

aucun point critique.



Exercice 5 (Galop d'essai, Nancy, 2011)

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ par $f(x; y) = 2x^2 + 3y^2 + 2x - y + 1$

1. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$
2. En déduire les coordonnées de l'unique point critique G .
3. Calculer les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

4. En déduire la nature du point critique G .

Solution

1. Je calcule les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = 4x + 2 \quad \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = 6y - 1$$

2. J'en déduis les coordonnées de l'unique point critique G de coordonnées $(x; y; f(x; y))$ vérifiant

$$\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = 0$$

Ce qui équivaut au système suivant

$$(S) \begin{cases} 4x + 2 = 0 & (L_1) \\ 6y - 1 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

dont l'unique solution est $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right)$

$$f\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} - 1 - \frac{1}{6} + 1 = \frac{6+1-2}{12} = \frac{5}{12}$$

Donc G a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{5}{12}\right)$

3. Je calcule les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

$$r = \frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(4x + 2) = 4 \quad t = \frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(6y - 1) = 6 \quad s = \frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(6y - 1) = 0$$

4. J'en déduis la nature du point critique G .

$$rt - s^2 = 4 \times 6 - 0^2 = 24 > 0 \text{ et } r = 4 > 0$$

Donc G est un **minimum**.

Exercice 6 (Galop d'essai 2011)

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f: (x; y) \mapsto f(x; y) = y^2 + xy + 1$, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x; y) = \dots$$

A 1 B 2 C 3 D 4

En effet, soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x; y) = 1$$

2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x; y) = x^2 + 2xy + y^2 + x$$

admet...

A aucun point critique.

B un unique point critique.

C deux points critiques.

D plus que 2 points critiques.

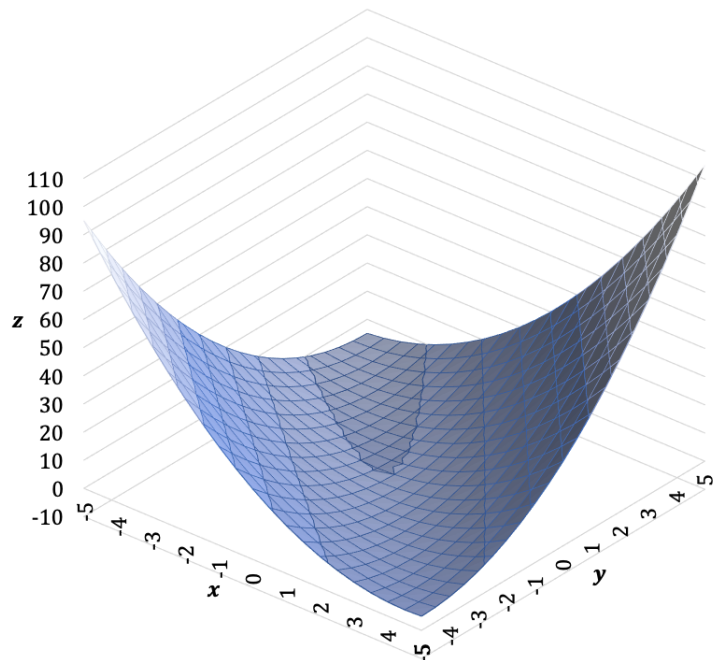
En effet, soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = 2x + 2y + 1 \quad \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = 2x + 2y$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne peuvent donc pas s'annuler en même temps.

3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x; y) = x^2 - 6xy + 8y^2 + 2x - 2y + 2$$



admet un point critique...

A en $(-2; 5; 252)$

B en $(5; -2; 133)$

C en $(5; 2; 5)$

D en aucun point.

En effet, soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = 2x - 6y + 2 \quad \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = -6x + 16y - 2$$

$$\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow (S) \begin{cases} 2x - 6y + 2 = 0 & (L_1) \\ -6x + 16y - 2 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

$$16x - 48y + 16 = 0 \quad (8L_1) \quad 6x - 18y + 6 = 0 \quad (3L_1) \quad \underline{-18x + 48y - 6 = 0 \quad (3L_2)} \quad \underline{-6x + 16y - 2 = 0 \quad (L_2)} \quad -2x + 10 = 0 \quad (8L_1 + 3L_2)$$

Donc

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 10 = 0 & (8L_1 + 3L_2) \\ -2y + 4 = 0 & (3L_1 + L_2) \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$z = f(5; 2) = 5^2 - 6 \times 5 \times 2 + 8 \times 2^2 + 2 \times 5 - 2 \times 2 + 2 = 25 - 60 + 32 + 10 - 4 + 2 = 5$$

Donc $(5; 2; 5)$ est le seul point critique de f .

Exercice 7 (examen 2011)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f: (x; y) \mapsto f(x; y) = \frac{5}{2}x^2 + 3xy + x + y^2$$

alors le couple $(x_0; y_0)$ vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) = 0$ est

A $(3; 2)$

B $(-2; 3)$

C $(0; 2)$

D $(1; -3)$

En effet, soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = 5x + 3y + 1 \quad \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = 3x + 2y$$

$$\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow (S) \begin{cases} 5x + 3y + 1 = 0 & (L_1) \\ 3x + 2y = 0 & (L_2) \end{cases}$$

$$10x + 6y + 2 = 0 \quad (2L_1) \quad -15x - 9y - 3 = 0 \quad (-3L_1) \quad \underline{-9x - 6y = 0 \quad (-3L_2)} \quad \underline{15x + 10y = 0 \quad (5L_2)} \quad x + 2 = 0 \quad (2L_1 - 3L_2)$$

Donc

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 & (2L_1 - 3L_2) \\ y - 3 = 0 & (-3L_1 + 5L_2) \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$